نام و نام خانوادگی: | پایه : دوازدهم | فاخران

نام آزمون: ریاضی ۳

تاریخ آزمون: ۱۳۹۸/۱۲/۱۵

۱ - مشتق توابع زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x) = \left(\frac{x}{2x-1}\right)^5$ ب) $g(x) = x^2(\sqrt{x+1})$

۲ - مشتق تابع $y = \frac{1}{x}(2\sqrt{x}-1)^4$ را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

۳ - آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ را وقتی متغیر از $x_1 = 2$ به $x_2 = 7$ تغییر می کند به‌دست آورید.

۴ - مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف) $f(x) = (x^2+1)^3(5x-1)$ ب) $g(x) = \frac{9x-2}{\sqrt{x}}$

۵ - اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

۶ - یکی از خط‌های مماس بر منحنی به معادله‌ی $y = (x+2)^2$، محور xها را در یک نقطه با طول یک قطع می‌کند. مجموع طول و عرض نقطه‌ی تماس منحنی با خط مورد نظر کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱۰ ۳) ۲۰ ۴) ۴۰

۷ - آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 + a\sqrt{x}$، وقتی x از ۱ به ۴ تغییر می‌کند، دو برابر آهنگ لحظه‌ای تغییر آن در $x = 1$ است، a کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۸ - اگر $f(x) = (\frac{\sqrt{x}}{x-3})^3$، حاصل $\lim\limits_{x\to 4} \frac{f(4)-f(x)}{4-x}$ کدام است؟

۱) $\frac{-7}{4}$ ۲) $\frac{-21}{4}$ ۳) -7 ۴) -21

۹ - معادله‌ی خط مماس بر تابع $y = x^3 - 5x^2 + 7x + 1$ در $x = 1$ واقع بر منحنی، وتری با چه طول روی سهمی $y = x^2 - 5x + 6$ جدا می کند؟

۱) $\sqrt{17}$ ۲) $\sqrt{13}$ ۳) $\sqrt{11}$ ۴) $\sqrt{19}$

۱۰ - اگر تابع f در $x = -2$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(-2+h)+3}{h} = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه مشتق $y = x^2 f(x)$ در $x = -2$، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۱۱ - خط به معادله‌ی $y = \frac{1}{2}(x-b)$ بر منحنی به معادله‌ی $y = \sqrt{x}$ مماس است، b کدام است؟

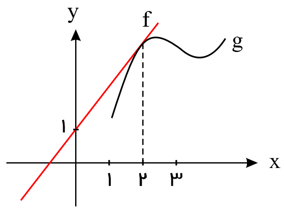
۱) -2 ۲) ۲ ۳) -1 ۴) ۱

۱۲ - مقدار مشتق تابع $f(x) = (\frac{x^2+1}{\sqrt{3x+1}})^3$ در $x = 1$ کدام است؟

۱) $\frac{15}{8}$ ۲) $\frac{15}{4}$ ۳) $\frac{9}{8}$ ۴) $\frac{9}{4}$

۱۳ - به‌ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $f(x) = mx^2 + 1$ با خط $g(x) = mx$ تقاطع ندارد؟

۱) $0 \leq m \leq 4$ ۲) $0 \leq m < 4$ ۳) $m > 4$ یا $m < 0$ ۴) $m \geq 0$



۱۴ - در شکل زیر اگر داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(2x)-f(2)}{x-1}=4$، آنگاه حاصل $f(1)+g'(2)$ چقدر است؟

(۱) ۴ (۲) ۵
(۳) ۶ (۴) ۷

۱۵- اگر $f(x)=(x-1)\sqrt{2x^3+6x^2}$ باشد، مقدار $f'(1)$ کدام است؟

(۱) $-\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۲

۱۶- اگر مقدار مشتق و مقدار تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=1$، به‌ترتیب برابر ۳ و (-2) باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^2(x)-f^2(1)}{x-1}$ کدام است؟

(۱) -6 (۲) ۶ (۳) -12 (۴) ۱۲

۱۷ - کدام گزینه در مورد تابع $f(x)=\begin{cases}|x-1| & x>0\\ -x & x\leq 0\end{cases}$ صحیح است؟

(۱) تابع در $x=0$ مشتق‌پذیر است.
(۲) تابع در فاصلهٔ $(-\infty,0]$ مشتق‌پذیر است.
(۳) $f'_-(0)=f'_+(0)=-1$ است.
(۴) تابع در فاصلهٔ $(0,+\infty)$ مشتق‌پذیر است.

