نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۹۰ دقیقه

نام آزمون: ریاضی

دبیرستان: فاخران

تاریخ آزمون: ۱۳۹۸/۰۷/۰۳

۱ اگر A ماتریس 3×3 باشد و $|A|=4$، آنگاه دترمینان ماتریس $|A|\cdot A$، کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۹۶ ۳) ۱۲۸ ۴) ۲۵۶

۲ در یک ذوزنقه، خطی که وسط ساق‌ها را بهم وصل کند مساحت آن را به نسبت ۳ به ۵ تقسیم می‌کند، نسبت قاعده‌های ذوزنقه کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{3}{5}$

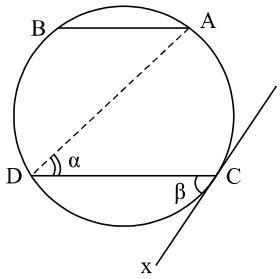
۳ از رابطهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix}x & 2x & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 4 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 2x\\ -1\end{bmatrix}=0$، عدد غیرصفر x، کدام است؟

۱) $\frac{2}{9}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{3}{5}$

۴ اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{bmatrix}$، از رابطهٔ ماتریسی $AX=A-2I$، ماتریس X، کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 4 & -1\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{bmatrix}$

۵ در شکل زیر، وتر AB برابر شعاع دایره و $AB\|CD$، زاویهٔ $\beta=2\alpha$ و CX مماس بر دایره است. کمان $\overset{\frown}{BD}$ چند درجه است؟



۱) 50°
۲) 60°
۳) 70°
۴) 75°

۶ نمودار تابع $y=-x^2+2x+5$ را ۳ واحد به طرف x های مثبت، سپس ۲ واحد به طرف y های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟

۱) $(3,4)$ ۲) $(2,5)$ ۳) $(3,5)$ ۴) $(2,6)$

۷ گزارهٔ $\sim(p\Rightarrow q)$، با کدام گزارهٔ زیر، هم‌ارزش است؟

۱) $\sim p\vee q$ ۲) $p\vee\sim q$ ۳) $\sim p\wedge q$ ۴) $p\wedge\sim q$

۸ گزارهٔ سوری $\forall x\in\mathbb{N},\exists y\in\mathbb{N};P(x,y)$، با کدام گزاره‌نمای $P(x,y)$ دارای ارزش درست است؟

۱) $y-x=6$ ۲) $x-y=6$ ۳) $x+y=6$ ۴) $xy=6$

۹ وتر مشترک دایرهٔ C با دایره با معادلهٔ $x^2+y^2-4x=6$ منطبق بر نیمساز ناحیهٔ اول است. اگر دایرهٔ C از نقطهٔ $(-1,4)$ بگذرد، معادلهٔ آن کدام است؟

۱) $x^2+y^2-y+3x=6$ ۲) $x^2+y^2+2y-x=6$ ۳) $x^2+y^2-2y+x=6$ ۴) $x^2+y^2-3y-x=6$

۱۰ اگر $A=\{1,2,\{1,2\},\{1,\{1,2\}\},\{2\}\}$ و $B=\{\{1\},\{1,2\}\}$ باشند، تعداد زیرمجموعه‌های $A\cap B'$، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۱۱ یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، با کدام شرط قابل محیط بر دایره است؟

۱) دو قطر عمود بر هم
۲) یکی از قاعده‌های ذوزنقه، برابر یکی از ساق‌ها
۳) خط واصل وسط دو ساق، گذرا از محل تلاقی قطرها
۴) طول پاره‌خط واصل وسط دو ساق، برابر اندازهٔ یکی از ساق‌ها

۱۲ اگر مساحت شش ضلعی منتظم محاط در یک دایره $۶\sqrt{۳}$ باشد. آنگاه مساحت شش ضلعی منتظم محیط بر این دایره، چند برابر $\sqrt{۳}$ است؟

۱) ۷٫۲
۲) ۷٫۵
۳) ۸
۴) ۹

۱۳ اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$ و $g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$ باشند. تابع $\frac{g}{gof^{-۱}}$، کدام است؟

۱) $\{(۴,۲),(۵,۲)\}$
۲) $\{(۴,۲),(۳,۵)\}$
۳) $\{(۵,۲),(۲,۴)\}$
۴) $\{(۳,۵),(۲,۴)\}$

۱۴ در یک بیضی به اقطار $۲\sqrt{۵}$ و ۲ واحد، دایره‌ای هم‌مرکز با بیضی و شعاع ۲ واحد، بیضی را در نقطهٔ M قطع می‌کند. مجموع مربعات فواصل M از دو کانون بیضی، کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۶
۳) ۱۸
۴) ۲۰

۱۵ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عددی بر ۶ و ۱۱ به‌ترتیب ۵ و ۷ باشد، آنگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم این عدد بر ۶۶، کدام است؟

۱) ۲۹
۲) ۳۲
۳) ۴۰
۴) ۴۱

۱۶ اگر عدد $۷^{۱۳}+a$ بر ۲۳ بخش‌پذیر باشد، کوچک‌ترین عدد طبیعی a، کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۷ در چهارضلعی $ABCD$، وسط دو ضلع غیرمجاور و وسط دو قطر آن، رأس‌های یک لوزی است. الزاماً کدام نتیجه‌گیری در مورد چهارضلعی مفروض، درست است؟

۱) دو ضلع غیرمجاور، دیگر، برابرند.
۲) .دو قطر عمود برهم‌اند.
۳) دو ضلع شامل رأس‌های لوزی، برابرند.
۴) دو ضلع غیرمجاور، موازی‌اند.

