نام و نام خانوادگی: پایه: دهم

نام آزمون: ریاضی ۱ به ترتیب از فصل ۱ تا ۵

تاریخ آزمون: ۱۳۹۸/۱۲/۱۵

فاخران

۱ - مجموعه‌های $R-[۰,۱)$ و $R-(-۱,۱)$ را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

۲ - درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) از اشتراک دو مجموعه‌ی متناهی و نامتناهی، مجموعه‌ای نامتناهی بوجود می‌آید.

ب) می‌توان دو مجموعه نامتناهی یافت که یکی زیرمجموعه دیگری باشد.

پ)اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، A ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد.

ت) اجتماع مجموعه‌ای نامتناهی با هر مجموعه‌ای، مجموعه‌ای نامتناهی حاصل می‌کند.

ث) تهی یک مجموعه نامتناهی است.

۳ - از ۷۲ نفر مسافر در یک هتل، ۲۳ نفر تاجر هستند و ۱۲ نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند. اگر ۸ نفر از این تاجرین برای اولین بار سفر کرده باشند، چند نفر نه تاجرند و نه برای اولین بار سفر کرده‌اند؟

① ۵۲ ② ۴۵ ③ ۳۷ ④ ۳۵

۴ - مجموعه A دارای ۳۶ عضو و مجموعه B دارای ۲۸ عضو است. اشتراک آنها ۱۵ عضو دارد. اگر ۱۶ عضو از مجموعه A حذف شود، از اشتراک آنها ۹ عضو حذف می‌شود، تعداد عضوهای اجتماع مجموعه جدید با مجموعه B، کدام است؟

① ۴۰ ② ۴۱ ③ ۴۲ ④ ۴۵

۵ - اگر جملات سوم و هفتم یک الگوی خطی برابر با ۸ و ۲۸ باشند، چندمین جمله ی این الگو برابر با ۵۳ خواهد بود؟

۶ - اگر $a_n = ۵ + (n-۱) \times ۳$ و $b_n = ۷ + (n-۱) \times ۲$ باشد. جمله چندم این دو دنباله با هم برابر است؟

۷ - بین اعداد ۱۲ و ۱۹۲ سه واسطه هندسی درج کنید.

۸ - یک صخره اورانیومی بزرگ به جرم $۲۰۰kg$ ، هر روز $\frac{۱}{۴}$ جرم خود را از دست می‌دهد، پس از چند روز جرم این صخره به $۵۰kg$ می‌رسد؟

۹ - اگر اشتراک دو بازه $(x^۲+۲,۸)$ و $(۳,۲x+۱)$ تهی باشد، آنگاه x کدام است؟

۱۰ - فرض کنید $A=[-۳,۲)$ و $B=(-۱,۳]$ و $\mathbb{R}$ مجموعه مرجع باشد؛ حاصل $(A\cap B)'$ را به صورت بازه بدست بیاورید.

۱۱ - اگر A و B دو مجموعهٔ ناتهی از مجموعه مرجع U باشند، به طوریکه $n(U)=۶۵$, $n(A')=۲۵$, $n(A\cap B)=۲۰$, $n(A'\cap B)=۱۰$، تعداد اعضای مجموعهٔ $A\cup B$ کدام است؟

① ۴۵ ② ۵۰ ③ ۵۵ ④ ۶۰

۱۲ - بین دو عدد ۳ و ۹۶ چهار واسطه‌ی هندسی درج کرده‌ایم. مجموع واسطه‌های اول و سوم کدام است؟ (عدد ۳ ، جمله‌ی اول است.)

① ۱۸ ② ۳۶ ③ ۴۲ ④ ۳۰

۱۳ - اگر $n(A-B)=۲$، $n(B-A)=۸$ و $n(B)=۳n(A)$ باشد، $n(A\cup B)$ کدام است؟

① ۱۲ ② ۹ ③ ۱۰ ④ ۱۱

۱۴ - اگر $(-۲,۳]\cup(m,۶]=(-۲,۶]$ باشد، محدوده‌ی m کدام است؟

① $۳<m$ ② $-۲<m<۴$ ③ $-۲<m\leq ۳$ ④ $m\leq -۲$

۱۵ - در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی سوم برابر ۲۰ می‌باشد. اگر جمله‌ی اول ۲ برابر قدرنسبت باشد، جمله‌ی پانزدهم این دنباله کدام است؟

① ۶۵ ② ۷۰ ③ ۷۵ ④ ۸۰

۱۶ - فرض کنید θ زاویه‌ای در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی باشد و $\sin\theta = \frac{۲\sqrt{۶}}{۷}$، مقدار $\tan\theta$ را بدست آورید.

۱۷ - خطی از نقطه‌ی $A(۲,۳)$ گذشته و محور xها را با زاویه‌ی ۴۵° قطع می‌کند، عرض نقطه‌ای به طول ۴ بر روی این خط کدام است؟

۱۸ - درستی اتحاد زیر را بررسی کنید.

$$\frac{(۱+\tan^۲\alpha)\cos^۲\alpha}{\cot\alpha}=\tan\alpha$$

۱۹ - درستی اتحاد زیر را بررسی کنید.

$$(\frac{۱}{\cos\alpha}+\tan\alpha)(۱-\sin\alpha)=\cos\alpha$$

۲۰ - جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. $(۰<\alpha<۹۰)$

الف) تنها زاویه α که sin و cos برابر دارد .... است.

ب) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ، تانژانت زاویه‌ی .... است.

پ) سینوس زاویه‌ی .... برابر $\cos ۳۰^\circ$ است.

۲۱ - اگر داشته باشیم $\sin\theta\cot\theta<۰$ و $\frac{\cos^۲\theta}{\sin\theta}<۰$ ، آنگاه θ در کدام ربع است؟

۲۲ - با فرض $\cot\alpha=۲$، حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

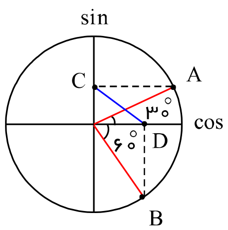
$$\frac{۲\cos\alpha-\sin\alpha}{۳\sin\alpha+\cos\alpha}$$

۲۳ - با در دست داشتن $\cot\alpha=\frac{۲}{۳}$ ، $\cos\alpha$ را بدست آورید.

۲۴ - اندازه‌ی دو قطر از متوازی‌الاضلاع ۱۲ و $۸\sqrt{۳}$ واحد است. این دو قطر با زاویه‌ی ۶۰ درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

① ۴۸ ② ۵۴ ③ ۶۴ ④ ۷۲

۲۵ - طول پاره‌خط CD کدام است؟



① $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ② $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

③ $\frac{۱}{۲}$ ④ ۱

۲۶ - اگر $۱۲۰\le\alpha\le۱۵۰$ باشد و $\cos\alpha=۲m-۱$ باشد آنگاه حدود تغییرات m کدام است؟

① $-۱\le m\le۱$ ② $\frac{۱+\sqrt{۳}}{۲}\le m\le\frac{۱}{۲}$ ③ $\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴}\le m\le\frac{۱}{۴}$ ④ $\frac{۱-\sqrt{۳}}{۴}\le m\le\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

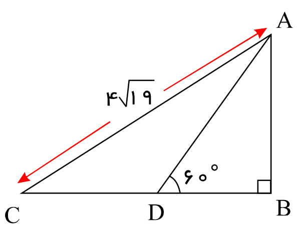
۲۷ - مقدار ماکزیمم $|۵\sin x-۳|$ کدام است؟

① ۲ ② ۳ ③ π ④ ۸

۲۸ - اگر $\sin^۴x+\cos^۴x=\frac{۳}{۵}$ باشد ، حاصل $\sin^۶x+\cos^۶x$ کدام است؟

① $\frac{۱}{۵}$ ② $\frac{۲}{۳}$ ③ $\frac{۲}{۵}$ ④ $\frac{۳}{۷}$

۲۹ - اگر در مثلث ABC از شکل زیر، $AB=۴\sqrt{۳}$ باشد، مساحت مثلث ACD کدام است؟



① $۸\sqrt{۳}$ ② $۱۲\sqrt{۳}$

③ $۲۴\sqrt{۳}$ ④ $۲۸\sqrt{۳}$

۳۰- حاصل عبارت $A=\dfrac{1+\tan^2 60^\circ+\sin^2 60^\circ}{\cot 45^\circ+\cos^2 30^\circ}$ کدام است؟

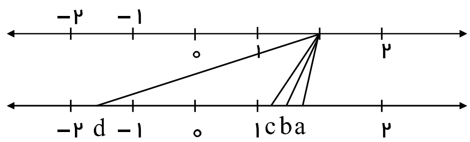
① $\dfrac{19}{7}$ ② $\dfrac{1+2\sqrt{3}}{3}$ ③ $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{4}$ ④ $\dfrac{7}{4}$

۳۱- اگر $\sin x+\cos x=\dfrac{1}{4}$ باشد، حاصل $A=|\sin x-\cos x|$ کدام است؟

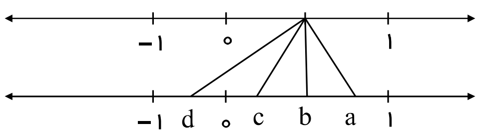
① $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{31}{16}$ ④ $\dfrac{\sqrt{31}}{4}$

۳۲- در هر یک از اشکال زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود در محور پایین وصل شده است. مشخص کنید هر کدام از اعداد a و b و c و d مربوط به کدام ریشه است.

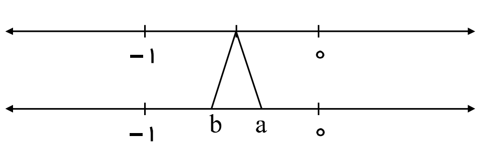
الف)



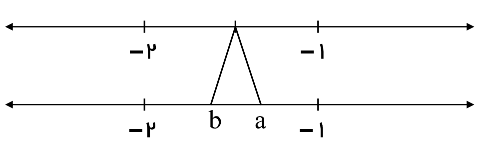
ب)



پ)



ت)



۳۳- جاهای خالی را پر کنید.

الف) اعداد ۴ و .... ریشه‌های چهارم عدد .... هستند.

ب) اگر a ریشه‌ی مثبت چهارم عدد ۸۱ باشد، حاصل a^2-7 برابر است با ....

۳۴- در جاهای خالی، علامت مساوی، کوچکتر یا بزرگتر قرار دهید.

الف) $(-0.1)^5\square(-0.1)^4$

ب) $\sqrt[4]{-0.0001}\square-0.1$

پ) $(3.2)^2\square(3.2)^3$

ت) $(-2)^3\square(-2)^5$

ث) $(-1.1)^4\square(1.1)^4$

ج) $(-2)^5\square(-2)^7$

چ) $2^3\square 3^2$

ح) $(\frac{1}{2})^2\square(\frac{1}{2})^3$

۳۵- حاصل عبارت $\sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^3}-\sqrt[4]{(\sqrt{3}-2)^4}-\sqrt[5]{(\sqrt{3}-2)^5}$ را بیابید؟

۳۶- اگر $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-2}=1$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt[3]{x^2-x-2}$ کدام است؟

① ۲ ② $\dfrac{4}{3}$ ③ ۱ ④ $\dfrac{2}{3}$

۳۷- اگر تساوی $\dfrac{c}{x+1}+\dfrac{ax+b}{x^2-x+1}=\dfrac{1}{x^3+1}$ با شرط $x\neq-1$ یک اتحاد باشد، $a-b+2c$ کدام است؟

① $\dfrac{1}{3}$ ② $-\dfrac{1}{3}$ ③ $-\dfrac{2}{3}$ ④ $\dfrac{2}{3}$

۳۸- حاصل $\sqrt[5]{(\sqrt{2}+1)^4}\times\sqrt[5]{(3-2\sqrt{2})^2}$ کدام است؟

① ۲ ② ۱ ③ $\sqrt{2}$ ④ $\sqrt[5]{2}$

۳۹- حاصل کسر $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}}{\sqrt{50}-\sqrt{8}}$ کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۴۰- اگر $x+y=5$ و $xy=6$ باشد، آنگاه حاصل x^4+y^4 کدام است؟

① ۹۹ ② ۹۸ ③ ۹۷ ④ ۹۶

۴۱- اگر حاصل عبارت $\sqrt[3]{\sqrt{2}} \times (2+\sqrt{3})^{\frac{4}{3}}(2-\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}$ به صورت $\sqrt[3]{A}$ باشد، A کدام است؟

① $\sqrt{3}-1$ ② $\sqrt{3}$ ③ ۲ ④ $\sqrt{3}+1$

۴۲- برای اعداد حقیقی a و b، اگر تساوی $2a^2+b^2+2ab+4b-2a+13=0$ برقرار باشد، حاصل $3a+2b$ کدام است؟

① ۱ ② ۱۹ ③ -1 ④ -19

۴۳- اگر $\frac{3}{2}=\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3x-2}{x}}$، آنگاه x کدام است؟

① $\frac{7}{4}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ ۱ ④ صفر

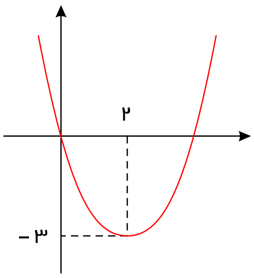
۴۴- رأس هر یک از سهمی‌های زیر، را مشخص کرده و آنها را رسم کنید.

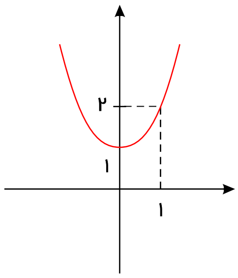
الف) $y=(x-3)^2+1$ ب) $y=x^2-2x+1$

۴۵- اگر $(0,2)$ و $(1,2)$ دو نقطه بر روی یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را بدست آورید.