۱۸ - تابع $f(x)=\begin{cases}x^3 & x\geq -1\\ |(x-2)(x+3)^2| & x<-1\end{cases}$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۹ - تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax+b}{\sqrt{x}} & ,x\geq 1\\ bx^3-x+6 & ,x<1\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. $a-b$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۰- اگر $f(x)=(x^2+1)(x^4+1)$ و $g(x)=x^8-1$ مقدار $g'(1)f(1)-f'(1)g(1)$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

۲۱ - مساحت ناحیهٔ محدود به محورهای مختصات و خط نیم‌مماس چپ تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & ;x\geq 1\\ -2x^2+2 & ;x<1\end{cases}$ در نقطهٔ $x=1$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۲

۲۲ - مساحت ناحیهٔ محصور بین خط مماس بر منحنی $y=\dfrac{x}{x+4}$ در $x=1$ واقع بر منحنی و محورهای مختصات کدام است؟

(۱) ۰٫۰۰۱ (۲) ۰٫۰۱ (۳) ۰٫۰۵ (۴) ۰٫۰۰۵

۲۳- اگر $f(x)=\dfrac{3x+1}{2x+1}$ و $g(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{(2x+1)^2}$ باشد، مقدار $\dfrac{g'(x)f'(x)-g(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$ به‌ازای $x=9$ کدام است؟

(۱) $\frac{5}{6}$ (۲) $-\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{7}{6}$ (۴) $-\frac{7}{6}$

۲۴ - معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع $h(x)=(x^2+3x+1)^7$ در نقطه‌ای به طول $x=-1$ واقع بر آن کدام است؟

(۱) $y-7x=-6$ (۲) $y+6x=7$ (۳) $y+6x=-7$ (۴) $y-7x=6$

۲۵ - تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}|x^2-4| & ,x>1\\ \sqrt[3]{x} & ,x\leq 1\end{cases}$ در .... نقطه مشتق و در .... نقطه خط مماس ندارد.

(۱) ۴،۴ (۲) ۳،۴ (۳) ۳،۳ (۴) ۲،۳

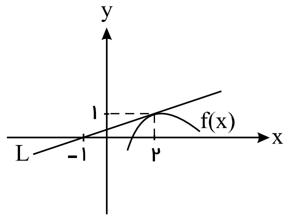
۲۶- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+1 & , -2\le x<0 \\ \sqrt[3]{x-1} & , 0\le x<2 \\ [x]-1 & , 2\le x\le 4 \end{cases}$ در دامنهٔ خود در کدام نقاط مشتق‌ناپذیر است؟

① $\{-1,0,1,2\}$ ② $\{0,\frac{1}{2},2,3,4\}$ ③ $\{0,1,2,3,4\}$ ④ $\{1,\frac{1}{2},2,3\}$

۲۷- اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x$ باشد، خط مماس نمودار تابع gof در چند نقطه موازی محور طول‌ها است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ صفر

۲۸- در شکل مقابل خط L بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به‌طول $x=2$ مماس است. شیب خط مماس بر نمودار تابع $g(x)=\sqrt{f(\sqrt{x})}$ در $x=4$ کدام است؟

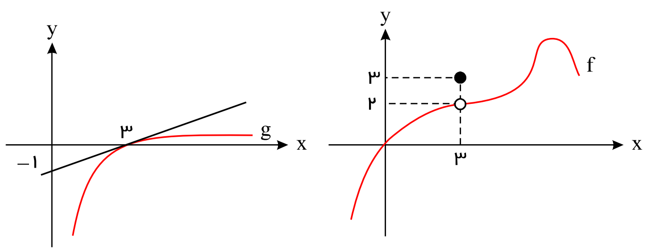


① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{24}$ ④ $\frac{1}{48}$

۲۹- اگر $f(x)=\sqrt{\frac{x[x]}{|1-x|}}$ باشد، آنگاه حاصل $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

① $\frac{1}{2}$ ② ۲ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ -2

۳۰- نمودار تابع f و g به‌صورت زیر است. مقدار مشتق تابع $f\cdot g$ در $x=3$ کدام است؟



① ۱
② $\frac{2}{3}$
③ $\frac{4}{3}$
④ صفر

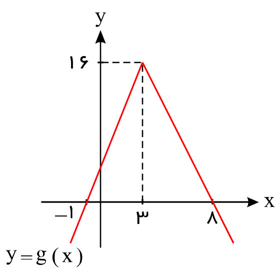
۳۱- اگر $\frac{f(x)}{2}=x-|x|$ و $g(x)=2x+2|x|$ باشند، مشتق تابع $(fog)(x)$ کدام است؟

① ۱ ② صفر ③ -1 ④ وجود ندارد.

۳۲- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x-1} & ; x\ge 2 \\ -x^2+ax+b & ; x<2 \end{cases}$، روی مجموعهٔ اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

① -2 ② -1 ③ ۱ ④ ۲

۳۳- اگر $f(x)=(\frac{x}{x+1})^3$ و نمودار تابع $g(x)$ به‌شکل زیر باشد، آنگاه مشتق تابع $y=(gof)(x)$ در $x=1$ کدام است؟



① -1 ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ ۱

ریاضی 3

۳۴- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{-x-۱}{\sqrt{x}}$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(\frac{۱}{۴}+h)-f(\frac{۱}{۴})}{h}$، کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۵- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{۴x-۵}{x+۱}$ و دامنهٔ $[۰,۸]$، خط مماس بر نمودار آن موازی پاره‌خطی است که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل کند. این خط مماس، محور yها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

(۱) -۲ (۲) $-۱/۵$ (۳) -۱ (۴) $-۰/۵$

پاسخنامه تشریحی

۱ -

الف)

$$f(x)=\left(\frac{x}{۲x-۱}\right)^{۵}\rightarrow f'(x)=۵\left(\frac{x}{۲x-۱}\right)^{۴}\left(\frac{۱(۲x-۱)-۲(x)}{(۲x-۱)^{۲}}\right)$$