۱۸ به‌ازای بعضی از مقادیر $n\in\mathbb{N}$، اگر $\alpha|۱۳n+۳$ و $\alpha|۷n+۴$ و $\alpha\neq ۱$ باشد، آنگاه مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد n، کدام است؟

۱) ۷
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۰

۱۹ معادلهٔ یک سهمی با کانون $F(۲,۱)$ و خط هادی به معادلهٔ $x=۴$، کدام است؟

۱) $y^۲-۲y+۴x=۱۱$
۲) $y^۲-۲y+۲x=۵$
۳) $x^۲-۴x+۴y=۰$
۴) $x^۲-۶x+۲y=-۵$

۲۰ قیمت هر واحد از دو نوع کالای متمایز به‌ترتیب ۲۲۰ و ۱۴۰ تومان است. با مبلغ ۱۹۰۰۰ تومان، به چند طریق می‌توان از این دو نوع کالا، خریداری کرد؟

۱) ۱۰
۲) ۱۱
۳) ۱۲
۴) ۱۳

۲۱ نقطهٔ A و خط d و صفحهٔ P مفروض‌اند. در رسم صفحه‌ای گذرا از نقطهٔ A، موازی خط d و عمود بر صفحهٔ P، در کدام حالت، تعداد جواب‌ها، بی‌شمار است؟

۱) $d\cap P=d$
۲) $d\cap P\neq\phi$
۳) $d\|P$
۴) $d\perp P$

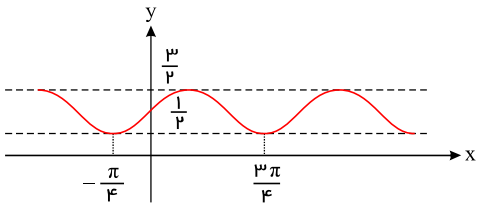
۲۲ حاصل عبارت $\tan\frac{۱۱\pi}{۴}+\sin\frac{۱۵\pi}{۴}\cos\frac{۱۳\pi}{۴}$، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۳ در یک مکعب، صفحهٔ گذرا بر یک یال و وسط یال دیگر، آن را به دو قطعهٔ نابرابر تقسیم می‌کند. نسبت حجم‌های این دو قطعه، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$
۴) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

۲۴ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = ۱ + a\sin bx\cos bx$ است. $a+b$ کدام است؟

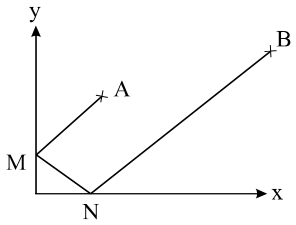


۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) ۳

۲۵ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۳ x + \cos^۳ x = ۱ - \frac{۱}{۲}\sin ۲x$، در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$، کدام است؟

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$
۲) $\frac{۷\pi}{۲}$
۳) ۲π
۴) ۳π

۲۶ نقاط $A\begin{vmatrix}۳\\۵\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}۹\\۱۱\end{vmatrix}$ در صفحهٔ محورهای مختصات مفروض‌اند، دو نقطهٔ M و N همواره روی دو محور می‌لغزند. کمترین اندازهٔ خط شکستهٔ $AMNB$، کدام است؟



۱) ۱۸
۲) ۱۹
۳) ۲۰
۴) ۲۱

۲۷ نقطهٔ A در صفحه دو خط متقاطع d و d' است. در رسم مثلث متساوی‌الاضلاع به رأس A، که دو رأس دیگر آن بر روی هر یک از دو خط مفروض باشد، کدام تبدیل هندسی به‌کار می‌رود؟

۱) انتقال
۲) بازتاب
۳) تجانس
۴) دوران

۲۸ یک گراف سادهٔ ۶رأسی ۴–منتظم، دارای چند دور با طول ۴ است؟

۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۵

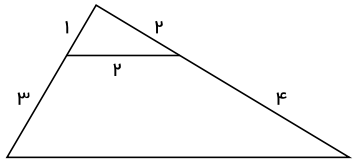
۲۹ به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر x، بازهٔ $(x+۱, ۲x-۱)$ یک همسایگی عدد ۳ می‌باشد؟

۱) $\varnothing$
۲) $\{۲\}$
۳) $۲ < x < ۲/۵$
۴) $۱/۵ < x < ۲$

۳۰ در دو جعبه به‌ترتیب ۲۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبهٔ اول ۴ لامپ و در جعبهٔ دوم ۳ لامپ معیوب است. از جعبهٔ اول ۵ لامپ و از جعبهٔ دوم ۷ لامپ، به‌تصادف برداشته و در جعبهٔ جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال، یک لامپ انتخابی از جعبهٔ جدید، معیوب است؟