۴۶- اگر سهمی به معادله‌ی $y=ax^2+bx+c$ محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ و محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۲ و -2 قطع کند، این سهمی را رسم کنید و عرض نقطه‌ای به طول ۱ بر روی این سهمی را بیابید.

۴۷- معادله‌ی سهمی‌های زیر را بدست آورید.

الف)


ب)


۴۸- نامعادله‌ی $4x-7 \le 3x-1 < 2x+5$ را حل کنید.

۴۹- نامعادله‌ی $\frac{x}{x+1} \ge \frac{2x-3}{x-1}$ را حل کنید و جواب را به صورت بازه بنویسید.

۵۰- حدود m را طوری تعیین کنید که عبارت $y=x^2-mx+9$ همواره مثبت باشد.

۵۱- نامعادله‌های قدر مطلقی زیر را حل کنید.

الف) $|x-2| \le 3$ ب) $|3x-1| \ge 1$

۵۲- نامعادله‌ای قدر مطلقی بنویسید که جواب آن بازه‌ی $(2,7)$ باشد.

۵۳- معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

الف) $x^2-x=0$ ب) $x^2-16=0$ پ) $x^2+4x-21=0$ ت) $x^2-4x+4=0$

۵۴- معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌های آن -1 و ۳ باشد.

۵۵- معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

الف) $4x^2-2x-\frac{1}{2}=0$ ب) $3x^2-6x+3=1$

۵۶- معادلات زیر را به روش کلی حل کنید.

الف) $3x^2-5x+7=0$ ب) $2x^2+3x-5=8$

پ) $4x^2-3x+2=1$ ت) $3x^2-3x=\frac{-3}{4}$

۵۷- بدون حل معادله، در مورد تعداد جواب‌های هر معادله بحث کنید.

الف) $x^2-4x-13=0$ ب) $2x^2-4x+2=0$ پ) $7x^2+2x+1=0$

۵۸- مجموع مربعات سه عدد مثبت متوالی زوج، ۲۰۰ است؛ حاصل جمع آن سه عدد کدام است؟

۵۹- اگر طول یک مستطیل از دو برابر عرض آن ۱ واحد کمتر باشد و مساحت این مستطیل ۳ واحد باشد، محیط آن چند برابر طول آن است؟

۶۰- اگر جدول تعیین علامت عبارت $A=(x-1)((4-a)x+b)$ به صورت زیر باشد، آنگاه حاصل $a+b$ کدام است؟ $(a\in\mathbb{Z})$

x		1		a-1	
A	+	0	−	0	+

① ۱ ② ۳ ③ ۵ ④ ۷

۶۱- اگر عبارت $\sqrt[3]{2x-x^2}+\sqrt[4]{\frac{2}{x^2}-\frac{9}{2}}$، عدد حقیقی باشد، مجموعه‌ی مقادیر x در کدام بازه است؟

① $[\frac{2}{3},2]$ ② $[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]$ ③ $[-\frac{2}{3},0)\cup(0,2]$ ④ $[-\frac{2}{3},0)\cup(0,\frac{2}{3}]$

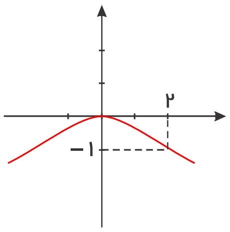
۶۲- به‌ازای چه مقادیری از a، سهمی به معادلهٔ $y=(a-1)x^2+(2a-1)x+a$ فقط از ناحیهٔ اول محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

① $[0,+\infty)$ ② $(-\infty,0]$ ③ $(-\infty,1)$ ④ $\varnothing$

۶۳- اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $(2x-3)(x^2+mx+m)<0$ به‌صورت بازهٔ $(-\infty,\frac{3}{2})$ باشد، m چه مقادیری می‌تواند باشد؟

① $0\le m\le 4$ ② $0<m<4$ ③ $-4<m<4$ ④ $-4\le m\le 4$

۶۴- اگر رأس سهمی مقابل را به نقطه‌ی $(-2,3)$ انتقال دهیم، معادله‌ی کدام خواهد شد؟



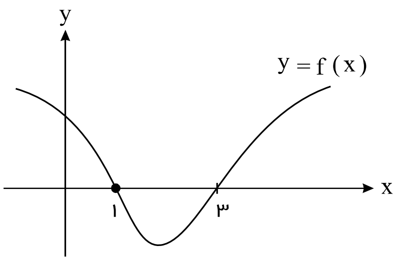
① $y=-x^2-4x-1$ ② $y=-\frac{1}{4}x^2-2x+1$

③ $y=-\frac{1}{4}x^2-x+2$ ④ $y=\frac{1}{4}x^2+2x+5$

۶۵- در حل معادله‌ی $2x^2-12x+7=0$ به روشی مشابه روش مربع کامل، معادله را به فرم $2(x+b)^2+c=0$ می‌نویسیم. حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله چند برابر $b+c$ است؟

① $-\frac{1}{4}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $-\frac{7}{4}$ ④ $-\frac{3}{2}$

۶۶- شکل زیر نمودار تابع $y=f(x)$ است. اگر عبارت $A=\frac{xf(x)}{|x^2-9|}$ در بازهٔ $(-1,a)$ همواره منفی باشد، بیش‌ترین مقدار a کدام است؟



① صفر
② ۱
③ ۳
④ ۲

۶۷- مجموعه‌ی همه‌ی مقادیر x که به ازای آنها عبارت $(x^2+x+1)(x^2-4x+3)$ مثبت شود، کدام است؟

① $1<x<3$ ② $-3<x<-1$ ③ $x<1$ یا $x>3$ ④ $x>-1$ یا $x<-3$

۶۸- مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8}>\frac{x^2-x-2}{x^2-2x-3}$ کدام است؟

① $(-\infty,2)\cup(3,4)$ ② $(-4,\frac{17}{8})\cup(3,\infty)$ ③ $(-\infty,-4)\cup(2,3)$ ④ $(-\infty,-4)\cup(\frac{17}{8},3)$

۶۹ - تابع بودن یا نبودن مجموعه زوج مرتب‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $f(x)=\{(1,2)(2,3)(3,4)(4,5)\}$

ب) $g(x)=\{(1,2)(1,3)(2,2)(3,3)\}$

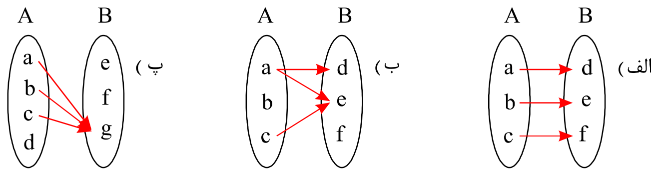
پ) $h(x)=\{(1,1)(2,2)(3,3)(1,1)(2,2)\}$

ت) $z(x)=\{(1,1)(2,1)(3,1)(4,1)\}$

۷۰ - دو رابطه از A به B بنویسید که تابع باشند و دو رابطه از B به A بنویسید که تابع نباشند.

$A=\{a,b,c,d\}$ $\qquad B=\{e,f,g,h\}$

۷۱ - رابطه‌های زیر را به صورت زوج مرتب نوشته و مشخص کنید آیا نمایش زوج مرتبی آنها نمایانگر یک تابع است یا خیر؟



۷۲ - کدام یک از رابطه‌های زیر، تابع است؟

الف) رابطه‌ای که به یک عدد، توان سومش را نسبت می‌دهد.

ب) رابطه‌ای که به یک عدد، ریشه چهارمش را نسبت می‌دهد.

پ) رابطه‌ای که به یک نفر، رنگ چشمش را نسبت می‌دهد (با فرض اینکه هر دو چشمش یک رنگ باشد).

ت) رابطه‌ای که به یک نفر، غذای مورد علاقه‌اش را نسبت می‌دهد.

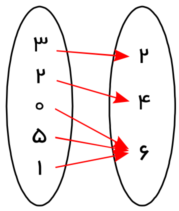
۷۳ - b و a را طوری تعیین کنید که روابط زیر تابع باشند.

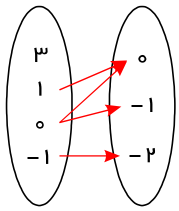
الف) $f(x)=\left\{(3,2a-b),(\frac{6}{2},2a+b),(1,a),(2,3),(\frac{2}{1},\frac{3}{a})\right\}$

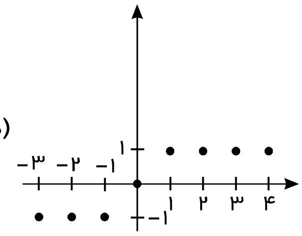
ب) $g(x)=\{(a,a),(b,a),(2a-b,0),(b,2a-b),(a,2b)\}$

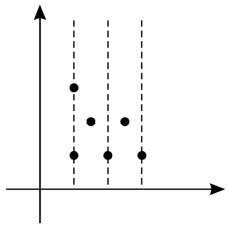
۷۴ - در دو تابع $(x\in\mathbb{N})\quad f(x)=2x+1$ و $(x\in\mathbb{Z})\quad g(x)=2x-1$؛ دامنه و برد هر یک را تعیین کنید و مشخص کنید اگر $f(4)=g(x)$ باشد، آنگاه x کدام است؟

۷۵ - تابع بودن یا نبودن موارد زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید و در توابع، دامنه و برد را بنویسید.

ب) 

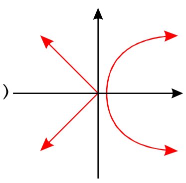
الف) 

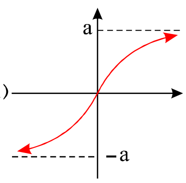
د) 

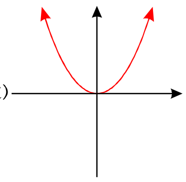
ج) 

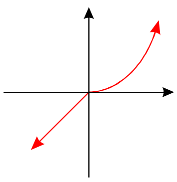
و) $\{(۱,۱)(۲,۱)(۳,۲)(۴,۱)\}$

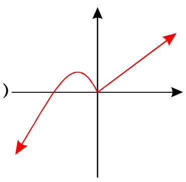
هـ) $\{(۱,۲)(۱,۳)(۲,۲)(۳,۳)(۴,۱)\}$

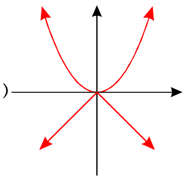
خ) 

ح) 

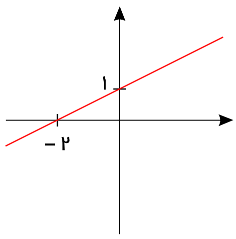
چ) 

ر) 

ذ) 

د) 

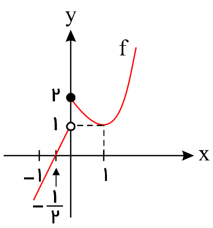
۷۶ - نمایش جبری تابع زیر که به صورت نمودار رسم شده است را بنویسید و برد آنرا در صورتیکه دامنه $[-۲,۲]$ باشد، محاسبه کنید.



۷۷ - در یک تابع خطی $f(۲)=۳$ و $f(-۱)=۴$ است؛ نمودار این تابع را رسم کنید و نمایش جبری آن را بنویسید.

۷۸ - با فرض $g(۰)=۱\,,\,g(۱)=۲\,,\,g(۲)=۴\,,\,g(۳)=۸$ ، تابع $g(x)$ را به شکل مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها بنویسید و نمودار آنرا رسم کنید و مشخص کنید آیا تابع $g(x)$ خطی است یا خیر.

۷۹ - مطابق شکل زیر، نمودار تابع f از یک خط و بخشی از یک سهمی تشکیل شده است. حاصل عبارت $\dfrac{f(۳)-f(۴)}{-f(-۱)+f(-۳٫۵)}$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) −۲
۴) −۱

۸۰- برد تابع $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x-3 & ,\ x<1\\ 1 & ,\ x=1\\ -x^2+4x-4 & ,\ x>1\end{cases}$ کدام است؟

① $\mathbb{R}$ ② $\mathbb{R}-(-2,0]$ ③ $(-\infty,0]\cup\{1\}$ ④ $(-\infty,0]\cup\{1\}-[-2,-1]$

۸۱- یک سهمی را روی محور xها ۲ واحد به‌سمت چپ و روی محور yها ۳ واحد به‌سمت بالا منتقل کرده‌ایم که در انتها معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=-x^2$ تبدیل شد. معادلهٔ سهمی اولیه کدام بوده است؟

① $y=-(x-1)^2$ ② $y=-x^2-3$ ③ $y=-(x+2)^2+3$ ④ $y=-x^2+4x-7$

۸۲- اگر رابطهٔ $f=\left\{(3,m^3-m),(-3m,m),(1,-2),(3,0),(2m,2),(m,3)\right\}$ تابع باشد؛ چند مقدار برای m موجود است؟

① ۳ ② ۲ ③ ۱ ④ صفر

۸۳- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\left|\frac{3}{2}x-1\right|+1$ بازهٔ $(-2,3]$ باشد، برد این تابع کدام است؟

① $[1,5)$ ② $(1,5]$ ③ $(0,5]$ ④ $(0,5)$

۸۴- اگر $f(x)=|x|$ و $g(x)=x^2+2x+1$ باشد، حاصل $f\left(g(1-\sqrt{2})\right)-g\left(f(1-\sqrt{2})\right)$ کدام است؟

① $4(1-\sqrt{2})$ ② $4(\sqrt{2}-1)$ ③ 4 ④ $4\sqrt{2}$

۸۵- نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{2}x+2$ در بازهٔ $[x_0,+\infty)$ بالاتر از خط به معادلهٔ $y=3(x-1)$ قرار نمی‌گیرد، کمترین مقدار $f(x_0)$ کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۸۶- نمودار تابع $y=x^2-3x-10$ را حداقل چند واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور xها غیرمنفی باشد؟

① ۱ ② ۱٫۵ ③ ۲ ④ ۳

۸۷- اگر $f(x+1)=x^2+4x$ باشد؛ $f(x-1)$ کدام است؟

① x^2-4 ② x^2-4x ③ $4x-x^2$ ④ x^2+x-3

۸۸- اگر برد تابع $f(x)=\begin{cases}(x+3)^2 & x\le -1\\ -|x|-1 & -1<x\le 2\end{cases}$ به‌صورت $[a,b]\cup[c,+\infty)$ باشد، $a+b+c$ کدام است؟

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -6

۸۹- اگر $f(x)=\sqrt{x+2|x|}$ مقدار $f\left(f(-144)\right)$ کدام است؟

① تعریف نشده ② ۶ ③ ۸ ④ ۱۲

۹۰- اگر $f(x)=f(x-1)-2f(x-2)$ باشد و $f(0)=1$ و $f(-1)=-1$ ، $f(3)$ کدام است؟

① -5 ② ۵ ③ صفر ④ ۲

پاسخنامه تشریحی

۱ -

الف) $R-[۰,۱)=(-\infty,۰)\cup[۱,+\infty)$

ب) $R-(-۱,۱)=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$

۲ - الف) نادرست: از اشتراک دو مجموعه متناهی و نامتناهی، همواره مجموعه‌ای متناهی به دست می‌آید.