ب)

$$g(x)=x^{۲}(\sqrt{x+۱})\rightarrow g'(x)=۲x(\sqrt{x+۱})+\frac{۱(۱)}{۲\sqrt{x+۱}}x^{۲}$$

۲ - از مشتق حاصل‌ضرب استفاده می‌کنیم. $(y=uv\rightarrow y'=u'v+v'u)$

$$y=\frac{۱}{x}(۲\sqrt{x}-۱)^{۴}\rightarrow y'=-\frac{۱}{x^{۲}}(۲\sqrt{x}-۱)^{۴}+۴(۲\sqrt{x}-۱)^{۳}(۲(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}))\frac{۱}{x}$$

۳ -

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}=\frac{f(۷)-f(۲)}{۷-۲}=\frac{\sqrt{۹}-\sqrt{۴}}{۵}=\frac{۳-۲}{۵}=\frac{۱}{۵}$$

۴ -

الف) مشتق حاصل ضرب می باشد. $(y=uv\rightarrow y'=uv'+v'u)$

$$f(x)=(x^{۲}+۱)^{۳}(۵x-۱)\rightarrow f'(x)=۳(x^{۲}+۱)^{۲}(۲x)(۵x-۱)+۵(x^{۲}+۱)^{۳}$$

ب)

$$g(x)=\frac{۹x-۲}{\sqrt{x}}\rightarrow g'(x)=\frac{۹(\sqrt{x})-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۹x-۲)}{x}$$

۵ - برای محاسبهٔ مشتق راست سراغ ضابطهٔ پایین و برای محاسبهٔ مشتق چپ سراغ ضابطهٔ بالا می‌رویم.

$$\left.\begin{array}{l}x\geq ۰\rightarrow f(x)=x\rightarrow f'_{+}(۰)=۱\\ x<۰\rightarrow f(x)=x^{۲}\rightarrow f'(x)=۲x\rightarrow f'_{-}(۰)=۰\end{array}\right\}\rightarrow f'_{+}(۰)\neq f'_{-}(۰)$$

۶ - گزینه ۴ نقطه‌ای به طول $x=\alpha$ را روی منحنی به معادله‌ی $y=(x+۲)^{۲}$ در نظر می گیریم.

$$۱)x=\alpha\xrightarrow{\text{تابع}}y=(\alpha+۲)^{۲}\rightarrow A\left|\begin{array}{l}\alpha\\(\alpha+۲)^{۲}\end{array}\right.$$

$$۲)\ y'=۲(x+۲)\rightarrow m_{\text{مماس}}=۲(\alpha+۲)$$

۳) معادله‌ی خط مماس : $y-(\alpha+۲)^{۲}=۲(\alpha+۲)(x-\alpha)$

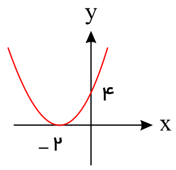
حال، در معادله‌ی خط مماس نقطه‌ی $\left|\begin{array}{l}۱\\۰\end{array}\right.$ را صدق می‌دهیم.

$$۰-(\alpha+۲)^{۲}=۲(\alpha+۲)(۱-\alpha)\rightarrow ۲(\alpha+۲)(۱-\alpha)+(\alpha+۲)^{۲}=۰$$

$$\rightarrow\underbrace{(\alpha+۲)}_{\text{فاکتور}}(۲(۱-\alpha)+\alpha+۲)=۰\rightarrow(\alpha+۲)(-\alpha+۴)=۰$$

$$\rightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha=-۲\rightarrow \text{نقطه‌ی تماس}:\left|\begin{array}{l}-۲\\۰\end{array}\right.\\ \alpha=۴\rightarrow \text{نقطه‌ی تماس}:\left|\begin{array}{l}۴\\۳۶\end{array}\right.\rightarrow \text{مجموع طول و عرض}=۴+۳۶=۴۰\end{array}\right.$$

نقطه‌ی تماس $\left|\begin{array}{l}-۲\\۰\end{array}\right.$ قابل قبول نمی‌باشد زیرا در این نقطه، تابع $y=(x+۲)^{۲}$ بر محور xها مماس است و محور xها، خط مماس بر منحنی تابع است که محور xها را قطع نکرده بلکه بر آن منطبق است.به شکل $y=(x+۲)^{۲}$ توجه کنید:



۷ - گزینه ۲

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱} = \frac{۱۶+۲a-(۱+a)}{۳} = \frac{۱۵+a}{۳}$$

$$x=۱ \text{ آهنگ لحظه‌ای در } = f'(۱) = ۲x + \frac{a}{۲\sqrt{x}} = ۲ + \frac{a}{۲}$$

$$\text{آهنگ متوسط} = ۲ \times \text{آهنگ لحظه‌ای} \quad \to \frac{۱۵+a}{۳} = ۲(۲+\frac{a}{۲}) \to \frac{۱۵+a}{۳} = ۴+a$$

$$\to ۱۵+a = ۱۲+۳a \to ۲a = ۳ \to a = \frac{۳}{۲}$$

۸ - گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)}$

$$\lim_{x\to ۴}\frac{f(۴)-f(x)}{۴-x} = \lim_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴} = f'(۴)$$

$$f(x) = (\frac{\sqrt{x}}{x-۳})^۳ \to f'(x) = ۳(\frac{\sqrt{x}}{x-۳})^۲(\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(x-۳)-۱(\sqrt{x})}{(x-۳)^۲})$$

$$\to f'(۴) = ۳(\frac{۲}{۱})^۲(\frac{\frac{۱}{۴}(۱)-۲}{۱}) = ۳(۴)(\frac{-۷}{۴}) = -۲۱$$

۹ - گزینه ۱ ابتدا معادله‌ی خط مماس را می‌نویسیم.