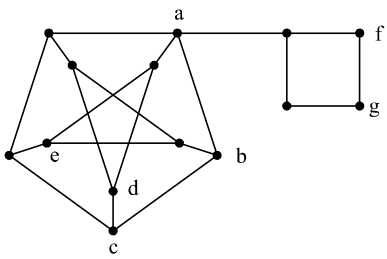
۱) $\frac{۵}{۲۴}$
۲) $\frac{۱۱}{۴۸}$
۳) $\frac{۱۳}{۴۸}$
۴) $\frac{۷}{۲۴}$

۳۱ در شکل روبه‌رو، اندازهٔ ضلع بزرگتر چهارضلعی کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۱۰}$
۲) $۲\sqrt{۱۱}$
۳) $۴\sqrt{۳}$
۴) $۵\sqrt{۲}$

۳۲ کدام مجموعه برای گراف روبه‌رو، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است؟



۱) $\{a, c, e, g\}$
۲) $\{a, d, e, g\}$
۳) $\{a, b, d, e\}$
۴) $\{a, d, e, f\}$

۳۳ در مثلث ABC نقطهٔ M وسط BC است. نیمسازهای دو زاویهٔ AMB و AMC دو ضلع مثلث را در P و Q قطع می‌کنند. نقطهٔ O محل تلاقی AM و PQ است. OM برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}BC$
۲) AQ
۳) OA
۴) OP

ریاضی

۳۴ در دو پیشامد مستقل A و B، اگر $P(A\cap B)=۰/۶$ و $P(A\cap B')=۰/۲$، آنگاه $P(A\cup B')$، کدام است؟

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۸۵ ۴) ۰/۹

۳۵ به‌ازای کدام مقدار m، سه بردار $\vec{a}=(-۱,۲,۳)$، $\vec{b}=(۲,۰,۱)$ و $\vec{c}=(-۴,m,۵)$ در یک صفحه‌اند؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۶ اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{۲x-۵}{x^۲+ax+b}=-\infty$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۳۷ به‌ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۳x-۶}{x-\sqrt{x+۲}} & ;\ x>۲\\ ax-۱ & ;\ x\le ۲\end{cases}$، بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی، پیوسته است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

۳۸ نمرات ریاضی ۴۰ دانش‌آموز یک کلاس در جدول زیر آمده است. میانگین وزنی نمرات، کدام است؟

x	۱۰	۱۲	۱۴	۱۵	۱۷	۱۸
f	۵	۸	۷	۱۰	۶	۴

۱) ۱۴/۲ ۲) ۱۴/۲۵ ۳) ۱۴/۴ ۴) ۱۴/۷۵

۳۹ نرخ بیکاری یک کشور در ۱۰ سال گذشته به‌صورت زیر است، مقدار $\dfrac{Q_۱+Q_۳-۲Q_۲}{Q_۳-Q_۱}$ کدام است؟

۱۲/۷, ۳۰/۲, ۱۰/۶, ۱۱/۹, ۱۰/۶, ۱۲/۳, ۱۱/۲, ۱۳/۵, ۱۲/۸, ۱۱/۵

۱) $-۰/۲۲۵$ ۲) $-/۰۱۲۵$ ۳) ۰/۱۷۵ ۴) ۰/۲۷۵

۴۰ به چند طریق می‌توان ۱۱ توپ یکسان را بین ۵ نفر توزیع کرد، به‌طوری‌که هر نفر حداقل، یک توپ داشته باشد؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۲۰

۴۱ حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin a\cos x+\cos a\sin x-\sin a}{x}$، کدام است؟

۱) $-\sin a$ ۲) $-\cos a$ ۳) $\cos a$ ۴) $\sin a$

۴۲ تعداد مربع‌های لاتین متعامد با مربع لاتین

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۴۳ اگر $g(x)=x+\sqrt{x}$ و $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\dfrac{۴}{۳}$ باشد، $(fog)'(۱)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۲}{۳}$ ۲) $\dfrac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۴ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}|x^۲-۲x| & ;\ x<۲\\ \dfrac{۱}{۲}x^۲+ax+b & ;\ x\ge ۲\end{cases}$، در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است. $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۵ تعداد توابع پوشا، از یک مجموعهٔ ۶عضوی به یک مجموعهٔ ۳عضوی، کدام است؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۴۵۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۵۴۰

ریاضی

۴۶ از مجموعهٔ اعداد $\{۵, ۸, ۱۱, \cdots, ۶۵, ۶۸, ۷۱\}$ که به‌صورت یک تصاعد عددی مرتب شده است. یک زیرمجموعهٔ حداقل چند عضوی انتخاب شود تا مطمئن باشیم، لااقل دو عدد در این زیرمجموعه موجود است که جمع آن‌ها، ۸۲ باشد؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

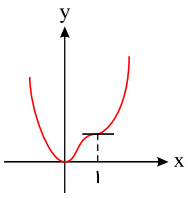
۴۷ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = (x+۲)\sqrt{۴x+۱}$، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[۰, ۲]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = \frac{۳}{۴}$ چقدر بیشتر است؟

۱) ۰٫۱۰ ۲) ۰٫۱۵ ۳) ۰٫۲۰ ۴) ۰٫۲۵

۴۸ فاصلهٔ نقطهٔ مینیمم مطلق تابع $f(x) = \frac{x^۲+۲x}{(x-۱)^۲}$، از خط مجانب قائم آن کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۴۹ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x) = ۳x^۴ + ax^۳ + bx^۲ + cx$ است. a کدام است؟