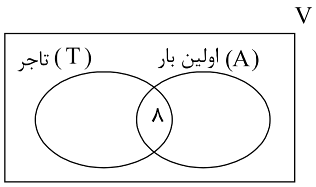
ب) درست: برای مثال $N\subseteq W$

پ) نادرست:اگر $A\subseteq B$ و B متناهی باشد، A حتماً متناهی خواهد بود.

ت) درست

ث) نادرست: تهی مجموعه‌ای بدون عضو و متناهی است چرا که تعداد اعضای آن صفر است و صفر عددی متناهی است.

۳ - گزینه ۲ با توجه به نمودار ون داریم:

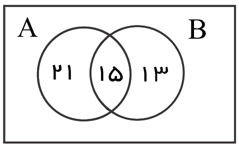


$n(V)=۷۲\ ,\ n(T)=۲۳\ ,\ n(T\cap A)=۸$

$n(T\cup A)=n(T)+n(A)-n(T\cap A)=۲۳+۱۲-۸=۲۷$

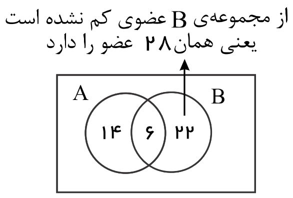
$n(T\cup A)'=n(V)-n(T\cup A)=۷۲-۲۷=۴۵$

۴ - گزینه ۳ طبق فرض، پیش از تغییر، اعضا به صورت زیر توزیع شده بودند:



۱۶ عضو از A برداشته‌ایم که ۹ عضو آن در اشتراک دو مجموعه حضور داشته‌اند، پس ۹ عضو از اشتراک کم می‌شود و ۷ عضو هم از باقیمانده A:

$۱۳+۹=۲۲$



دقت: از B چیزی حذف نشده. بنابراین تعداد آن نباید تغییر کند.

حال تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه را در وضعیت جدید محاسبه می‌کنیم:

$n(A\cup B)=۱۴+۶+۲۲=۴۲$

۵ - $\boxed{\text{جمله ی عمومی دنباله الگوی خطی به فرم } a_x+b \text{ می باشد}}$

$$\begin{cases} a_۳=۳a+b=۸ \\ a_۷=۷a+b=۲۸ \end{cases}$$
$$۴a=۲۰ \quad\Rightarrow\quad a=۵$$

$۳\times۵+b=۸\Rightarrow ۱۵+b=۸\Rightarrow b=-۷$

$a_n=۵n-۷$

$\Rightarrow ۵n-۷=۵۳\Rightarrow ۵n=۶۰\Rightarrow n=۱۲$ دوازدهمین جمله

۶ -

جمله ی عمومی دنباله ی حسابی
$a_n=a_۱+(n-۱)d$
$a_۱$: جمله ی اول دنباله , d : قدر نسبت

$a_n=b_n$

$۳n-۳+۵=۲n-۲+۷ \Rightarrow n=۳$ **سومین جمله**

۷ -

جمله عمومی دنباله هندسی
$a_n=a_۱ r^{n-۱}$
$a_۱$: جمله اول دنباله , r : قدر نسبت

$۱۲, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, ۱۹۲$

$a_۱ \qquad a_۵$

$a_۱=۱۲$

$a_۵=a_۱ r^۴=۱۹۲$

$۱۲\times r^۴=۱۹۲$

$r^۴=\dfrac{۱۹۲}{۱۲}=۱۶$

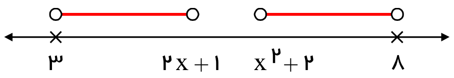
$$\Rightarrow \begin{cases} r=۲ \Rightarrow ۱۲, ۲۴, ۴۸, ۹۶, ۱۹۲ \\ r=-۲ \Rightarrow ۱۲, -۲۴, ۴۸, -۹۶, ۱۹۲ \end{cases}$$

۸ -

جمله عمومی دنباله هندسی
$a_n=a_۱ a^{n-۱}$
$a_۱$: جمله اول دنباله , q : قدر نسبت

$t_n=t_۱ q^{n-۱} \Rightarrow ۵۰=۲۰۰\times (\dfrac{۱}{۴})^{n-۱} \rightarrow \dfrac{۵۰}{۲۰۰}=\dfrac{۱}{۴}=(\dfrac{۱}{۴})^{n-۱} \rightarrow n-۱=۱ \Rightarrow n=۲$ پس از دو روز

۹ - باتوجه به شکل مشخص است برای تهی بودن اشتراک دو بازه، باید انتهای بازه سمت چپ، مقدار عددی کمتر از ابتدای بازه سمت راست روی محور داشته باشد.



بنابراین :

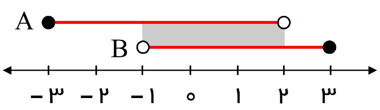
$x^۲+۲>۲x+۱ \Rightarrow x^۲-۲x+۲-۱>۰$

$\Rightarrow x^۲-۲x+۱>۰ \Rightarrow (x-۱)^۲>۰$

باتوجه به اینکه تمام عبارت‌های درجه دوم نامنفی هستند، پس به ازای تمام مقادیر x، اشتراک دو بازه داده شده، تهی خواهد بود.

۱۰ -

باتوجه به محور اعداد داریم:



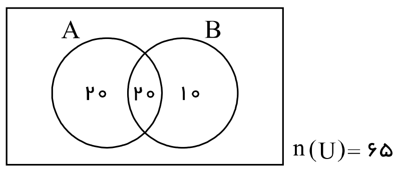
$A\cap B=(-۱,۲) \Rightarrow (A\cap B)'=(-\infty,-۱]\cup[۲,+\infty)$

۱۱ - گزینه ۲

می‌دانیم:

$$\boxed{\begin{array}{r} n(A')=n(U)-n(A) \\ A\cap B'=A-B \end{array}}$$

با توجه به نمودار ون داریم:



$n(A')=n(U)-n(A) \Rightarrow ۲۵=۶۵-n(A) \Rightarrow n(A)=۴۰$

$n(A\cap B')=n(B-A)=۱۰$

$n(A\cup B)=۲۰+۲۰+۱۰=۵۰$

۱۲ - گزینه ۴

در هر دنباله ی هندسی با جمله‌ی اول $a_۱$ و نسبت مشترک r ، $a_n=a_۱ r^{n-۱}$ است.

$a_۱=۳\,,\ a_۶=۹۶ \Rightarrow a_۱ r^۵=۹۶ \Rightarrow ۳\times r^۵=۹۶$

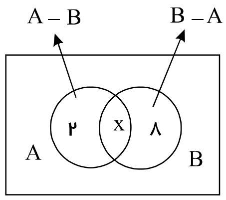
$\Rightarrow r^۵=\dfrac{۹۶}{۳}=۳۲=۲^۵ \Rightarrow r=۲$

جملات دنباله را می‌نویسیم.

$۳, \boxed{۶}, \boxed{۱۲}, \boxed{۲۴}, \boxed{۴۸}, ۹۶ \Rightarrow$ **مجموع واسطه های اول و سوم** $=۶+۲۴=۳۰$

۱۳ - گزینه ۴

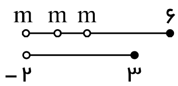
نمودار زیر را رسم می‌کنیم و تعداد اعضای $A\cap B$ را x می‌نامیم.



$$\left.\begin{aligned} n(A)&=2+x\\ n(B)&=8+x\\ n(B)&=3n(A)\end{aligned}\right\}\Rightarrow 8+x=3(2+x)\Rightarrow 8+x=6+3x\Rightarrow 2x=2\Rightarrow x=1$$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=3+9-1=11$$

۱۴ - گزینه ۳ برای برقرار شدن رابطه‌ی فوق، دو بازه باید به شکل



باشد. بنابراین اولاً باید $m \le 3$ باشد تا شروع بازه‌ی دوم در بدنه‌ی بازه‌ی اول باشد؛ ثانیاً باید $m > -2$ باشد تا حاصل اشتراک بازه‌ها از -2 آغاز شود (وگرنه باید از m آغاز شود)، بنابراین به $-2 < m \le 3$ می‌رسیم.

۱۵ - گزینه ۴ در یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول a_1 و قدرنسبت d جمله‌ی nام از رابطه‌ی $a_n = a_1 + (n-1)d$ بدست می‌آید.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\Rightarrow a_3 = a_1 + 2d = 20 \xrightarrow{a_1=2d} 2d+2d=20 \Rightarrow 4d=20 \Rightarrow d=\frac{20}{4}=5$$

$$a_1 + 2d = 20 \xrightarrow{d=5} a_1 + (2\times 5) = 20 \Rightarrow a_1 = 20-10=10$$

$$a_{15} = a_1 + 14d = 10 + (14\times 5) = 80$$

۱۶ -

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \to \cos^2\theta = 1 - \frac{24}{49} = \frac{25}{49}$$

$$\to \cos\theta = \pm\frac{5}{7}$$

از آن‌جا که θ در ربع دوم است، کسینوس آن منفی است؛ پس:

$$\cos\theta = -\frac{5}{7} \to \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{7}}{-\frac{5}{7}} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

۱۷ - برای نوشتن معادله‌ی خط، یکی از راه‌ها در دست داشتن شیب خط و یک نقطه از خط است :

$A = \left|\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right.$ و $\text{شیب} = m = \tan 45 = 1$

$$y = mx + b$$

$$\xrightarrow{m=1} y = x + b \xrightarrow{\left|\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right.} 3 = 2 + b \Rightarrow b = 1 \to y = x + 1$$

$$y \xlongequal{x=4} 4 + 1 = 5 \qquad (4,5)$$

۱۸ -

$$\frac{(1+\tan^2\alpha)(\cos^2\alpha)}{\cot\alpha} = \frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}\times\cos^2\alpha}{\cot\alpha} = \frac{\frac{1}{1}}{\cot\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha} = \tan\alpha$$

۱۹ -

$$\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)(1-\sin\alpha) = \frac{(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}(1-\sin\alpha) = \frac{1-\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \cos\alpha$$

۲۰ - الف) 45° ب) 30° پ) 60°

۲۱ -

$$\sin\theta\times\cot\theta < 0 \Rightarrow \cancel{\sin\theta}\times\frac{\cos\theta}{\cancel{\sin\theta}} < 0 \Rightarrow \cos\theta < 0$$

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} < 0 \xrightarrow{\text{همواره مثبت } \cos^2\theta} \sin\theta < 0$$

از منفی بودن سینوس و کسینوس نتیجه می‌شود θ در ربع سوم واقع است.

۲۲ -

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2 \Rightarrow \cos\alpha = 2\sin\alpha$$

با جایگذاری $\cos\alpha = 2\sin\alpha$ خواهیم داشت:

$$\frac{2(2\sin\alpha)-\sin\alpha}{3\sin\alpha+2\sin\alpha} = \frac{4\sin\alpha-\sin\alpha}{5\sin\alpha} = \frac{3\sin\alpha}{5\sin\alpha} = \frac{3}{5}$$

۲۳ -

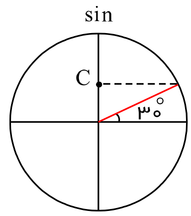
$$\boxed{\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

$$\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}\to\frac{1}{\cot^2\alpha}+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$\to\frac{1}{\frac{4}{9}}+1=\frac{9}{4}+\frac{4}{4}=\frac{13}{4}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\to\cos^2\alpha=\frac{4}{13}$$
$$\to\cos\alpha=\pm\frac{2}{\sqrt{13}}=\pm\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

۲۴ – گزینه ۴ مساحت هر چهارضلعی از نصف حاصل‌ضرب دو قطر در سینوس زاویه‌ی بینشان به‌دست می‌آید.