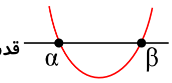
$$۱)\ x=۱ \xrightarrow{\text{تابع}} y = ۱-۵+۷+۱ = ۴ \to A\Big|\begin{matrix}۱\\۴\end{matrix}$$

$$۲)\ y' = ۳x^۲ - ۱۰x + ۷ \to m_{\text{مماس}} = ۳-۱۰+۷ = ۰$$

$$۳)\ y-۴ = ۰(x-۱) \to y = ۴ :\ \text{معادله‌ی خط مماس}$$

اکنون برای محاسبه‌ی طول وتری که خط $y=۴$ روی سهمی داده شده ایجاد می‌کند باید معادله‌ی تلاقی را تشکیل دهیم.

$$x^۲-۵x+۶ = ۴ \to x^۲-۵x+۲ = ۰ :\ \text{معادله‌ی تلاقی}$$

دقت کنید که طول وتر ایجاد شده  قدر مطلق تفاضل ریشه‌های معادله‌ی تلاقی است.

$$|\alpha-\beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{b^۲-۴ac}}{|۱|} = \sqrt{۲۵-۸} = \sqrt{۱۷}$$

۱۰ - گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{y=f(u) \to y' = u'\cdot f'(u)}$

ابتدا حد عبارت داده شده را محاسبه کرده و اطلاعات مورد نظر را بدست می‌آوریم.

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۲+h)+۳}{h} = \frac{f(-۲)+۳}{۰}$$

چون جواب حد، عدد شده است پس این کسر $\frac{۰}{۰}$ بوده که پس از رفع ابهام جوابش عدد شده است.

$$f(-۲)+۳ = ۰ \to f(-۲) = -۳$$

$$\text{پس} : \lim_{h\to ۰}\frac{f(-۲+h)+۳}{h} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{HOP} \lim_{h\to ۰}\frac{f'(-۲+h)}{۱} = f'(-۲) = \frac{۱}{۲}$$

$$y = x^۲\cdot f(x) \to y' = ۲x\cdot f(x) + x^۲\cdot f'(x) \to y'(-۲) = (-۴)f(-۲) + ۴f'(-۲)$$

$$\to y'(-۲) = (-۴)(-۳) + ۴(\frac{۱}{۲}) = ۱۲+۲ = ۱۴$$

۱۱ - گزینه ۳ اگر دو تابع f و g برهم مماس باشند معادله‌ی تلاقی آن‌ها ریشه‌ی مضاعف دارد.

$$\begin{cases} y = \frac{۱}{۲}(x-b) \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \frac{۱}{۲}(x-b) = \sqrt{x} \to x-b = ۲\sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۲+b^۲-۲bx = ۴x$$

$$\to x^۲-۲bx-۴x+b^۲ = ۰ \to x^۲-۲(b+۲)x+b^۲ = ۰ :\text{معادله‌ی تلاقی}$$

$$\text{شرط ریشه‌ی مضاعف} : \Delta = ۰ \to b^۲-۴ac = ۰ \to ۴(b+۲)^۲ - ۴b^۲ = ۰ \to (b+۲)^۲ - b^۲ = ۰$$

$$\to b^۲+۴+۴b-b^۲ = ۰ \to ۴b = -۴ \to b = -۱$$

۱۲ - گزینه ۱

$$f(x)=\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{3x+1}}\right)^3 \Rightarrow f'(x)=3\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{3x+1}}\right)^2\left(\frac{2x(\sqrt{3x+1})-\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}(x^2+1)}{(\sqrt{3x+1})^2}\right)$$

$$\Rightarrow f'(1)=3\left(\frac{2}{2}\right)^2\left(\frac{2(2)-\frac{3}{4}(2)}{4}\right)=3\left(\frac{5}{8}\right)=\frac{15}{8}$$

۱۳ - گزینه ۲ دو تابع را تلاقی می‌دهیم و معادلهٔ تلاقی نباید ریشهٔ حقیقی داشته باشد.

$$\begin{cases} f(x)=mx^2+1 \\ g(x)=mx \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} mx^2+1=mx \longrightarrow mx^2-mx+1=0 \ : \ \text{معادله تلاقی}$$

$$\Delta<0 \longrightarrow b^2-4ac<0 \longrightarrow m^2-4m<0 \longrightarrow m(m-4)<0$$

m	$-\infty$		0		4		$+\infty$
عبارت <0		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\longrightarrow 0<m<4$$

توجه کنید اگر $m=0$ باشد دو تابع به‌صورت $f(x)=1$ و $g(x)=0$ در می‌آیند که هم‌دیگر را قطع نمی‌کنند بنابراین $0\leq m<4$ است.