۱) -۸ ۲) -۷ ۳) -۵ ۴) -۴

۵۰ اگر $A = \sqrt[۵]{۴\sqrt[۳]{۱۶}}(\frac{۱}{۲})^{-\frac{۴}{۳}}$ باشد، حاصل $(۲A)^{-\frac{۱}{۳}}$، کدام است؟

۱) ۰٫۲۵ ۲) ۰٫۵ ۳) ۰٫۷۵ ۴) ۱

۵۱ مجموع تمام اعداد طبیعی دورقمی مضرب ۷، کدام است؟

۱) ۷۲۱ ۲) ۷۲۸ ۳) ۷۳۵ ۴) ۷۴۲

۵۲ به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر m، معادلهٔ درجه دوم $(۲m-۱)x^۲ + ۶x + m - ۲ = ۰$، دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است؟ (با کمی تغییر)

۱) $-۲ < m < ۲٫۵ - \{۰\}$ ۲) $-۲ < m < ۳٫۵ - \{\frac{۱}{۲}\}$ ۳) $-۱ < m < ۳٫۵ - \{\frac{۱}{۲}\}$ ۴) $-۱ < m < ۲٫۵ - \{\frac{۱}{۲}\}$

۵۳ بهروز یک مجلّه را به‌تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به‌تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۳ ۳) ۳۵ ۴) ۳۶

۵۴ نمودار یک تابع به‌صورت $f(x) = -۲ + (\frac{۱}{۲})^{Ax+B}$، نمودار تابع $y = x^۲ - x$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ قطع می‌کند. $f(۳)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

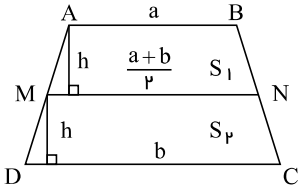
پاسخنامه تشریحی

۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

نکته: اگر A ماتریس مربعی $n \times n$ و k عددی حقیقی باشد، آنگاه $|kA| = k^n|A|$

$$\left||A|A\right| = |۴A| = ۴^۳|A| = ۴^۳ \times ۴ = ۴^۴ = ۲۵۶$$

۲ ۱ **۲** ۳ ۴



$$\frac{S_۱}{S_۲} = \frac{\frac{(\frac{a+b}{۲}+a)}{۲} \times h}{\frac{(\frac{a+b}{۲}+b)}{۲} \times h} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{۳a+b}{۳b+a} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow ۱۵a + ۵b = ۹b + ۳a \Rightarrow ۱۲a = ۴b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{۱}{۳}$$

۳ ۱ ۲ ۳ ۴ **۱**

$$\begin{bmatrix} x & ۲x & -۱ \end{bmatrix}_{۱\times۳} \begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۱ \\ ۴ & ۰ & -۲ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}_{۳\times۳} \begin{bmatrix} x \\ ۲x \\ -۱ \end{bmatrix}_{۳\times۱} = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۱۱x - ۱ & -x - ۲ & -۳x \end{bmatrix}_{۱\times۳} \begin{bmatrix} x \\ ۲x \\ -۱ \end{bmatrix}_{۳\times۱} = ۰$$

$$\Rightarrow [۱۱x^۲ - x - ۲x^۲ - ۴x + ۳x] = ۰ \Rightarrow ۹x^۲ - ۲x = ۰ \Rightarrow x(۹x - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = \frac{۲}{۹} \end{cases}$$

۴ ۱ **۲** ۳ ۴

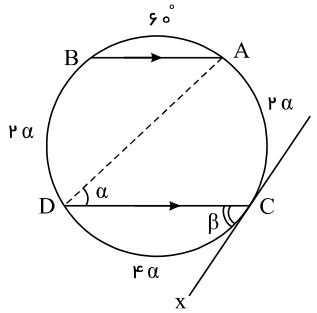
– نکته: اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $|A| \neq ۰$ آهنگ وارون ماتریس A از دستور $A^{-۱} = \frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ حاصل می‌گردد.

– نکته: اگر A وارون‌پذیر باشد، آنگاه $AA^{-۱} = A^{-۱}A = I$

$$AX = A - ۲I \xrightarrow[\text{از چپ}]{A^{-۱}\times \text{طرفین}} A^{-۱}AX = A^{-۱}(A - ۲I) \Rightarrow IX = A^{-۱}A - ۲A^{-۱}I$$

$$\Rightarrow X = I - ۲A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - ۲ \times \frac{۱}{۶-۴}\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$$

۵ ۱ ۲ ۳ **۴**



$$AB = \underbrace{R}_{\text{شعاع}} \rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$$

$$\overset{\frown}{AC} \overset{\text{محاطی}}{=\!=} ۲\alpha \ , \ \overset{\frown}{DC} \overset{\text{ظلی}}{=\!=} ۴\alpha$$

$$\overset{\frown}{BD} \overset{\text{کمان محصور}}{=\!=} \overset{\frown}{AC} = ۲\alpha$$

$$\Rightarrow ۶۰ + ۲\alpha + ۲\alpha + ۴\alpha = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۸\alpha = ۳۰۰ \Rightarrow \alpha = \frac{۷۵^\circ}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = ۲\alpha = ۷۵^\circ$$