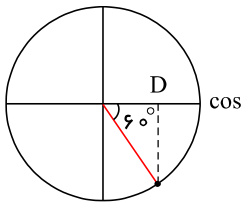
$$S=\frac{1}{2}(12)(8\sqrt{3})(\sin 60^\circ)=(48\sqrt{3})(\frac{\sqrt{3}}{2})=24\times 3=72$$

۲۵ – گزینه ۱ با بدست آوردن مختصات نقاط D و C از روی نسبت‌های مثلثاتی، طول پاره‌خط CD را بدست می‌آوریم:



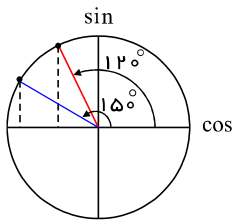
$$\sin 30=\frac{1}{2}\to C(0,\frac{1}{2})$$

$$\cos(360-60)=\cos 60=\frac{1}{2}\to D(\frac{1}{2},0)$$



$$|CD|=\sqrt{(x_D-x_C)^2+(y_D-y_C)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۶ – گزینه ۳



$$120^\circ\leq\alpha\leq 150^\circ$$
$$\cos 150\leq\cos\alpha\leq\cos 120$$
$$\frac{-\sqrt{3}}{2}\leq\cos\alpha\leq\frac{-1}{2}$$
$$\frac{-\sqrt{3}}{2}\leq 2m-1\leq\frac{-1}{2}$$
$$\xrightarrow{+1}\frac{2-\sqrt{3}}{2}\leq 2m\leq\frac{1}{2}\xrightarrow{\div 2}\frac{2-\sqrt{3}}{4}\leq m\leq\frac{1}{4}$$

۲۷ – گزینه ۴

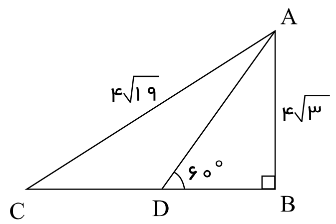
$$-1\leq\sin x\leq 1\to -5\leq 5\sin x\leq 5$$
$$\xrightarrow{-3}-8\leq 5\sin x-3\leq 2\to|5\sin x-3|\leq 8\Rightarrow Max=8$$

۲۸ – گزینه ۳

$$\sin^2x+\cos^2x=1\xrightarrow{(\ )^2}\sin^4x+\cos^4x+2\sin^2x\cos^2x=1$$
$$\frac{3}{5}+2\sin^2x\cos^2x=1\to 2\sin^2x\cos^2x=\frac{2}{5}\to\sin^2x\cos^2x=\frac{1}{5}$$
$$\sin^6x+\cos^6x\overset{*}{=}(\sin^2x+\cos^2)(\sin^4x+\cos^4x-\sin^2x\cos^2x)$$
$$=1\times\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{5}$$
$$*:a^6+b^6=(a^2+b^2)(a^4+b^4-a^2b^2)$$

۲۹ - گزینه ۳

شکل را ببینید:



برای محاسبه‌ی مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ACD}$ باید ارتفاع AB و قاعده‌ی CD معلوم باشد. $AB = ۴\sqrt{۳}$ است؛ می‌ماند CD که برای محاسبه‌ی آن چنین عمل می‌کنیم:

$$\overset{\Delta}{ABC}\ : AC^{۲} = AB^{۲} + BC^{۲} \Rightarrow (۴\sqrt{۱۹})^{۲} = (۴\sqrt{۲})^{۲} + BC^{۲} \Rightarrow ۱۶ \times ۱۹ = ۱۶ \times ۳ + BC^{۲}$$

$$\Rightarrow BC^{۲} = ۱۶ \times ۱۹ - ۱۶ \times ۳ = ۱۶(۱۹-۳) = ۱۶ \times ۱۶ \xrightarrow{\sqrt{}} BC = ۱۶$$

$$\overset{\Delta}{ABD}: \tan ۶۰^{\circ} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{۴\sqrt{۳}}{BD} \Rightarrow BD = \frac{۴\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = ۴$$

$$CD = BC - BD = ۱۶ - ۴ = ۱۲$$

$$S_{\overset{\Delta}{ACD}} = \frac{۱}{۲} \times AB \times CD = \frac{۱}{۲} \times ۴\sqrt{۳} \times ۱۲ = ۶ \times ۴\sqrt{۳} = ۲۴\sqrt{۳}$$

۳۰ - گزینه ۱ می دانیم: $\sin ۶۰^{\circ} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$, $\tan ۶۰^{\circ} = \sqrt{۳}$, $\cos ۳۰^{\circ} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$, $\cot ۴۵^{\circ} = ۱$

$$A = \frac{۱ + (\sqrt{۳})^{۲} + (\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۲}}{۱ + (\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۲}} = \frac{۱ + ۳ + \frac{۳}{۴}}{۱ + \frac{۳}{۴}} = \frac{\frac{۴+۱۲+۳}{۴}}{\frac{۴+۳}{۴}} = \frac{۱۹}{۷}$$

۳۱ - گزینه ۴

$$\sin x + \cos x = \frac{۱}{۴} \xrightarrow{(\ )^{۲}} (\sin x + \cos x)^{۲} = \frac{۱}{۱۶} \Rightarrow \overbrace{\sin^{۲} x + \cos^{۲} x}^{۱} + ۲ \sin x \cos x = \frac{۱}{۱۶}$$

$$\Rightarrow ۲ \sin x \cos x = \frac{۱}{۱۶} - ۱ \Rightarrow ۲ \sin x \cos x = -\frac{۱۵}{۱۶}$$

خواسته‌ی مسئله را A می‌نامیم:

$$A = |\sin x - \cos x| \xrightarrow{(\ )^{۲}} A^{۲} = \overbrace{\sin^{۲} x + \cos^{۲} x}^{۱} - \overbrace{۲ \sin x \cos x}^{-\frac{۱۵}{۱۶}}$$

$$\Rightarrow A^{۲} = ۱ + \frac{۱۵}{۱۶} = \frac{۳۱}{۱۶} \xrightarrow{\sqrt{}} |A| = \pm\frac{\sqrt{۳۱}}{۴} \xrightarrow{A>۰} A = \frac{\sqrt{۳۱}}{۴}$$

۳۲ - الف) $a:۳ \quad b:۴ \quad c:۵ \quad d:۴$

اعداد مثبت بزرگتر از یک هر چه زیر رادیکال با فرجه‌ی بزرگتری قرار بگیرند(ریشهٔ بزرگتر)، عدد کوچکتری حاصل می‌کنند.

و همچنین، دو ریشه چهارم قرینه یکدیگر دارند.

ب) $a:۵ \quad b:۴ \quad c:۳ \quad d:۴$

اعداد مثبت بین صفر و یک، هرچه رادیکال با فرجه‌ی بزرگتری از آنها بگیریم(ریشهٔ بزرگتر) عددی بزرگتر حاصل می‌شود.

و همچنین، دو ریشه چهارم قرینه یکدیگر دارند.

پ) $a:۳ \quad b:۵$

اعداد بین صفر و منفی یک، هرچه زیر رادیکال با فرجه‌ی فرد بزرگتری قرار بگیرند(ریشهٔ بزرگتر) عدد کوچکتری حاصل می‌کنند.

و در اعداد منفی هرچه به سمت چپ روی محور حرکت کنیم، عدد کوچکتر می‌شود. ضمن اینکه اعداد منفی، تنها ریشه‌های فرد دارند.

ت) $a:۵ \quad b:۳$

اعداد منفی کوچکتر از منفی یک هرچه رادیکال با فرجه‌ی بزرگتری از آنها بگیریم(ریشهٔ بزرگتر)، عدد بزرگتری حاصل می‌کنند.

با توجه به اینکه هرچه روی محور اعداد منفی به سمت چپ حرکت کنیم عدد ما کوچکتر می‌شود و اعداد منفی تنها ریشه‌های فرد دارند.

۳۳ - الف) $۲۵۶, -۴$

$$۴^۴ = ۲۵۶ \rightarrow \sqrt[۴]{۲۵۶} = ۴$$
$$-\sqrt[۴]{۲۵۶} = -۴$$

ب) ۲

$$\sqrt[۴]{۸۱} = ۳ \rightarrow a = ۳ \Rightarrow a^۲ - ۷ = ۹ - ۷ = ۲$$

۳۴ -

الف) $(-۰٫۱)^۵ < (-۰٫۱)^۴$	ب) $\sqrt[۴]{-۰٫۰۰۰۱} = -۰٫۱$
پ) $(۳٫۲)^۲ < (۳٫۲)^۳$	ت) $(-۲)^۳ > (-۲)^۵$
ث) $(-۱٫۱)^۴ = (۱٫۱)^۴$	ج) $(-۲)^۵ > (-۲)^۷$
چ) $۲^۳ < ۳^۲$	ح) $(\frac{۱}{۲})^۲ > (\frac{۱}{۲})^۳$

۳۵ -

$\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$	n زوج
$\sqrt[n]{a^n} = a$	n فرد

$$\sqrt[۳]{(\sqrt{۳}-۲)^۳} - \sqrt[۴]{(\sqrt{۳}-۲)^۴} - \sqrt[۵]{(\sqrt{۳}-۲)^۵} =$$
$$(\sqrt{۳}-۲) - \left|\sqrt{۳}-۲\right| - (\sqrt{۳}-۲)$$
$$= -\left|\sqrt{۳}-۲\right| \xlongequal{\sqrt{۳}-۲<۰} -(-(\sqrt{۳}-۲)) = \sqrt{۳}-۲$$

۳۶ - گزینه ۴ می‌دانیم $(a-b)(a^۲+b^۲+$ است.

$$\sqrt[۳]{x+۱} - \sqrt[۳]{x-۲} = ۱ \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt[۳]{x+۱} - \sqrt[۳]{x-۲}} = ۱$$

$$\xrightarrow{\text{گویا می‌کنیم}} \frac{\sqrt[۳]{(x+۱)^۲} + \sqrt[۳]{(x-۲)^۲} + \sqrt[۳]{(x+۱)(x-۲)}}{(\sqrt[۳]{x+۱} - \sqrt[۳]{x-۲})(\sqrt[۳]{(x+۱)^۲} + \sqrt[۳]{(x-۲)^۲} + \sqrt[۳]{(x+۱)(x-۲)})} = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[۳]{(x+۱)^۲} + \sqrt[۳]{(x-۲)^۲} + \sqrt[۳]{x^۲-x-۲}}{x+۱-(x-۲)} = ۱$$

$$\Rightarrow \sqrt[۳]{(x+۱)^۲} + \sqrt[۳]{(x-۱)^۲} + \sqrt[۳]{x^۲-x-۲} = ۳ \qquad \star$$

از طرفی: $\sqrt[۳]{x+۱} - \sqrt[۳]{x-۲} = ۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} \sqrt[۳]{(x+۱)^۲} + \sqrt[۳]{(x-۲)^۲} - ۲\sqrt[۳]{(x+۱)(x-۲)} = ۱$

$$\Rightarrow \sqrt[۳]{(x+۱)^۲} + \sqrt[۳]{(x-۲)^۲} = ۱ + ۲\sqrt[۳]{x^۲-x-۲} \qquad \star\star$$

در رابطهٔ $\star$ به‌جای $\sqrt[۳]{(x-۱)^۲} + \sqrt[۳]{(x+۱)^۲}$ مساویش را از رابطهٔ $\star\star$ قرار می‌دهیم.

پس: $۱ + ۲\sqrt[۳]{x^۲-x-۲} + \sqrt[۳]{x^۲-x-۲} = ۳$

$$\Rightarrow ۳\sqrt[۳]{x^۲-x-۲} = ۲ \Rightarrow \sqrt[۳]{x^۲-x-۲} = \frac{۲}{۳}$$

۳۷ - گزینه ۲

می‌دانیم $(a+b)(a^۲-ab+b^۲)$ است.

$$\frac{۱}{x^۳+۱} = \frac{ax^۲+ax+bx+b+cx^۲-cx+c}{(x+۱)(x^۲-x+۱)}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{x^۳+۱} = \frac{(a+c)x^۲+(a+b-c)x+(b+c)}{x^۳+۱}$$

$$\Rightarrow ۱ = (a+c)x^۲+(a+b-c)x+(b+c)$$

برای آنکه دو طرف تساوی با یکدیگر متحد باشند، باید:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} a+c=۰ \\ a+b-c=۰ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲a+b=۰ \\ \left.\begin{array}{l} a+b-c=۰ \\ b+c=۱ \end{array}\right\} \Rightarrow a+۲b=۱ \end{array}\right\} \Rightarrow a=-\frac{۱}{۳}, b=\frac{۲}{۳} \xrightarrow{a+c=۰} c=\frac{۱}{۳}$$

پس: $a-b+2c=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$

۳۸ - گزینه ۲

$$\sqrt[5]{(\sqrt{2}+1)^4}\times\sqrt[5]{(3-2\sqrt{2})^2}=\sqrt[5]{\left((\sqrt{2}+1)^2\right)^2}\times\sqrt[5]{(3-2\sqrt{2})^2}$$
$$=\sqrt[5]{(2+1+2\sqrt{2})^2}\times\sqrt[5]{(3-2\sqrt{2})^2}=\sqrt[5]{(3+2\sqrt{2})^2}\times\sqrt[5]{(3-2\sqrt{2})^2}$$
$$=(3+2\sqrt{2})^{\frac{2}{5}}\times(3-2\sqrt{2})^{\frac{2}{5}}=\left((3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\right)^{\frac{2}{5}}$$
$$=\left(3^2-(2\sqrt{2})^2\right)^{\frac{2}{5}}=(9-8)^{\frac{2}{5}}=1^{\frac{2}{5}}=1$$

۳۹ - گزینه ۲ می دانیم: $\boxed{(n\ \text{زوج}\to a,b>0)\quad \sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}}$