۱۴ - گزینه ۲ تابع f یک تابع خطی است و می‌توان آن را به‌صورت $f(x)=ax+b$ نشان داد.

$$f(x)=ax+b \rightarrow \begin{cases} f(2x)=2ax+b \\ f(2)=2a+b \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(2x)-f(2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2ax+b-2a-b}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2a(x-1)}{(x-1)}=2a=4 \rightarrow a=2$$

دقت کنید چون تابع f از نقطهٔ $\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ می‌گذرد بنابراین معادلهٔ آن به‌صورت $f(x)=2x+1$ است پس $f(1)=3$ است و چون دو تابع f و g در $x=2$ برهم مماس هستند پس $f'(2)=g'(2)$ است و از طرفی $f'(x)=2$ پس $f'(2)=2$ است درنتیجه $f(1)+g'(2)=3+2=5$ است.

۱۵ - گزینه ۳ به‌ازای $x=1$، $x-1$ صفر می‌شود پس فقط کافی است از $x-1$ مشتق گرفته و در بقیهٔ عبارت، $x=1$ را جایگزین کنیم.

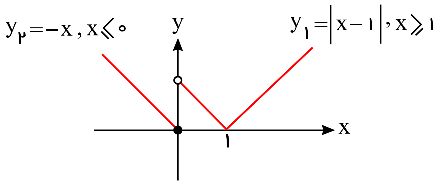
$$f(x)=(x-1)\sqrt{2x^3+6x^2} \rightarrow f'(1)=1\times\sqrt{2+6}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

۱۶ - گزینه ۳

$$\lim_{x\to 1}\frac{f^2(x)-f^2(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to 1}(f(x)+f(1))$$

$$=(f'(1)(2f(1)))=(3)(2(-2))=-12$$

۱۷ - گزینه ۲ نمودار تابع را رسم می‌کنیم. مطابق شکل تابع در $x=0$ از راست پیوسته نیست پس $f'_+(0)$ موجود نیست و تابع مشتق‌پذیر نمی‌باشد. (گزینه‌های ۱ و ۳ حذف می‌شوند.) به‌علاوه در $x=1$ نقطهٔ گوشه داریم و تابع نمی‌تواند در این نقطه مشتق‌پذیر باشد (گزینهٔ ۴ حذف می‌شود.) در $x=0$ مشتق چپ وجود دارد پس اگرچه $f'(0)$ موجود نیست ولی تابع، در فاصلهٔ $(-\infty,0]$ مشتق‌پذیر است.



۱۸ - گزینه ۲ در توابع چندضابطه‌ای باید مشتق‌پذیری‌های تک‌تک ضابطه‌ها را بررسی کرده و مشتق‌پذیری نقطهٔ مرزی را هم بررسی کنیم.

در مورد ضابطهٔ بالایی واضح است که در دامنه‌اش در همه‌جا مشتق‌پذیر است. اما درمورد ضابطهٔ پایینی، می‌دانیم که توابع قدرمطلقی در ریشه‌های سادهٔ داخل قدرمطلق، مشتق‌ناپذیرند. پس:

$$y_2=|(\underbrace{x-2}_{\substack{x=2\\ \text{ریشه ساده}}})(\underbrace{x+3}_{\substack{x=-3\\ \text{ریشهٔ مضاعف}}})^2|$$

لذا این تابع فقط یک ریشهٔ سادهٔ $x=2$ دارد که آن هم جزء دامنهٔ این ضابطه $(x<-1)$ نیست. پس این ضابطه هم هیچ نقطهٔ مشتق‌ناپذیری ندارد. نهایتاً می‌رسیم به بررسی نقطهٔ مرزی یعنی $x=-1$، ابتدا پیوستگی را در این نقطه بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(-1)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}x^3=(-1)^3=-1 \\ \lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}|(x-2)(x+3)^2|=|(-1-2)(-1+3)^2|=12 \end{cases}$$

پس تابع در این نقطه پیوسته نیست و قطعاً مشتق‌ناپذیر است. لذا تابع فقط در یک نقطه مشتق‌ناپذیر است.

۱۹ - گزینه ۴ شرط این‌که تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن است که تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع در $x=a$ باهم برابر باشند.

$$\underset{\text{پیوستگی}}{x=۱}\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{ax+b}{\sqrt{x}}=a+b\\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(bx^۳-x+۶)=b+۵\Rightarrow a+b=b+۵\Rightarrow a=۵\\ f(۱)=a+b\end{cases}$$

از طرفی: $f'(۱^+)=f'(۱^-)\to \dfrac{a(\sqrt{x})-\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}(ax+b)}{x}=۳bx^۲-۱$

$$\xrightarrow[x=۱]{a=۵}\dfrac{۵-\dfrac{۱}{۲}(۵+b)}{۱}=۳b-۱\to ۵-\dfrac{۵}{۲}-\dfrac{b}{۲}=۳b-۱\to\dfrac{۷b}{۲}=\dfrac{۷}{۲}\to b=۱$$

پس $a-b=۵-۱=۴$ است.