۶ ۱ ۲ ۳ ۴ **۱**

می‌دانیم: برای اینکه ۳ واحد به سمت x های مثبت منتقل شود باید به‌جای x عبارت $x - ۳$ و برای اینکه به طرف y های منفی منتقل شود باید به کل تابع عدد ۲– اضافه شود؛ بنابراین داریم:

$$y = -(x-۳)^۲ + ۲(x-۳) + ۵ - ۲ = -x^۲ + ۶x - ۹ + ۲x - ۶ + ۳ \Rightarrow y = -x^۲ + ۸x - ۱۲$$

و برای اینکه این تابع بالای نیمساز ربع اول قرار گیرد باید:

ریاضی

$$-x^{۲}+۸x-۱۲>x\Rightarrow x^{۲}-۷x+۱۲<۰\Rightarrow(x-۳)\cdot(x-۴)<۰\Rightarrow ۳<x<۴$$

۷ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\sim(p\Rightarrow q)\equiv\sim(\sim p\vee q)\equiv\sim(\sim p)\wedge\sim q\equiv p\wedge\sim q$$

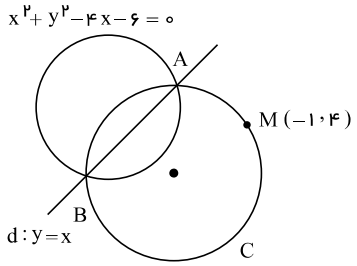
۸ ۱ ۲ ۳ ۴ باید به‌دنبال گزینه‌ای بگردیم که به‌ازای هر مقدار دلخواه و طبیعی x مقداری طبیعی برای y یافت شود.

در رابطهٔ $y-x=۶$ یعنی $y=x+۶$ به‌ازای هر مقدار طبیعی x، مقداری طبیعی برای y وجود دارد.

۹ ۱ ۲ ۳ **۴** روش اول:

وتری مشترک دو دایرهٔ متقاطع خطی است که از نقاط تقاطع آن‌ها می‌گذرد.

برای محاسبهٔ مختصات نقاط A و B کافی است نقاط برخورد خط $y=x$ و دایرهٔ $x^{۲}+y^{۲}-۴xy=۶$ را بیابیم:



$$A\text{ و }B:\begin{cases}y=x\\x^{۲}+y^{۲}-۴x-۶=۰\end{cases}\Rightarrow ۲x^{۲}-۴x-۶=۰\Rightarrow(x-۳)(x+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۳\Rightarrow y=۳\Rightarrow A\left|\begin{matrix}۳\\۳\end{matrix}\right.\\x=-۱\Rightarrow y=-۱\Rightarrow B\left|\begin{matrix}-۱\\-۱\end{matrix}\right.\end{cases}$$

فرض می‌کنیم معادلهٔ دایرهٔ C' به‌فرم $C'(x,y):x^{۲}+y^{۲}+ax+by+c=۰$ باشد.

$$A(۳,۳)\in C'\xrightarrow{\text{صدق دهید.}}۹+۹+۳a+۳b+c=۰\Rightarrow ۳a+۳b+c=-۱۸\quad(۱)$$

$$B(-۱,-۱)\in C'\xrightarrow{\text{صدق دهید.}}۱+۱-a-b+c=۰\Rightarrow -a-b+c=-۲\quad(۲)$$

$$m(-۱,۴)\in C'\xrightarrow{\text{صدق دهید.}}۱+۱۶-a+۴b+c=۰\Rightarrow -a+۴b+c=-۱۷\quad(۳)$$

$$\Rightarrow\begin{matrix}(۱)\\(۲)\\(۳)\end{matrix}\begin{cases}۳a+۳b+c=-۱۸\\-a-b+c=-۲\\-a+۴b+c=-۱۷\end{cases}$$

$$(۳)-(۲):۵b=-۱۵\Rightarrow b=-۳$$

$$(۱)+۳\times(۲):c+۳c=-۲۴\Rightarrow c=-۶$$

$$\xrightarrow[c=-۶]{b=-۳}(۲):-a+۳-۶=-۲\Rightarrow -a-۳=-۲\Rightarrow a=-۱$$

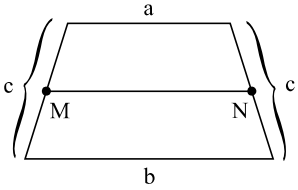
معادلهٔ دایرهٔ C' : $C':x^{۲}+y^{۲}-x-۳y-۶=۰$

۱۰ ۱ ۲ **۳** ۴ ابتدا مجموعهٔ $A\cap B'$ را می‌یابیم:

$$A\cap B'=A-B=\left\{۱,۲,\underline{\underline{\{۱,۲\}}},\{۱,\{۱,۲\}\},\{۲\}\right\}-\left\{\{۱\},\underline{\underline{\{۱,۲\}}}\right\}=\left\{۱,۲,\{۱,\{۱,۲\}\},\{۲\}\right\}$$

پس مجموعهٔ $A\cap B'$ دارای ۴ است بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های آن $۲^{۴}=۱۶$ می‌باشد.