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}}{\sqrt{50}-\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2\times4}+\sqrt{2\times9}}{\sqrt{2\times25}-\sqrt{2\times4}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{4}\sqrt{2}+\sqrt{9}\sqrt{2}}{\sqrt{25}\sqrt{2}-\sqrt{4}\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}-2\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=2$$

۴۰ - گزینه ۳

$$\boxed{(x+y)^2=x^2+y^2+2xy}$$
$$(5)^2=x^2+y^2+2(6)$$
$$25=x^2+y^2+12$$
$$x^2+y^2=13\qquad (I)\ \text{رابطه}$$

$$\xrightarrow{(I)}(x^2+y^2)^2=x^4+y^4+2x^2y^2$$
$$(13)^2=x^4+y^4+2(xy)^2$$
$$169=x^4+y^4+2(6)^2$$
$$169=x^4+y^4+2\times36$$
$$169=x^4+y^4+72\to x^4+y^4=97$$

۴۱ - گزینه ۱ $\boxed{\begin{array}{c}(ab)^n=a^nb^n\\ \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}\end{array}}$

$$\sqrt[3]{A}=(2-\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}(2+\sqrt{3})^{\frac{4}{3}}\times\sqrt[3]{\sqrt{2}}$$
$$A=\left((2-\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}(2+\sqrt{3})^{\frac{4}{3}}\times\sqrt[3]{\sqrt{2}}\right)^3$$
$$A=(2-\sqrt{3})^{\frac{9}{2}}(2+\sqrt{3})^4\sqrt{2}=(2-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}(2-\sqrt{3})^4(2+\sqrt{3})^4\times\sqrt{2}$$
$$=(2-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}((2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}))^4\times\sqrt{2}=(2-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}(4-3)^4\times\sqrt{2}$$
$$=(2-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}\times\sqrt{2}=\sqrt{2-\sqrt{3}}\times\sqrt{2}=\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3+1-2\sqrt{3}}$$
$$\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2-2\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{3}-1$$

۴۲ - گزینه ۳

می‌دانیم $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ است.

$$2a^2+b^2+2ab+4b-2a+13=0$$
$$\xrightarrow[-2a=4a-6a]{2a^2=a^2+a^2,\,13=9+4}\underbrace{a^2+b^2+4+2ab+4b+4a}_{(a+b+2)^2}+\underbrace{a^2-6a+9}_{(a-3)^2}=0$$
$$(a+b+2)^2+(a-3)^2=0\Rightarrow\begin{cases}a-3=0\Rightarrow a=3\\ a+b+2=0\xrightarrow{a=3}b+5=0\Rightarrow b=-5\end{cases}$$

پس: $3a+2b=9-10=-1$

۴۳ - گزینه ۲

$$\boxed{a^{-b}=\frac{1}{a^b}}$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3x-2}{x}} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{\frac{3x-2}{x}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{6x-4}{x}} = \frac{3}{2} \xrightarrow{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{2}} \frac{6x-4}{x} = -1$$

$$\xrightarrow{\text{با فرض } x\neq 0} 6x-4=-x \to 7x=4 \to x=\frac{4}{7}$$

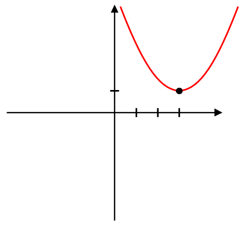
۴۴ -

در سهمی به فرم $y=ax^2+bx+c$ ، رأس سهمی از رابطه‌ی $\left|\begin{matrix}\frac{-b}{2a}\\ f(\frac{-b}{2a})\end{matrix}\right.$ بدست می آید و معادله‌ی محور تقارن $x=\frac{-b}{2a}$ است.

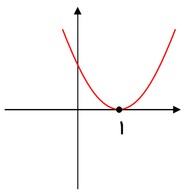
در سهمی به فرم $y=a(x-h)^2+k$ ، رأس سهمی از رابطه‌ی $\left|\begin{matrix}h\\ k\end{matrix}\right.$ بدست می آید و معادله‌ی محور تقارن $x=h$ است.

الف) راس سهمی $(3,1)$: $\left|\begin{matrix}\frac{-b}{2a}=\frac{-(-6)}{2}=3\\ f(3)=0^2+1=1\end{matrix}\right.$

$$y=(x-3)^2+1=x^2+9-6x+1=x^2-6x+10$$



ب) $\left|\begin{matrix}\frac{-b}{2a}=\frac{2}{2}=1\\ f(1)=1-2+1=0\end{matrix}\right.$



۴۵ - با نوشتن معادله‌ی سهمی و جایگذاری نقطه‌ها در آن داریم:

$$y=ax^2+bx+c$$

$$\xrightarrow{(0,2)} 2=a\times 0+b\times 0+c \Rightarrow \boxed{2=c}$$

$$\xrightarrow{(1,2)} 2=a+b+2 \Rightarrow \boxed{a+b=0} \Rightarrow \boxed{a=-b}$$

خط تقارن $x=\frac{-b}{2a} \xrightarrow{a=-b} x=\frac{-b}{2(-b)}=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}}$

۴۶ -

$$y=ax^2+bx+c \xrightarrow{(0,3)} 3=a(0)^2+b(0)+c \Rightarrow \boxed{c=3}$$

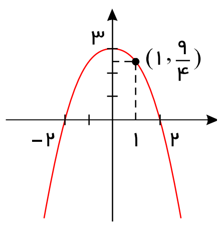
$$\xrightarrow{(2,0)} 0=a(2)^2+b(2)+3 \Rightarrow 4a+2b+3=0 (I)$$

$$\xrightarrow{(-2,0)} 0=a(-2)^2+b(-2)+3 \Rightarrow 4a-2b+3=0 (II)$$

$$\xrightarrow{I,II} 4a+2b+3=4a-2b+3 \Rightarrow 2b=-2b \Rightarrow b=-b \Rightarrow \boxed{b=0}$$

$$4a+2b+3=0 \xrightarrow{b=0} 4a+3=0 \Rightarrow 4a=-3 \Rightarrow \boxed{a=\frac{-3}{4}}$$

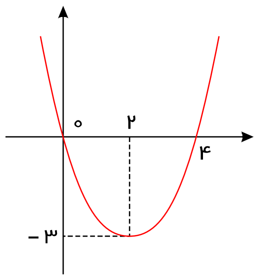
$$\boxed{y=\frac{-3}{4}x^2+3} \xrightarrow{x=1} y=\frac{-3}{4}+\frac{12}{4}=\frac{9}{4}\boxed{(1,\frac{9}{4})}$$



۴۷ -

الف) می‌دانیم سهمی متقارن است پس:

نقطه‌ی دیگری که سهمی محور افقی را قطع کرده $(0,4)$ است.



رأس سهمی $S=\begin{cases}\frac{-b}{2a}=2\\ f(\frac{-b}{2a})=f(2)=-3\end{cases}\qquad(2,-3)$

$$y=ax^2+bx+c\xrightarrow{(0,0)}0+c=0\Rightarrow\boxed{c=0}\qquad(4,0)\quad(0,0)$$

$$y=ax^2+bx+c\xrightarrow{(4,0)}16a+4b=0\qquad(1)$$

$$y=ax^2+bx+c\xrightarrow{(2,-3)}4a+2b=-3\xrightarrow{\times 4}16a+8b=-12\qquad(2)$$

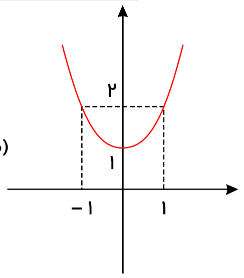
$$\xrightarrow[\text{از هم کم می‌کنیم}]{1,2}\begin{cases}16a+4b=0\\-(16a+8b=-12)\end{cases}$$

$$-4b=12\Rightarrow\boxed{b=-3}$$

$$16a+4b=0\xrightarrow{b=-3}16a-12=0\Rightarrow 16a=12\Rightarrow a=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$$

$$\boxed{y=\frac{3}{4}x^2-3x}$$

ب)



$$(0,1)$$

$$(1,2)$$

$$\xrightarrow[\text{و نقطه‌ی}(1,2)]{\text{باتوجه به متقارن بودن سهمی}}(-1,2)$$

$$y=ax^2+bx+c\xrightarrow{(0,1)}0+c=1\Rightarrow\boxed{c=1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\xrightarrow{(1,2)}a+b+1=2\Rightarrow a+b=1\\ \xrightarrow{(-1,2)}a-b+1=2\Rightarrow a-b=1\end{array}\right\}\Rightarrow a+b=a-b\Rightarrow b=-b\Rightarrow\boxed{b=0}$$

$$a+b=1\xrightarrow{b=0}a=1\ \boxed{y=x^2+1}$$

۴۸ - هر نامعادله را جداگانه حل می‌کنیم و از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$\left.\begin{array}{l}4x-7\le 3x-1\Rightarrow x\le 6\\ 3x-1<2x+5\Rightarrow x<6\end{array}\right\}\Rightarrow(-\infty,6]\ \cap\ (-\infty,6)=\ (-\infty,6)$$

۴۹ - ابتدا همه‌ی عبارت را به یک طرف می‌بریم و ساده می‌کنیم:

$$\frac{2x-3}{x-1}\ge\frac{x}{x+1}\Rightarrow\frac{2x-3}{x-1}-\frac{x}{x+1}\ge 0\Rightarrow\frac{(2x-3)(x+1)-x(x-1)}{(x-1)(x+1)}\ge 0$$

$$\Rightarrow\frac{2x^2+2x-3x-3-x^2+x}{x^2-1}\ge 0\Rightarrow\frac{x^2-3}{x^2-1}\ge 0$$

عبارت بدست آمده را تعیین علامت می‌کنیم:

x		$-\sqrt{۳}$		-۱		۱		$\sqrt{۳}$	
$x^۲-۳$	+	۰	−		−		−	۰	+
$x^۲-۱$	+		+	۰	−	۰	+		+
$\frac{x^۲-۳}{x^۲}$	+	۰	−	ن ت	+	ن ت	−	۰	+

$$x^۲-۳=۰\to x^۲=۳\to x=\pm\sqrt{۳}$$
$$x^۲-۱=۰\to x^۲=۱\to x=\pm۱$$

باتوجه به جدول تعیین علامت، جواب نامعادله به صورت زیر است:

$$(-\infty,-\sqrt{۳}]\cup(-۱,۱)\cup[\sqrt{۳},+\infty)$$

۵۰ - می‌دانیم عبارت $y=ax^۲+bx+c$ زمانی همواره مثبت است که $a>۰$ و $b^۲-۴ac<۰$ باشد باتوجه به این مطلب، داریم:

$a=۱>۰$

$\Delta<۰\to b^۲-۴ac<۰\to m^۲-۴(۱)(۹)<۰\Rightarrow m^۲-۳۶<۰\to m^۲-۳۶=۰\Rightarrow m^۲=۳۶$

$\Rightarrow m=\pm۶\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$

m		-۶		۶	
$m^۲-۳۶$	+	۰	−	۰	+

$\Rightarrow \boxed{-۶<m<۶}$

۵۱ - $\boxed{\begin{array}{l}|x|>a\to x<-a\,,\ x>a\\ |x|<a\quad -a<x<a\end{array}}$

الف) $|x-۲|\le ۳\Rightarrow -۳\le x-۲\le ۳\xrightarrow[\text{طرفین}]{+۲}-۱\le x\le ۵$

ب) $|۳x-۱|\ge ۱\Rightarrow\begin{cases}۳x-۱\ge ۱\Rightarrow ۳x\ge ۲\Rightarrow\boxed{x\ge\frac{۲}{۳}}\\ ۳x-۱\le -۱\Rightarrow ۳x\le ۰\Rightarrow\boxed{x\le ۰}\end{cases}\Rightarrow(-\infty,۰]\cup[\frac{۲}{۳},+\infty)$

۵۲ - $\boxed{|x|<a\ \to\ -a<x<a}$

$$۲<x<۷\xrightarrow[\text{می‌نویسیم } -a<x<a]{\text{به شکل}}۲<x<۷\xrightarrow{-\frac{۹}{۲}}۲-\frac{۹}{۲}<x-\frac{۹}{۲}<۷-\frac{۹}{۲}$$
$$\Rightarrow\frac{۴}{۲}-\frac{۹}{۲}<x-\frac{۹}{۲}<\frac{۱۴}{۲}-\frac{۹}{۲}\Rightarrow\frac{-۵}{۲}<x-\frac{۹}{۲}<\frac{۵}{۲}\to\boxed{|x-\frac{۹}{۲}|<\frac{۵}{۲}}$$

۵۳ -

الف) $x^۲-x=۰\Rightarrow x(x-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x-۱=۰\Rightarrow x=۱\end{cases}$

ب) $x^۲-۱۶=۰\Rightarrow(x-۴)(x+۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}x-۴=۰\Rightarrow x=۴\\ x+۴=۰\Rightarrow x=-۴\end{cases}$

پ) $x^۲+۴x-۲۱=۰\Rightarrow(x+۷)(x-۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}x+۷=۰\Rightarrow x=-۷\\ x-۳=۰\Rightarrow x=۳\end{cases}$

ت) $x^۲-۴x+۴=۰\Rightarrow(x-۲)^۲=۰\Rightarrow x-۲=۰\Rightarrow x=۲$

۵۴ - عدد -۱ ریشه‌ی معادله‌ی $x+۱=۰$ و عدد ۳ ریشه‌ی معادله‌ی $x-۳=۰$ است.

پس کافیست معادله را به صورت $(x-۳)(x+۱)=۰$ بنویسیم:

$$(x-۳)(x+۱)=۰\Rightarrow x^۲+(-۳+۱)x+(-۳)(۱)=۰\Rightarrow x^۲-۲x-۳=۰$$

$x^۲-۲x-۳=۰$ معادله‌ی درجه‌ی دومی با ریشه‌های -۱ و ۳ است.