۲۰ ـ گزینه ۴ از عبارت $g'(x)f(x)-f'(x)g(x)$ باید متوجه شویم که این عبارت، صورت کسر مشتق $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ است زیرا:

$$(\frac{g(x)}{f(x)})'=\frac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{(g(x))^۲}$$

پس عبارت $g(x)$ را بر $f(x)$ تقسیم می‌کنیم؛ داریم:

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^۸-۱}{(x^۲+۱)(x^۴+۱)}=\frac{(x^۴+۱)(x^۴-۱)}{(x^۲+۱)(x^۴+۱)}=\frac{(x^۲+۱)(x^۲-۱)}{(x^۲+۱)}=x^۲-۱$$

حال از دو طرف مشتق می‌گیریم:

$$\frac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{(f(x))^۲}=۲x$$

و در نهایت x را مساوی یک قرار می‌دهیم:

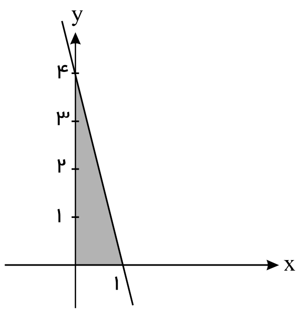
$$\frac{g'(۱)f(۱)-f'(۱)g(۱)}{(f(۱))^۲}=۲\xrightarrow{f(۱)=۴}g'(۱)f(۱)-f'(۱)g(۱)=۲\times ۴^۲=۳۲$$

۲۱ ـ گزینه ۴ شیب نیم‌مماس چپ در $x=۱$ برابر با مشتق چپ در این نقطه است، پس داریم:

$$f'(۱^-)=-۴x=-۴\to\begin{cases}A\left|\begin{matrix}۱\\ ۰\end{matrix}\right.\\ m=-۴\end{cases}\to y-۰=-۴(x-۱)\to y=-۴x+۴$$

یک بار به x و بار دیگر به y صفر می‌دهیم:

$$x=۰\to y=۴, y=۰\to x=۱$$



$$\to S=\frac{۴\times ۱}{۲}=۲$$

۲۲ ـ گزینه ۴ ابتدا معادلهٔ خط مماس بر منحنی $y=\dfrac{x}{x+۴}$ در $x=۱$ را می‌یابیم.

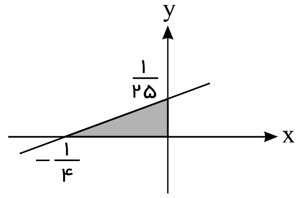
$$۱)\ x=۱\to y=\frac{۱}{۵}\to A(۱,\frac{۱}{۵})$$

$$۲)\ y'=\frac{۱(x+۴)-۱\times x}{(x+۴)^۲}=\frac{۴}{(x+۴)^۲}\to \text{شیب مماس}\ m=y'(۱)=\frac{۴}{۲۵}$$

$$۳)\ y-\frac{۱}{۵}=\frac{۴}{۲۵}(x-۱)\to y=\frac{۴}{۲۵}x-\frac{۴}{۲۵}+\frac{۱}{۵}\to y=\frac{۴}{۲۵}x+\frac{۱}{۲۵}$$

یک بار به x و بار دیگر به y صفر می‌دهیم:

$$x=۰\to y=\frac{۱}{۲۵}\ ,\ y=۰\to\frac{۴}{۲۵}x+\frac{۱}{۲۵}=۰\to x=-\frac{۱}{۴}$$



$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{25}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{200}=0/005$$

۲۳ - گزینه ۳

با توجه به مشتق کسر داریم:

$$\left(\frac{g(x)}{f'(x)}\right)'=\frac{g'(x)f'(x)-g(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

حال $\frac{g(x)}{f'(x)}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=\frac{3x+1}{2x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{3(2x+1)-2(3x+1)}{(2x+1)^2}=\frac{1}{(2x+1)^2}$$

$$y=\frac{g(x)}{f'(x)}=\frac{\frac{x+\sqrt{x}}{(2x+1)^2}}{\frac{1}{(2x+1)^2}}=x+\sqrt{x}\Rightarrow y'=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow y'(9)=1+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$$

۲۴ - گزینه ۴

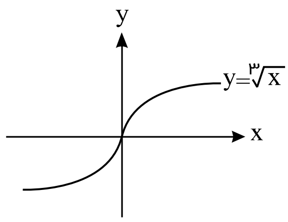
$$1)\ x=-1\xrightarrow{\text{تابع}}y=-1\rightarrow\left|\begin{matrix}-1\\-1\end{matrix}\right.$$

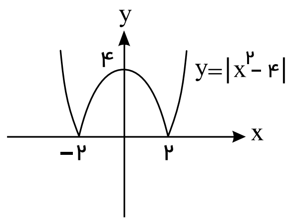
$$2)\ h'(x)=7(x^2+3x+1)^6(2x+3)\xrightarrow{x=-1}m_{\text{مماس}}=7(-1)^6(1)=7$$

$$3)\ y+1=7(x+1)\rightarrow y+1=7x+7\rightarrow y-7x=6$$

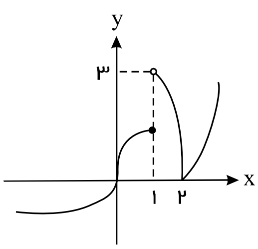
۲۵ - گزینه ۴

نمودار توابع $y=\sqrt[3]{x}$ و $y=|x^2-4|$ بدین صورت هستند.