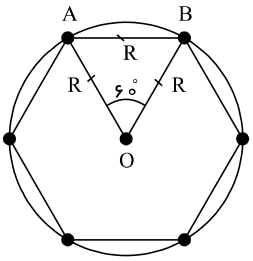
۱۱ ۱ ۲ ۳ **۴**



ذوزنقهٔ محیطی: $a+b=c+c=۲c\Rightarrow c=\dfrac{a+b}{۲}=MN$

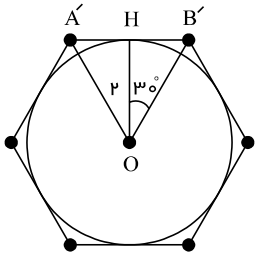
۱۲ ۱ ۲ **۳** ۴

$$S_{\text{ضلعی منتظم محاطی } ۶} = ۶ \times S_{\overset{\Delta}{OAB}} = ۶ \times \frac{R^۲\sqrt{۳}}{۴} = ۶\sqrt{۳} \Rightarrow R^۲ = ۴ \to R = ۲$$



$$\overset{\Delta}{OB'H} : \tan ۳۰^\circ = \frac{B'H}{OH} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{B'H}{۲} \to B'H = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow A'B' = ۲B'H = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

$$S_{\text{ضلعی منتظم } ۶} = ۶ \times S_{\overset{\Delta}{OA'B'}} = ۶ \times \frac{A'B'^۲ \times \sqrt{۳}}{۴} = \frac{۶ \times \frac{۱۶}{۳} \times \sqrt{۳}}{۴} = ۸\sqrt{۳}$$



۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم: $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = ۰\}$

$$D_{fog} = \{x | x \in D_g \, , \, g(x) \in D_f\}$$

ابتدا $f^{-۱}$ را می‌نویسیم:

$$f^{-۱} = \{(۲,۱), (۵,۲), (۴,۳), (۶,۴)\}$$

و سپس $gof^{-۱}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$gof^{-۱} = \{(۵,۳), (۴,۱), (۶,۲)\}$$

حال زوج‌مرتب $\frac{g}{gof^{-۱}}$ را پیدا می‌کنیم:

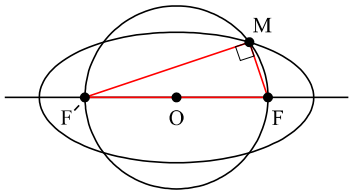
$$\frac{g}{gof^{-۱}} = \{(۵,۲), (۴,۲)\}$$

۱۴ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\text{قطر بزرگ بیضی} = ۲\sqrt{۵} = ۲a \Rightarrow a = \sqrt{۵}$$

$$\text{قطر کوچک بیضی} = ۲ = ۲b \Rightarrow b = ۱$$

$$\text{شعاع دایره} = \text{می‌دانیم} : a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۵ = ۱ + c^۲ \Rightarrow c = ۲$$



پس دایرهٔ مورد نظر از کانون‌های F و F' چون نقطهٔ M روی دایره قرار دارد پس در مثلث $\overset{\Delta}{MFF'}$ زاویهٔ M برابر ۹۰° می‌باشد بنابراین:

$$\overset{\Delta}{MFF'} : \underbrace{FF'^۲}_{۲c} = MF^۲ + MF'^۲ \Rightarrow (۴)^۲ = MF^۲ + MF'^۲ \Rightarrow MF^۲ + MF'^۲ = ۱۶$$

۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴ روش اول:

نکته: اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $a \overset{n}{\equiv} b$، آنگاه $a \overset{[m,n]}{\equiv\equiv} b$

$$\left.\begin{array}{l} a = ۶q + ۵ \Rightarrow a \overset{۶}{\equiv} ۵ \overset{۶}{\equiv} ۲۹ \\ a = ۱۱q' + ۷ \Rightarrow a \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \overset{۱۱}{\equiv} ۲۹ \end{array}\right\} \longrightarrow a \overset{[۶,۱۱]=۶۶}{\equiv\equiv} ۲۹$$

روش دوم:

$$\left.\begin{array}{l} a = ۶q + ۵ \xrightarrow{\times ۱۱} ۱۱a = ۶۶q + ۵۵ \\ a = ۱۱q' + ۷ \xrightarrow{\times ۶} ۶a = ۶۶q' + ۴۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{-} ۵a = ۶۶\underbrace{(q - q')}_{q''} + ۱۳ \Rightarrow ۵a = ۶۶q'' + ۱۳$$

داشتیم $۶a = ۶۶q' + ۴۲$ پس:

$$\begin{cases} ۵a = ۶۶q'' + ۱۳ \\ ۶a = ۶۶q' + ۴۲ \end{cases} \xrightarrow{-} a = ۶۶\underbrace{(q' - q'')}_{k} + ۲۹ \Rightarrow a = ۶۶k + ۲۹$$

روش سوم:

گزینه‌ای درست است که باقی‌ماندهٔ آن بر ۶ عدد ۵ و باقی‌ماندهٔ آن بر ۱۱ عدد ۷ باشد.