۵۵ - $\boxed{\begin{array}{l}(a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲\\ (a-b)^۲=a^۲-۲ab+b^۲\end{array}}$

با دیدن عبارت‌های $۴x^۲$ و $۳x^۲$ که در آنها $x^۲$ مضرب دارد، دو راه برای حل مسئله به روش مربع کامل خواهیم داشت:

الف) روش اول) در عبارت $a^۲+۲ab+b^۲$ ، a را برابر با $۲x$ بگیریم که در آنصورت $a^۲=۴x^۲$ خواهد بود:

$$(۲x)^۲-۲(۲x)(\frac{۱}{۲})-\frac{۱}{۲}=۰$$
$$\xrightarrow[+\frac{۳}{۴}]{\text{طرفین}}(۲x)^۲-۲(۲x)(\frac{۱}{۲})-\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۴}=\frac{۳}{۴}$$
$$(۲x)^۲-۲(۲x)(\frac{۱}{۲})+\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$$
$$۴x^۲-۲x+\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

$$(2x-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}\Rightarrow(2x-\frac{1}{2})=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 2x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{3}}{4}\\ 2x-\frac{1}{2}=\frac{-\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 2x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=\frac{1-\sqrt{3}}{4}\end{cases}$$

روش دوم: تمام جملات را تقسیم بر ۴ می‌کنیم:

$$4x^2-2x-\frac{1}{2}=0$$

$$\frac{4x^2}{4}-\frac{2x}{4}-\frac{\frac{1}{2}}{4}=\frac{0}{4}\Rightarrow x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}=0$$

از این جا به بعد مانند قبل عمل می‌کنیم:

$$x^2-2(\frac{1}{4})x-\frac{1}{8}=0\xrightarrow{+\frac{3}{16}\ \text{طرفین}}x^2-2(\frac{1}{4})x-\frac{1}{8}+\frac{3}{16}=\frac{3}{16}$$

$$x^2-2(\frac{1}{4})x+\frac{1}{16}=\frac{3}{16}\Rightarrow x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$$

$$(x-\frac{1}{4})^2=\frac{3}{16}\Rightarrow x-\frac{1}{4}=\pm\frac{\sqrt{3}}{4}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1+\sqrt{3}}{4}\\ x=\frac{-\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1-\sqrt{3}}{4}\end{cases}$$

دقت: در هر دو روش، جواب بدست آمده باید یکسان باشد وگرنه در حل معادله اشتباه کرده‌ایم؛ بعلاوه اینکه همواره می‌توانیم با جایگذاری جواب نهائی بدست آمده در معادله‌ی اصلی از صحت جواب بدست آمده مطمئن شویم.

ب) اگر بخواهیم از روش اول استفاده کنیم با $3x^2=(\sqrt{3}x)^2$ بر می‌خوریم که حل معادله مشکل می‌شود بنابراین از روش دوم بهره می‌گیریم و با تقسیم جملات به ۳، معادله را به شکل استاندارد در می‌آوریم و مانند قبل ادامه می‌دهیم:

$$3x^2-6x+3=1\xrightarrow{\div 3}x^2-2x+1=\frac{1}{3}\Rightarrow(x-1)^2=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x-1=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pm\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{3}+1=\frac{3+\sqrt{3}}{3}\\ x=\frac{-\sqrt{3}}{3}+1=\frac{3-\sqrt{3}}{3}\end{cases}$$

۵۶ - $\boxed{ax^2+bx+c=0\rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}}$

الف) $a=3\quad b=-5\quad c=7$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-4(3)(7)}}{2\times 3}=\frac{5\pm\sqrt{-59}}{6}\Rightarrow \text{معادله جواب ندارد}$$

ب) $2x^2+3x-5-8=0$

دقت کنید رابطه‌ی $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ برای معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ برقرار است.

بنابراین ابتدا معادله را استانداردسازی می‌کنیم:

$$2x^2+3x-13=0$$

$$\left.\begin{array}{l}a=2\\ b=3\\ c=-13\end{array}\right\}\Rightarrow\quad\Delta=b^2-4ac=9-4(2)(-13)=9+104=113$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{113}}{4}$$

پ) $4x^2-3x+2=1\rightarrow 4x^2-3x+1=0$

$$\left.\begin{array}{l}a=4\\ b=-3\\ c=1\end{array}\right\}\Rightarrow\Delta=9-4(4)(1)=9-16=-7\xrightarrow{\Delta<0}\text{معادله جواب ندارد}$$

ت) $۳x^۲ - ۳x + \frac{۳}{۴} = ۰$

$$\left.\begin{array}{l} a = ۳ \\ b = -۳ \\ c = \frac{۳}{۴} \end{array}\right\} \rightarrow \Delta = ۹ - ۴(۳)(\frac{۳}{۴}) = ۹ - ۹ = ۰ \xrightarrow[\text{یک جواب}]{\Delta = ۰} x_۱ = x_۲ = \frac{۳}{۲ \times ۳} = \frac{۱}{۲} \quad \text{ریشه‌ی مضاعف}$$

۵۷ - $\boxed{\Delta = b^۲ - ۴ac \Rightarrow \begin{cases} \Delta > ۰ \rightarrow \text{دو جواب} \\ \Delta = ۰ \rightarrow \text{یک جواب} \\ \Delta < ۰ \rightarrow \text{بدون جواب} \end{cases}}$

الف) $\Delta = \mathbf{b}^۲ - ۴ac = ۱۶ - ۴(۱)(-۱۳) = ۱۶ + ۵۲ = ۶۸ > ۰ \rightarrow$ دو جواب

ب) $\Delta = b^۲ - ۴ac = ۱۶ - ۴(۲)(۲) = ۱۶ - ۱۶ = ۰ \rightarrow$ ۱ جواب (ریشه‌ی مضاعف)

ج) $\Delta = b^۲ - ۴ac = ۴ - ۴(۷)(۱) = ۴ - ۲۸ = -۲۴ < ۰ \rightarrow$ بدون جواب

۵۸ - اگر $۲x$ اولین عدد زوج باشد، $۲x + ۲$ و $۲x + ۴$ دو عدد زوج بعدی خواهند بود و داریم:

$$(۲x)^۲ + (۲x + ۲)^۲ + (۲x + ۴)^۲ = ۴x^۲ + (۴x^۲ + ۸x + ۴) + (۴x^۲ + ۱۶x + ۱۶) = ۲۰۰$$

$$۴x^۲ + ۴x^۲ + ۴x^۲ + ۸x + ۱۶x + ۴ + ۱۶ = ۲۰۰ \Rightarrow ۱۲x^۲ + ۲۴x + ۲۰ = ۲۰۰$$

$$\xrightarrow{\div ۴} ۳x^۲ + ۶x + ۵ = ۵۰ \Rightarrow ۳x^۲ + ۶x - ۴۵ = ۰ \xrightarrow{\div ۳} x^۲ + ۲x - ۱۵ = ۰$$

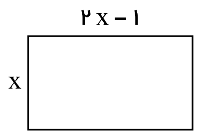
$$\Rightarrow (x + ۵)(x - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۵ \text{ غ.ق.ق} \\ x = ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۶ \\ ۲x + ۲ = ۸ \\ ۲x + ۴ = ۱۰ \end{cases}$$

حاصل جمع آن سه عدد $۶ + ۸ + ۱۰ = ۲۴$

۵۹ -

با فرض مستطیل روبرو داریم:



$$x(۲x - ۱) = ۳ \Rightarrow ۲x^۲ - x = ۳ \Rightarrow ۲x^۲ - x - ۳ = ۰$$

$$\xrightarrow{\div ۲} x^۲ - \frac{x}{۲} - \frac{۳}{۲} = ۰ \rightarrow (x + ۱)(x - \frac{۳}{۲}) = ۰ \begin{cases} x + ۱ = ۰ \rightarrow x = -۱ \text{ (عرض منفی نمی‌شود) غ‌ق‌ق} \\ x - \frac{۳}{۲} = ۰ \rightarrow x = \frac{۳}{۲} \checkmark \end{cases}$$

$$\text{طول} = ۲x - ۱ = ۲ \times \frac{۳}{۲} - ۱ = ۳ - ۱ = ۲$$

$$\text{محیط} = ۲ \times (\text{عرض} + \text{طول}) = ۲(\frac{۳}{۲} + ۲) = ۳ + ۴ = ۷$$

$$\frac{\text{محیط}}{\text{طول}} = \frac{۷}{۲}$$

۶۰ - گزینه ۱ با توجه به جدول تعیین علامت داریم:

۱) $(a - ۱)$ ریشهٔ عبارت است و از $x = ۱$ بزرگ‌تر است بنابراین:

$$(I) = a - ۱ > ۱ \Rightarrow a > ۲$$

۲) ضریب $x^۲ : ۴ - a \Leftarrow (x - ۱)((۴ - a)x + b) = (۴ - a)x^۲ + bx - (۴ - a)x - b$

با توجه به جدول و این‌که عبارت بین دو ریشه تغییر علامت می‌دهد و علامتش مخالف ضریب $x^۲$ است. بنابراین ضریب $x^۲$ مثبت است یعنی $(II) = ۴ - a > ۰ \Rightarrow a < ۴$

$$I \cap II = ۲ < a < ۴ \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} a = ۳$$

$$\Rightarrow A = (x - ۱)(x + b) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ x + b = ۰ \Rightarrow x = -b \end{cases}$$

با توجه به جدول تعیین علامت، ریشه‌های معادله $۱, a - ۱$ است بنابراین:

$$-b = a - ۱ = ۳ - ۱ = ۲ \Rightarrow b = -۲$$

$$a + b = ۳ - ۲ = ۱$$

۶۱ - گزینه ۴ روش اول:

چون یک چندجمله‌ای در زیررادیکال با فرجه‌ی فرد قرار دارد، بنابراین رادیکال با فرجه‌ی فرد به ازای تمام مقادیر x تعریف شده است و فقط باید عبارت زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهید.

$$\frac{۲}{x^۲} - \frac{۹}{۲} \geq ۰ \rightarrow \frac{۴ - ۹x^۲}{۲x^۲} \geq ۰ \rightarrow \begin{cases} \text{صورت} = ۰ \rightarrow ۹x^۲ = ۴ \rightarrow x^۲ = \frac{۴}{۹} \rightarrow x = \pm\frac{۲}{۳} \\ \text{مخرج} = ۰ \rightarrow ۲x^۲ = ۰ \rightarrow x = ۰ \end{cases}$$

$\rightarrow$

x	$-\infty$		$\frac{-۲}{۳}$		$\circ$		$\frac{۲}{۳}$		$+\infty$
عبارت $\geq \circ$		$-$	$\circ$	$+$	ن	$+$	$\circ$	$-$	

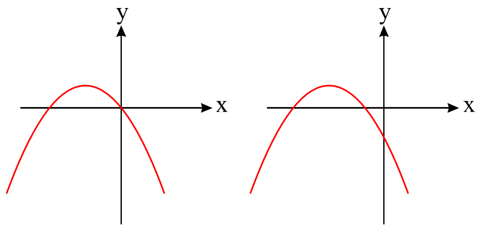
$\rightarrow x \in [\frac{-۲}{۳}, \circ) \cup (\circ, \frac{۲}{۳}]$

روش دوم:

اگر $x = ۱$ باشد زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج، منفی می‌شود بنابراین گزینه‌های اول و سوم که شامل $x = ۱$ هستند حذف می‌شوند در ضمن $x = \circ$ مخرج را صفر می‌کند و گزینه‌ی دوم که شامل $x = \circ$ است نیز حذف می‌شود.

۶۲ ـ گزینه ۲

نمودار سهمی مورد نظر باید به یکی از دو صورت مقابل باشد:



پس اولاً ضریب $x^۲$ باید منفی باشد:

$$a - ۱ < \circ \Rightarrow a < ۱ \quad (۱)$$

طول محل برخورد نمودار با محور xها را به‌دست می‌آوریم:

$$y = (a-۱)x^۲ + (۲a-۱)x + a = \circ$$

$$\Delta = (۲a-۱)^۲ - ۴(a-۱)a = ۱$$

$$x = \frac{-(۲a-۱) \pm ۱}{۲(a-۱)} \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = \frac{a}{۱-a} \end{cases}$$

طبق نمودار سهمی باید، $\frac{a}{a-۱}$ نامثبت باشد پس داریم:

$$\frac{a}{۱-a} \leq \circ \Rightarrow a \leq \circ \text{ یا } a > ۱ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} a \leq \circ$$

۶۳ ـ گزینه ۲

می‌دانیم:

عبارت درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c$ همواره مثبت است هرگاه $\begin{cases} \Delta < \circ \\ a > \circ \end{cases}$

عبارت درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c$ همواره منفی است هرگاه $\begin{cases} \Delta < \circ \\ a < \circ \end{cases}$

جدول تعیین علامت را با اطلاعات مسئله رسم می‌کنیم:

x		$\frac{۳}{۲}$	
۲x-۳	$-$	$\circ$	$+$
$x^۲+mx+m$	?		?
y	$-$	$\circ$	$+$

با توجه به جدول تعیین علامت، عبارت $x^۲ + mx + m$ همواره باید مثبت باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} a > \circ \Rightarrow ۱ > \circ \\ \Delta < \circ \Rightarrow m^۲ - ۴m < \circ \Rightarrow m(m-۴) < \circ \end{cases}$$

$$m(m-۴) = \circ \Rightarrow \begin{cases} m = \circ \\ m - ۴ = \circ \Rightarrow m = ۴ \end{cases}$$

		$\circ$		۴	
$m^۲-۴m$	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$

$\Rightarrow \circ \leq m \leq ۴$

دقت کنید جواب $m = \circ$، معادلهٔ اصلی را تبدیل به $y = (۲x-۳) \times x^۲$ می‌کند که $x = \circ$ یک جواب این معادله است و جدول تعیین علامت متفاوت می‌گردد.