از ترکیب دو شکل داریم:



در $x=2$ تابع دارای مشتق چپ و راست برابر نیست، بنابراین در $x=2$، مشتق و خط مماس وجود ندارد.

در $x=1$ پیوسته نیست، پس مشتق و خط مماس ندارد.

در $x=0$ مماس عمودی دارد (به‌خاطر $\sqrt[3]{x}$) و مشتق تابع برابر بی‌نهایت است، پس مشتق ندارد، اما مماس دارد.

پس تابع f در ۳ نقطه مشتق ندارد و در دو نقطه خط مماس ندارد.

۲۶ - گزینه ۳ ۱- بررسی ضابطه‌ها:

ضابطهٔ اول که $(x+1)^2$ بوده و در تمام نقاط مشتق‌پذیر است و ضابطهٔ دوم $\sqrt[3]{x-1}$ است که در نقطهٔ $x=1$ دارای مماس قائم بوده و مشتق برابر بی‌نهایت است و در $x=1$ مشتق‌ناپذیر است. ضابطهٔ سوم $1-[x]$ است که در نقاط ۳ و ۴ ناپیوسته و بنابراین مشتق‌ناپذیر است.

۲- بررسی نقاط مرزی:

در $x=0$ حد ضابطهٔ بالا برابر یک و حد ضابطهٔ پایین -1 است. پس در $x=0$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. در $x=2$ ضابطهٔ دوم و سوم دارای عرض ۱ هستند ولی مشتق ضابطهٔ بالا مخالف صفر و مشتق ضابطهٔ پایین صفر است. پس $x=2$ یک نقطهٔ گوشه (دارای مشتق چپ و راست متفاوت) و مشتق‌ناپذیر است.

$\{0,1,2,3,4\}=$ نقاط مشتق‌ناپذیر

۲۷ - گزینه ۱ می‌دانیم $(gof)'(x)=f'(x)\cdot g'(f(x))$ است.

برای آنکه خط مماس بر منحنی تابع gof موازی محور طول‌ها باشد، باید شیب آن برابر صفر باشد، پس باید معادلهٔ $(gof)'(x)=0$ را حل کنیم.

$$f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\quad,\quad g(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-6x\Rightarrow g'(x)=x^2-x-6$$

$$(gof)'(x)=f'(x)\cdot g'(f(x))=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times g'(\sqrt{x})=\frac{g'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}=0\Rightarrow g'(\sqrt{x})=0$$

$$\Rightarrow(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}-6=0\Rightarrow(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)=0\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=-2 & \text{غ ق ق}\\ \sqrt{x}=3\Rightarrow x=9\end{cases}$$

پس معادلهٔ $(gof)'(x)=0$ فقط یک جواب دارد.

۲۸ - گزینه ۳ می‌دانیم اگر $y=f(x)$ باشد، آن‌گاه $y'=u'\cdot f'(u)$ است.

ابتدا شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $(2,1)$ و $(-1,0)$ را می‌یابیم.

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-1}{-1-2}=\frac{1}{3}$$

شیب خط مماس بر تابع f در نقطهٔ $x=2$ یعنی $f'(2)$ برابر $\frac{1}{3}$ است و داریم:

$$f(2)=1\quad,\quad f'(2)=\frac{1}{3}$$

حال برای یافتن شیب خط مماس بر تابع $g(x)=\sqrt{f(\sqrt{x})}$ در نقطهٔ $x=4$ داریم:

$$g'(x)=\frac{(f(\sqrt{x}))'}{2\sqrt{f(\sqrt{x})}}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{f(\sqrt{x})}}\Rightarrow g'(4)=\frac{\frac{1}{4}f'(2)}{2\sqrt{f(2)}}=\frac{f'(2)}{8\sqrt{f(2)}}\Rightarrow g'(4)=\frac{\frac{1}{3}}{8\sqrt{1}}=\frac{1}{24}$$

۲۹ - گزینه ۳ توجه کنید که $f'(2^+)=\lim\limits_{h\to0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ است و توجه کنید که $[2^+]=2$ است و داخل قدرمطلق یعنی $x-1$ وقتی $x\to2^+$، منفی است.

$$f(x)=\sqrt{\frac{2x}{x-1}}\longrightarrow f'(x)=\frac{1\left(\frac{2(x-1)-1(2x)}{(x-1)^2}\right)}{2\sqrt{\frac{2x}{x-1}}}$$

$$\longrightarrow f'(2^+)=\frac{\left(\frac{2-4}{1}\right)}{2\sqrt{4}}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

۳۰ - گزینه ۲ وقتی عبارتی شامل صفر باشد یعنی به‌صورت ضرب $(x-a)$ در بقیهٔ عوامل باشد آنگاه برای محاسبهٔ مشتق در $x=a$ کافی است فقط از عامل صفر مشتق بگیریم و در حد بقیهٔ عوامل غیرصفر در نقطهٔ مورد نظر ضرب کنیم.