۱۶ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا باقی‌ماندهٔ $۷^{۱۳}$ را بر ۲۳ می‌یابیم:

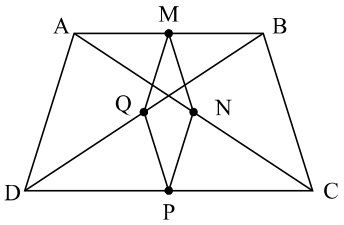
$$۷^{۲} = ۴۹ \overset{۲۳}{\equiv} ۳ \xrightarrow{\times ۷} ۷^{۳} \overset{۲۳}{\equiv} ۲۱ \overset{۲۳}{\equiv} -۲ \xrightarrow{\text{توان } ۲} ۷^{۶} \overset{۲۳}{\equiv} (-۲)^{۲} \overset{۲۳}{\equiv} ۴$$

$$۷^{۱۳} = (۷^{۶})^{۲} \times ۷ \overset{۲۳}{\equiv} (۴^{۲}) \times ۷ \overset{۲۳}{\equiv} ۱۶ \times ۷ \overset{۲۳}{\equiv} -۷ \times ۷ \overset{+(۲\times ۲۳)}{\overset{۲۳}{\equiv}} -۴۹ \overset{۲۳}{\equiv} -۳$$

$$۷^{۱۳} + a \overset{۲۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow -۳ + a \overset{۲۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow a \overset{۲۳}{\equiv} ۳ \Rightarrow a = ۲۳q + ۳$$

$$\xrightarrow{q=۰} a \text{ کمترین مقدار طبیعی } = ۳$$

۱۷ ۱ ۲ ۳ ۴



$$\left.\begin{matrix} AB \text{ وسط } M \\ BD \text{ وسط } Q \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{نتیجهٔ تالس}} MQ = \frac{۱}{۲}AD$$

$$\left.\begin{matrix} AB \text{ وسط } M \\ AC \text{ وسط } N \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{نتیجهٔ تالس}} MN = \frac{۱}{۲}BC$$

از طرفی چهارضلعی $MNPQ$ لوزی است پس $MN = MQ$ بنابراین $AD = BC$.

۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴

نکته: اگر $a, b, c \in \mathbb{Z}$ آنگاه:

$$\left.\begin{matrix} a|b \\ a|c \end{matrix}\right\} \rightarrow a|mb + nc \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

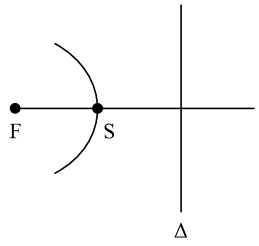
$$\begin{matrix} \alpha|۱۳n + ۳ \\ \alpha|۷n + ۴ \end{matrix} \xrightarrow[\times(+۱۳)]{\times(-۷)} \alpha| -۷(۱۳n + ۳) + ۱۳(۷n + ۴) \Rightarrow \alpha|۳۱ \xrightarrow{\alpha \neq ۱} \alpha = \pm ۳۱, -۱$$

$$\alpha = ۳۱ \text{ فرض } \xrightarrow{\alpha|۷n+۴} ۳۱|۷n + ۴ \Rightarrow ۷n + ۴ \overset{۳۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۷n \overset{۳۱}{\underset{-۳۱}{\equiv}} -۴ \overset{۳۱}{\equiv} -۳۵$$

$$\xrightarrow[(۷,۳۱)=۱]{\div ۷} n \overset{۳۱}{\equiv} -۵ \Rightarrow n = ۳۱q - ۵ \xrightarrow{q=۱} \underbrace{n}_{\text{کمترین مقدار طبیعی}} = ۲۶ \Rightarrow \text{جمع ارقام} = ۲ + ۶ = ۸$$

۱۹ ۱ ۲ ۳ ۴

نکته: در سهمی افقی که دهانهٔ آن به سمت چپ باز می‌شود: خط هادی خطی قائم می‌باشد:



$$\underbrace{F\left|\begin{matrix} h - a \\ k \end{matrix}\right.}_{\text{کانون}} \quad , \quad \underbrace{S\left|\begin{matrix} h \\ k \end{matrix}\right.}_{\text{رأس}} \quad , \quad \underbrace{\Delta : x = h + a}_{\text{خط هادی}}$$

معادلهٔ این سهمی به‌فرم $(y - k)^{۲} = -۴a(x - h)$ است.

در این سؤال چون خط $x = ۴$ (خط هادی سهمی) خطی قائم است پس سهمی افقی است و از آنجا موقعیت نقطهٔ F سمت چپ خط $x = ۴$ قرار دارد دهانهٔ سهمی به سمت چپ باز می‌شود بنابراین:

$$F\left|\begin{matrix} ۲ = h - a \\ ۱ = k \end{matrix}\right. \quad (۱) \quad , \quad \Delta : x = ۴ = h + a \quad (۲)$$

$$(۱),(۲):\begin{cases} h-a=۲ \\ h+a=۴ \end{cases} \Rightarrow ۲h=۶ \Rightarrow h=۳ \xrightarrow{(۲)} a=۴-۳=۱$$