همچنین اگر $m = ۴$ باشد، معادلهٔ اصلی تبدیل به $y = (۲x-۳)(x^۲+۴x+۴)$ می‌شود که $x = -۲$ یک جواب این معادله است و جدول تعیین علامت متفاوت می‌گردد.

بنابراین بازهٔ جواب مورد قبول برای m، بازهٔ $\circ < m < ۴$ است.

۶۴ ـ گزینه ۳ رأس در نقطه‌ی $(\circ, \circ)$ قرار دارد. پس معادله‌ی آن به صورت $y = ax^۲$ است، که از نقطه‌ی $(۲, -۱)$ نیز می‌گذرد.

$$y = ax^۲ \xrightarrow{(۲,-۱)} -۱ = a(۲)^۲ \Rightarrow -۱ = ۴a \Rightarrow a = \frac{-۱}{۴} \Rightarrow y = \frac{-۱}{۴}x^۲$$

اگر سهمی را انتقال دهیم معادله‌ی آن را به صورت $y = \frac{-۱}{۴}x^۲ + bx + c$ فرض می‌کنیم. مختصات نقطه رأس سهمی جدید $(-۲, ۳)$ است، پس خط $x = -۲$ محور تقارن آن است.

$$-\frac{b}{2a}=-2\xrightarrow{a=-\frac{1}{4}}-\frac{b}{-\frac{1}{2}}=-2\Rightarrow -b=1\Rightarrow b=-1\Rightarrow y=-\frac{1}{4}x^2-x+c$$

$$\xrightarrow{(-2,3)}3=\frac{-1}{4}(-2)^2-(-2)+c\Rightarrow 3=-1+2+c\Rightarrow c=2\Rightarrow y=-\frac{1}{4}x^2-x+2$$

۶۵ - گزینه ۱ تلاش می‌کنیم که معادله‌ی $2x^2-12x+7=0$ را به شکل $2(x+b)^2+c=0$ در آوریم:

$$\Rightarrow 2(x^2-6x)+7=0$$

مربع نصف ضریب x را به داخل پرانتز اضافه و کم می‌کنیم تا مربع کامل حاصل شود:

x ضریب $=-6\xrightarrow{\div 2}$ نصف ضریب x $=-3\xrightarrow{(\,)^2}$ مربع نصف ضریب $=9$

$$\left.\begin{matrix}\Rightarrow 2(x^2-6x+9)-18+7=0\quad\Rightarrow 2(x-3)^2-11=0\\ \text{فرض}:\ 2(x+b)^2+c=0\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{مقایسه}}\begin{cases}b=-3\\ c=-11\end{cases}$$

معادله را حل می‌کنیم:

$$2(x-3)^2-11\Rightarrow 2(x-3)^2=11\Rightarrow (x-3)^2=\frac{11}{2}\xrightarrow{\sqrt{}}$$

$$|x-3|=\sqrt{\frac{11}{2}}\Rightarrow\begin{cases}x_1=3=\sqrt{\frac{11}{2}}\Rightarrow x_1=3+\sqrt{\frac{11}{2}}\\ x_2-3=-\sqrt{\frac{11}{2}}\Rightarrow x_2=3-\sqrt{\frac{11}{2}}\end{cases}$$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها $=x_1\times x_2=(3+\sqrt{\frac{11}{2}})(3-\sqrt{\frac{11}{2}})=3^2-(\sqrt{\frac{11}{2}})^2=9-\frac{11}{2}=\frac{7}{2}$

$$\frac{x_1x_2}{b+c}=\frac{\frac{7}{2}}{-3-11}=\frac{-1}{4}$$

۶۶ - گزینه ۱

$$\frac{xf(x)}{|x^2-9|}<0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ f(x)=0\Rightarrow x=1,3\\ x^2-9=0\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=\pm 3\end{cases}$$

	$-\infty$		-3		0		1		3		$+\infty$
x		−		−	0	+		+		+	
f (x)		+		+		+	0	−	0	+	
$\lvert x^2-9\rvert$		+	0	+		+		+	0	+	
A		−	ت ن	−	0	+	0	−	ت ن	+	

$$\Rightarrow x\in(-\infty,0)\cup(1,3)$$

$$(-1,a)\in(-\infty,0)\cup(1,3)\Rightarrow a=0$$

۶۷ - گزینه ۳

ابتدا ریشه‌ها را بدست می‌آوریم.

$$(x^2+x+1)(x^2-4x+3)=0$$

$$\begin{cases}x^2+x+1=0\to\Delta=1^2-4\times1\times1=1-4=-3\to\Delta<0\ \text{ریشه ندارد}\\ x^2-4x+3=0\to(x-1)(x-3)=0\Rightarrow\begin{cases}x-1=0\Rightarrow x=1\\ x-3=0\Rightarrow x=3\end{cases}\end{cases}$$

x		1		3	
x^2+x+1	+		+		+
x^2-4x+3	+	0	−	0	+
کل	+	0	−	0	+

$x<1$ یا $x>3$

۶۸ - گزینه ۴

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8}>\frac{x^2-x-2}{x^2-2x-3}\Rightarrow\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+4)}>\frac{(x-2)(x+1)}{(x-3)(x+1)}\Rightarrow\frac{(x-3)}{(x+4)}-\frac{(x-2)}{(x-3)}>0$$

$$\Rightarrow\frac{x^2-6x+9}{(x+4)(x-3)}-\frac{x^2+2x-8}{(x+4)(x-3)}>0\Rightarrow\frac{-8x+17}{(x+4)(x-3)}>0$$

x		-۴		$\frac{۱۷}{۸}$		۳	
$-۸x+۱۷$	$+$		$+$	۰	$-$		$-$
$(x+۴)(x-۳)$	$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$
$\frac{-۸x+۱۷}{(x+۴)(x-۳)}$	$+$	ت ن	$-$	۰	$+$	ت ن	$-$

$\Rightarrow x \in (-\infty, -۴) \cup (\frac{۱۷}{۸}, ۳)$

۶۹ – الف) تابع است: مؤلفه‌های اول تمام زوج مرتب‌ها با هم متفاوت است.

ب) تابع نیست: وجود دو زوج مرتب $(۱, ۲)$ و $(۱, ۳)$، دو زوج مرتب با مؤلفه‌های اول یکسان و مؤلفه‌های دوم متفاوت را نشان می‌دهد که رابطه را از تابع بودن خارج می‌کند.

پ) تابع است: دقت کنید زوج مرتب $(۱, ۱)$ و $(۲, ۲)$ تنها دو بار نوشته شده‌اند.

ت) تابع است: دقت کنید مولفه‌ی دوم زوج مرتب‌ها، تأثیری در تابع بودن یا نبودن رابطه ندارد.

۷۰ – جواب‌های زیادی می‌توان داد. برای مثال: از A به B:

$f(x) = \{(a, e), (b, h), (c, e), (d, h)\}$ $\qquad$ $g(x) = \{(b, e), (c, e), (d, h), (a, g)\}$

از B به A:

$h(x) = \{(e, a)(e, b)(f, c)(f, d)\}$ $\qquad$ $z(x) = \{(f, a)(f, b)(e, a)(h, d)\}$

– ۷۱

الف) $\{(a, d), (b, e), (c, f)\}$ تابع است

ب) $\{(a, d), (a, e), (c, e)\}$ تابع نیست

پ) $\{(a, g), (b, g), (c, g)\}$ تابع نیست

۷۲ – الف) تابع است: هر عدد، توان سومش یکتاست.

ب) تابع نیست: هر عدد، دو ریشه چهارم قرینه یکدیگر دارد.

پ) تابع است: هر نفر، یک رنگ چشم بیشتر ندارد.

ت) تابع نیست: هر شخص می‌تواند به چند غذا علاقه داشته باشد.

۷۳ – برای اینکه یک رابطه که به صورت زوج مرتب نوشته شده است تابع باشد، باید مؤلفه‌های اول یکسان، مؤلفه‌های دوم یکسان نیز داشته باشند، در واقع زوج مرتب تکراری باشد پس:

الف) $\begin{cases} (۳, ۲a - b) \\ (\frac{۶}{۲}, ۲a + b) \end{cases} \Rightarrow ۲a - b = ۲a + b \Rightarrow b = ۰ \qquad \begin{cases} (۲, ۳) \\ (\frac{۲}{۱}, \frac{۳}{a}) \end{cases} \Rightarrow \frac{۳}{a} = ۳ \Rightarrow a = ۱$

ب) $\begin{cases} (b, a) \\ (b, ۲a - b) \end{cases} \Rightarrow a = ۲a - b \Rightarrow a = b \ \ (I) \qquad \begin{cases} (a, a) \\ (a, ۲b) \end{cases} \Rightarrow a = ۲b \Rightarrow a = b = ۲b \ \ (II)$

$\xrightarrow{I\,,\,II} a = b = ۲b \Rightarrow \begin{matrix} a = ۰ \\ b = ۰ \end{matrix}$

۷۴ – دامنه‌ی تابع f از آنجا که $x \in \mathbb{N}$ است برابر می‌شود با تمام اعداد طبیعی $D_f = \{۱, ۲, ۳, ۴, \cdots\}$ و برد آن باتوجه به $f(۱) = ۳$ ، $f(۲) = ۵$ ، $f(۳) = ۷$ و.... مجموعه اعداد فرد طبیعی بزرگتر از ۲ است:

$R_f = \{۳, ۵, ۷, ۹, \cdots\}$

دامنه‌ی تابع g از آنجا که $x \in \mathbb{Z}$ است برابر می‌شود با مجموعه اعداد صحیح:

$D_y = \{\cdots, -۱, ۰, ۱, \cdots\}$

و با توجه به $g(۲) = ۳$ $g(۱) = ۱$ ،$g(۰) = -۱$ ،$g(-۱) = -۳$ برد آن مجموعه اعداد فرد می‌شود:

$R_g = \{-۳, -۱, ۱, ۳, \cdots\}$

$f(۴) = ۲ \times ۴ + ۱ = ۸ + ۱ = ۹ = g(x) = ۲x - ۱ \Rightarrow ۲x = ۱۰ \Rightarrow x = ۵$

۷۵ – الف) تابع نیست: ۱- از ۳ هیچ فلشی خارج نشده ۲- از صفر دو فلش خارج شده

ب) تابع است. $\{۲, ۴, ۶\} =$ برد $\qquad \{۳, ۲, ۰, ۵, ۱\} =$ دامنه

ج) تابع نیست: خطوط موازی محور y بیش از یک نقطه را روی نمودار قطع می‌کنند که نشان‌دهنده‌ی این است که به ازای یک x، بیش از یک y داریم.

د) تابع است. $\{-۱, ۰, ۱\} =$ برد $\qquad \{-۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴\} =$ دامنه

هـ) تابع نیست: برخی زوج مرتب‌ها مؤلفه‌ی اول یکسان و مؤلفه‌ی دوم متفاوت دارند.

و) تابع است. $\{۱, ۲\} =$ برد $\qquad \{۱, ۲, ۳, ۴\} =$ دامنه

ز) تابع است. $\mathbb{R}^+ =$ برد یا $[۰, +\infty)$ $\qquad \mathbb{R} =$ دامنه

ح) تابع است. $(-a, a) =$ برد $\qquad \mathbb{R} =$ دامنه

ط) تابع نیست: خطوط موازی محور y نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کنند.

ی) تابع نیست: خطوط موازی محور y نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کنند.

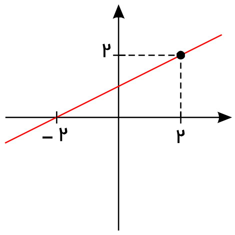
ک) تابع است. $\mathbb{R} =$ برد $=$ دامنه

ل) تابع است.   دامنه = برد = $\mathbb{R}$

۷۶ - باتوجه به دو نقطه‌ی $(۰,۱)$ و $(-۲,۰)$:

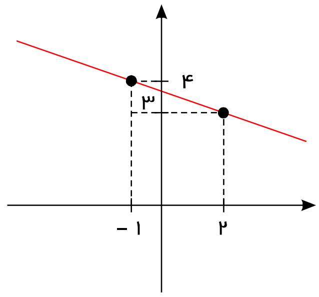
$$y=ax+b\begin{cases}\xrightarrow{(۰,۱)} ۱=b\\ \xrightarrow{(-۲,۰)} ۰=-۲a+۱\Rightarrow -۲a=-۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$y=\frac{۱}{۲}x+۱$ دامنه $=[-۲,۲]\to$ برد $=[۰,۲]$



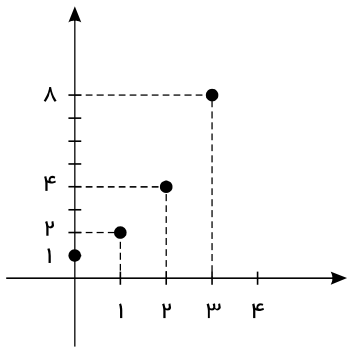
$$y=\frac{۲}{۲}+۱=۲\qquad (۲,۲)$$
$$y=\frac{-۲}{۲}+۱=۰\qquad (-۲,۰)$$

۷۷ - فرم کلی تابع خطی به شکل $y=ax+b$ است؛ باتوجه به سؤال داریم:



$$\begin{cases}f(-۱)=۴\\ f(۲)=۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۴=-a+b\\ ۳=۲a+b\end{cases}\Rightarrow ۴=\frac{۱}{۳}+b\Rightarrow b=۴-\frac{۱}{۳}=\frac{۱۱}{۳}$$
$$۱=-۳a\Rightarrow a=-\frac{۱}{۳}$$
$$y=-\frac{۱}{۳}x+\frac{۱۱}{۳}$$

۷۸ -



$$g(x)=\{(۰,۱),(۱,۲),(۲,۴),(۳,۸)\}$$

تابع $g(x)$ خطی نیست چرا که در معادله $y=ax+b$ صدق نمی‌کند و در حقیقت نقاط روی یک خط واحد قرار ندارند.