چون $g(3)=0$ است کافی است $g'(3)$ که شیب خط مماس گذرنده از دو نقطهٔ $A\begin{vmatrix}0\\-1\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}3\\0\end{vmatrix}$ را به‌دست آوریم و در $\lim\limits_{x\to3}f(x)$ ضرب کنیم.

$$\begin{cases}g'(3)=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{-1-0}{0-3}=\frac{1}{3}\\ \lim\limits_{x\to3}f(x)=2\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{3}\times2=\frac{2}{3}$$

۳۱ - گزینه ۲

$$f(x)=2x-2|x|=\begin{cases}0 & x\ge0\\ 4x & x<0\end{cases}\quad,\quad g(x)=2x+2|x|=\begin{cases}4x & x\ge0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$x\ge0\longrightarrow fog(x)=0\longrightarrow \text{مشتق}=0$$

$$x<0\longrightarrow fog(x)=4(0)=0\longrightarrow \text{مشتق}=0$$

۳۲ - گزینه ۲ شرط اینکه تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن است که تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع f در $x=a$ با هم برابر باشند.

$$\text{پیوستگی}:\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{۱}{x-۱}=۱\\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}(-x^۲+ax+b)=-۴+۲a+b\\ f(۲)=۱\end{cases}$$

پس $-۴+۲a+b=۱$ و درنتیجه $۲a+b=۵$ است.

$$f'(۲^+)=f'(۲^-)\to\frac{-۱}{(x-۱)^۲}=-۲x+a\to -۱=-۴+a\to a=۳$$

$$\xrightarrow{۲a+b=۵} ۶+b=۵\to b=-۱$$

۳۳ - گزینه ۳ می‌دانیم $y=(gof)(x)\to y'=f'(x)\cdot g'(f(x))$ است.

$$y=(gof)(x)\to y'=f'(x)\cdot g'(f(x))\to y'=۳(\frac{x}{x+۱})^۲(\frac{۱(x+۱)-۱(x)}{(x+۱)^۲})g'((\frac{x}{x+۱})^۳)$$

$$\xrightarrow{x=۱} y'(۱)=۳(\frac{۱}{۴})(\frac{۱}{۴})g'(\frac{۱}{۸})\to y'(۱)=\frac{۳}{۱۶}g'(\frac{۱}{۸})$$

چون شاخهٔ سمت چپ تابع g حالت خطی داشته و مشتق آن برابر شیب خط است پس $g'(\frac{۱}{۸})=\frac{۱۶}{۴}=۴$ است.

$$\text{پس}: y'(۱)=\frac{۳}{۱۶}(۴)=\frac{۳}{۴}$$

۳۴ - گزینه ۳ می‌دانیم $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$ است پس عبارت خواسته‌شده $f'(\frac{۱}{۴})$ است.

$$f(x)=\frac{-x-۱}{\sqrt{x}}\to f'(x)=\frac{-۱(\sqrt{x})-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(-x-۱)}{x}\to f'(\frac{۱}{۴})=\frac{-\frac{۱}{۲}-(-\frac{۵}{۴})}{\frac{۱}{۴}}=\frac{\frac{-۱}{۲}+\frac{۵}{۴}}{\frac{۱}{۴}}=\frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۱}{۴}}=۳$$

۳۵ - گزینه ۳ ابتدا شیب پاره‌خطی که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل می‌کند را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}A\left|\begin{matrix}۰\\-۵\end{matrix}\right.\\ B\left|\begin{matrix}۸\\۳\end{matrix}\right.\end{cases}\to m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{-۵-۳}{۰-۸}=\frac{-۸}{-۸}=۱\xrightarrow{\text{موازی}} m_{\text{مماس}}=۱$$

کافی است از تابع، مشتق گرفته و برابر یک قرار دهیم.

$$y'=\frac{۴(x+۱)-۱(۴x-۵)}{(x+۱)^۲}\to ۱=\frac{۹}{(x+۱)^۲}\to (x+۱)^۲=۹\to\begin{cases}x+۱=۳\to x=۲\xrightarrow{\text{تابع}} y=۱\to C\left|\begin{matrix}۲\\۱\end{matrix}\right.\\ x+۱=-۳\to x=-۴\ (\text{در بازه نیست.})\ \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

اکنون باید معادلهٔ خط مماس را در نقطهٔ C و با شیب یک بنویسیم.

$$y-y_C=m(x-x_C)\to y-۱=۱(x-۲)\xrightarrow{x=۰} y=-۱$$

پاسخنامه کلیدی

۶ - ۴	۱۱ - ۳	۱۶ - ۳	۲۱ - ۴	۲۶ - ۳	۳۱ - ۲
۷ - ۲	۱۲ - ۱	۱۷ - ۲	۲۲ - ۴	۲۷ - ۱	۳۲ - ۲
۸ - ۴	۱۳ - ۲	۱۸ - ۲	۲۳ - ۳	۲۸ - ۳	۳۳ - ۳
۹ - ۱	۱۴ - ۲	۱۹ - ۴	۲۴ - ۴	۲۹ - ۳	۳۴ - ۳
۱۰ - ۴	۱۵ - ۳	۲۰ - ۴	۲۵ - ۴	۳۰ - ۲	۳۵ - ۳