۷۹ - گزینه ۱ $\boxed{\text{معادله‌ی سهمی که دامنه آن نقطه‌ی } S\begin{vmatrix}x_۰\\y_۰\end{vmatrix} \text{ باشد، به فرم } y=a(x-x_۰)^۲+y_۰ \text{ است.}}$

با استفاده از رأس $S\begin{vmatrix}۱\\۱\end{vmatrix}$، معادله‌ی سهمی را می‌نویسیم:

$$y=a(x-۱)^۲+۱$$

حال مختصات نقطه‌ی $\begin{vmatrix}۰\\۲\end{vmatrix}$ که روی سهمی است را در آن قرار می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix}۰\\۲\end{vmatrix}\Rightarrow\ ۲=a(۰-۱)^۲+۱\Rightarrow ۲=a+۱\Rightarrow a=۱$$

پس معادله‌ی سهمی عبارتست از:

$$y=(x-۱)^۲+۱$$

معادله‌ی خط نیز با استفاده از دو نقطه‌ی $\begin{vmatrix}۰\\۱\end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix}-\frac{۱}{۲}\\۰\end{vmatrix}$ به‌صورت زیر است:

$$y-۰=\frac{۱-۰}{۰-(-\frac{۱}{۲})}(x+\frac{۱}{۲})\Rightarrow y=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}(x+\frac{۱}{۲})\Rightarrow y=۲(x+\frac{۱}{۲})\Rightarrow y=۲x+۱$$

پس تابع $f(x)$ ضابطه‌ای به‌فرم زیر خواهد داشت:

$$f(x)=\begin{cases}(x-۱)^۲+۱ & x\geq ۰\\ ۲x+۱ & x<۰\end{cases}$$

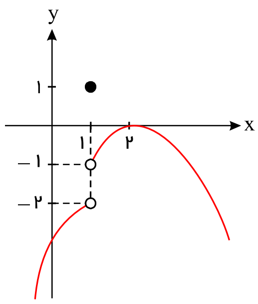
در نتیجه:

$$\left.\begin{array}{l} f(۳)\ \underline{\underline{\text{ضابطه‌ی بالا}}}\ (۳-۱)^۲+۱=۴+۱=۵ \\ f(۴)\underline{\underline{\text{ضابطه‌ی بالا}}}(۴-۱)^۲+۱=۹+۱=۱۰ \\ f(-۱)\ \underline{\underline{\text{ضابطه‌ی پایین}}}\ ۲(-۱)+۱=-۱ \\ f(-۳{,}۵)\ \underline{\underline{\text{ضابطه‌ی پایین}}}\ ۲(-۳{,}۵)+۱=-۷+۱=-۶ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f(۳)-f(۴)}{-f(-۱)+f(-۳{,}۵)}=\frac{۵-۱۰}{-(-۱)-۶}=\frac{-۵}{-۵}=۱$$

۸۰ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\text{برد تابع، تصویر نمودار بر محور } y \text{ ها است.}}$

تابع را به‌صورت زیر بازنویسی و هر ضابطه را در دامنه‌اش رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} -(x-۱)^۲-۲ & ,\ x<۱ \\ ۱ & ,\ x=۱ \\ -(x-۲)^۲ & ,\ x>۱ \end{cases} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow R_f=(-\infty,۰]\cup\{۱\}$$

۸۱ - گزینه ۴ برعکس مراحل مذکور را روی $y=-x^۲$ انجام می‌دهیم تا تابع اولیه به‌دست آید:

$$\xrightarrow{\text{۳ واحد رو به پایین}} y=-x^۲-۳ \xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} y=-(x-۲)^۲-۳=-(x^۲-۴x+۴)-۳$$

$$\Rightarrow y=-x^۲+۴x-۷$$

۸۲ - گزینه ۴

زمانی رابطه‌ای به شکل زوج مرتب تابع است که تمام زوج‌های مرتب آن مؤلفه‌های اول متفاوت داشته باشند یا اگر مؤلفهٔ اول دو زوج مرتب یکسان بود مؤلفه‌های دومشان نیز باهم برابر باشند

$$\begin{cases}(۳,m^۳-m)\\(۳,۰)\end{cases} \Rightarrow m^۳-m=۰\Rightarrow m(m^۲-۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} m=۰ & I \\ m^۲=۱\Rightarrow \begin{cases} m=۱ & II \\ m=-۱ & III\end{cases}\end{cases}$$

با فرض I:

$$m=۰\Rightarrow\begin{cases}(-۳m,m)=(۰,۰)\\(۲m,۲)=(۰,۲)\\(m,۳)=(۰,۳)\end{cases}\Rightarrow m\neq ۰$$

فرض II:

$$m=۱\Rightarrow\begin{cases}(۱,-۲)=(۱,-۲)\\(m,۳)=(۱,۳)\end{cases}\Rightarrow m\neq ۱$$

فرض III:

$$m=-۱\Rightarrow\begin{cases}(-۳m,m)=(۳,-۱)\\(۳,۰)\end{cases}\Rightarrow m\neq -۱$$

پس گزینه‌ی ۴ درست است و هیچ مقداری برای m نیست تا f تابع شود.

۸۳ - گزینه ۱

$$D_f=(-۲,۳]\Rightarrow -۲<x\le ۳\xrightarrow{\times\frac{۳}{۲}}-۳<\frac{۳}{۲}x\le\frac{۹}{۲}\xrightarrow{-۱}-۴<\frac{۳}{۲}x-۱\le\frac{۷}{۲}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{۳}{۲}x-۱\right|<۴\xrightarrow{+۱}۱\le\left|\frac{۳}{۲}x-۱\right|+۱<۵\Rightarrow ۱\le f(x)<۵\Rightarrow R_f=[۱,۵)$$

۸۴ - گزینه ۱

$$g(۱-\sqrt{۲})=(۱-\sqrt{۲})^۲+۲(۱-\sqrt{۲})+۱=۱+۲-۲\sqrt{۲}+۲-۲\sqrt{۲}+۱=۶-۴\sqrt{۲}$$

$$f\left(g(۱-\sqrt{۲})\right)=f(۶-۴\sqrt{۲})=|۶-۴\sqrt{۲}|\ \overset{۶-۴\sqrt{۲}>۰}{=\!=\!=}\ ۶-۴\sqrt{۲}$$

$$f(۱-\sqrt{۲})=|۱-\sqrt{۲}|\ \overset{۱-\sqrt{۲}<۰}{=\!=\!=}\ \sqrt{۲}-۱$$

$$g\left(f(۱-\sqrt{۲})\right)=g(\sqrt{۲}-۱)=(\sqrt{۲}-۱)^۲+۲(\sqrt{۲}-۱)+۱=۲+۱-۲\sqrt{۲}+۲\sqrt{۲}-۲+۱=۲$$

$$f\left(g(۱-\sqrt{۲})\right)-g\left(f(۱-\sqrt{۲})\right)=۶-۴\sqrt{۲}-۲=۴-۴\sqrt{۲}=۴(۱-\sqrt{۲})$$

۸۵ - گزینه ۳

$$\frac{1}{2}x+2\le 3(x-1)$$

$$\frac{1}{2}x+2\le 3x-3$$

$$3x-3-\frac{1}{2}x-2\ge 0$$

$$\frac{5}{2}x-5\ge 0$$

$$\frac{5}{2}x\ge 5$$

$$\frac{1}{2}x\ge 1$$

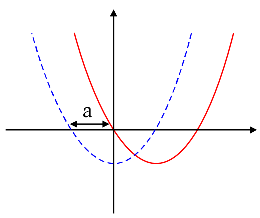
$$\boxed{x\ge 2}\Rightarrow [x_0,+\infty)=[2,+\infty)\Rightarrow \boxed{x_0=2}$$

$$f(x_0)=f(2)=\frac{2}{2}+2=1+2=3$$

۸۶ - گزینه ۳ فرض می‌کنیم تابع را a واحد به سمت راست انتقال دادیم؛ ریشه‌های تابع جدید نباید منفی باشند.

واحد به راست $a:\ y=(x-a)^2-3(x-a)-10$

حداقل مقدار انتقال وقتی است که یکی از ریشه‌ها صفر باشد:



$$0=(0-a)^2-3(0-a)-10$$

$$\Rightarrow 0=(-a)^2-3(-a)-10$$

$$0=a^2+3a-10$$

$$0=(a+5)(a-2)\Rightarrow\begin{cases}a+5=0\Rightarrow a=-5 & \text{غ ق ق}\\ a-2=0\Rightarrow a=2\end{cases}$$

۸۷ - گزینه ۱

$$f(x+1)=x^2+4x\Rightarrow f(x+1)=x(x+4)$$

$$x+1=t\Rightarrow\begin{cases}x=t-1\\ 4+x=t+3\end{cases}\Rightarrow\ f(t)=(t-1)(t+3)$$

$$x-1=t\Rightarrow\begin{cases}t-1=x-2\\ t+3=x+2\end{cases}\Rightarrow\ f(x-1)=(x-2)(x+2)=x^2-4$$

۸۸ - گزینه ۲

$$x\le -1\Rightarrow -\infty<x\le -1\Rightarrow -\infty<x+2\le 2\Rightarrow (x+3)^2\ge 0$$

$$\Rightarrow (x+3)^2\in[0,+\infty)$$

$$-1<x\le 2\Rightarrow 0\le |x|\le 2\Rightarrow -2\le -|x|\le 0\Rightarrow -3\le -|x|-1\le -1$$

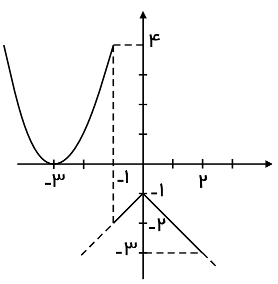
$$\Rightarrow -|x|-1\in[-3,-1]$$

$$R_f=[-3,-1]\cup[0,+\infty)=[a,b]\cup[c,+\infty)\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\ b=-1\\ c=0\end{cases}\Rightarrow a+b+c=-4$$

راه دوّم:

$$f(x)=\begin{cases}(x+3)^2 & x\le -1\\ -|x|-1 & -1<x\le 2\end{cases}$$

ابتدا تابع $f(x)$ را به کمک انتقال رسم می‌کنیم: برای رسم تابع $y=(x+3)^2$ نمودار $y=x^2$ نمودار $y=x^2$ را به اندازهٔ ۳ واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم و برای رسم تابع $y=-|x|-1$ تابع $y=|x|$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا $y=-|x|$ به دست آید.



سپس آن‌را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا تابع $y=-|x|-1$ رسم شود. حال با توجه به شکل $f(x)$، برد آن به صورت زیر می‌باشد:

$f_{\text{برد}}=[-۳,-۱]\cup[۰,+\infty)=[a,b]\cup[c,+\infty)$

$\Rightarrow a=-۳, b=-۱, c=۰ \Rightarrow a+b+c=-۴$

۸۹ - گزینه ۲

$f(-۱۴۴)=\sqrt{-۱۴۴+۲\,|-۱۴۴|}=\sqrt{-۱۴۴+۲\times ۱۴۴}=\sqrt{۱۴۴(-۱+۲)}=\sqrt{۱۴۴}=۱۲$

$f\left(f(-۱۴۴)\right)=f(۱۲)=\sqrt{۱۲+۲\,|۱۲|}=\sqrt{۱۲+۲(۱۲)}=\sqrt{۱۲+۲۴}=\sqrt{۳۶}=۶$

۹۰ - گزینه ۱

$f(۱)=f(۰)-۲f(-۱)=۱-۲(-۱)=۱+۲=۳$

$f(۲)=f(۱)-۲f(۰)=۳-۲(۱)=۳-۲=۱$

$f(۳)=f(۲)-۲f(۱)=۱-۲(۳)=۱-۶=-۵$

پاسخنامه کلیدی

۳ - ۲	۲۴ - ۴	۳۱ - ۴	۴۲ - ۳	۶۵ - ۱	۸۲ - ۴	۸۹ - ۲
۴ - ۳	۲۵ - ۱	۳۶ - ۴	۴۳ - ۲	۶۶ - ۱	۸۳ - ۱	۹۰ - ۱
۱۱ - ۲	۲۶ - ۳	۳۷ - ۲	۶۰ - ۱	۶۷ - ۳	۸۴ - ۱	
۱۲ - ۴	۲۷ - ۴	۳۸ - ۲	۶۱ - ۴	۶۸ - ۴	۸۵ - ۳	
۱۳ - ۴	۲۸ - ۳	۳۹ - ۲	۶۲ - ۲	۷۹ - ۱	۸۶ - ۳	
۱۴ - ۳	۲۹ - ۳	۴۰ - ۳	۶۳ - ۲	۸۰ - ۳	۸۷ - ۱	
۱۵ - ۴	۳۰ - ۱	۴۱ - ۱	۶۴ - ۳	۸۱ - ۴	۸۸ - ۲	