معادلهٔ سهمی : $(y-k)^۲=-۴a(x-h) \Rightarrow (y-۱)^۲=-۴(۱)(x-۳)$

$\Rightarrow$ معادلهٔ سهمی : $y^۲-۲y+۴x=۱۱$

۲۰ ۱ ۲ **۳** ۴

x : تعداد خرید از کالای ۲۲۰ تومانی

y : تعداد خرید از کالای ۱۴۰ تومانی

$$۲۲۰x+۱۴۰y=۱۹۰۰۰ \xrightarrow{\div ۲۰} ۱۱x+۷y=۹۵۰ \quad (۱)$$

$$\Rightarrow ۱۱x=-۷y+۹۵۰ \Rightarrow ۱۱x \overset{۷}{\equiv} ۹۵۰ \xrightarrow{۹۵۰\equiv ۵} ۱۱x \overset{۷}{\equiv} ۵ \overset{+(۴\times ۷)}{\curvearrowright} \overset{۷}{\equiv} ۳۳$$

$$\xrightarrow[(۱۱,۷)=۱]{\div ۱۱} x \overset{۷}{\equiv} ۳ \Rightarrow x=۷k+۳$$

حال در معادلهٔ (۱) مقدار $x=۷k+۳$ را صدق می‌دهیم:

$$۱۱(۷k+۳)+۷y=۹۵۰ \Rightarrow ۷y=-۱۱\times ۷k+۹۱۷ \xrightarrow{\div ۷} y=-۱۱k+۱۳۱$$

حال باید تعداد جواب‌های حسابی را یافته و اشتراک بگیریم:

$$۰\le x \Rightarrow ۰\le ۷k+۳ \Rightarrow -۳\le ۷k \Rightarrow -\frac{۳}{۷}\le k \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} ۰\le k \quad (I)$$

$$۰\le y \Rightarrow ۰\le -۱۱k+۱۳۱ \Rightarrow ۱۱k\le ۱۳۱ \Rightarrow k\le \frac{۱۳۱}{۱۱}=۱۱/\cdots \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k\le ۱۱ \quad (II)$$

$(I)\cap(II): ۰\le k\le ۱۱ \longrightarrow$ ۱۲ مقدار

چون برای k دوازده مقدار محاسبه شد پس مسئله ۱۲ جواب دارد.

۲۱ ۱ ۲ ۳ **۴** اگر $d\perp P$، آن‌گاه تمام صفحات موازی d و گذرا از نقطهٔ A بر صفحهٔ P عمودند.

۲۲ ۱ **۲** ۳ ۴

$$A=\tan\frac{۱۱\pi}{۴}+\sin\frac{۱۵\pi}{۴}\cos\frac{۱۳\pi}{۴}$$

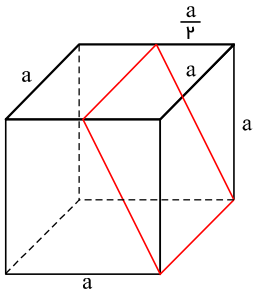
$$\tan(\frac{۱۱\pi}{۴})=\tan(\frac{۱۲\pi-\pi}{۴})=\tan(۳\pi-\frac{\pi}{۴})=\tan(\pi-\frac{\pi}{۴})=-\tan\frac{\pi}{۴}=-۱$$

$$\sin(\frac{۱۵\pi}{۴})=\sin(\frac{۱۶\pi-\pi}{۴})=\sin(۴\pi-\frac{\pi}{۴})=-\sin(\frac{\pi}{۴})=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos(\frac{۱۳\pi}{۴})=\cos(\frac{۱۲\pi+\pi}{۴})=\cos(۳\pi+\frac{\pi}{۴})=\cos(\pi+\frac{\pi}{۴})=-\cos\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$A=-۱+(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})\cdot(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-۱+\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۲}$$

۲۳ ۱ ۲ ۳ ۴



$$\frac{V_{\text{حجم قطعهٔ کوچکتر}}}{V_{\text{حجم قطعهٔ بزرگتر}}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times S_{\text{قاعده}}\times \text{ارتفاع}}{\text{حجم قطعهٔ کوچکتر}-\text{حجم مکعب}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times(\frac{a}{۲}\times a)}{a^۳-\frac{۱}{۲}(\frac{a}{۲}\times a)\times a}=\frac{\frac{۱}{۴}a^۳}{\frac{۳}{۴}a^۳}=\frac{۱}{۳}$$

۲۴ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم: $y=\sin bx\to T=\frac{۲\pi}{|b|}\quad,\quad \sin x\cdot\cos x=\frac{۱}{۲}\sin ۲x$

$$y=۱+a\cdot\sin bx\cdot\cos bx=۱+\frac{a}{۲}\cdot\sin ۲bx$$

چون فاصلهٔ دو مینیمم متوالی دورهٔ تناوب اصلی منحنی است پس:

$$T=\frac{۳\pi}{۴}-(-\frac{\pi}{۴})=\pi$$

$$T=\frac{۲\pi}{۲b}=\frac{\pi}{b}\Rightarrow\frac{\pi}{b}=\pi\Rightarrow\boxed{b=۱}$$

$$y=۱+\frac{a}{۲}\cdot\sin ۲b\xrightarrow{\text{بیشترین مقدار}}۱+\frac{a}{۲}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\boxed{a=۱}$$

درنتیجه داریم:

$$a+b=۲$$

۲۵ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم: $\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})\quad,\quad \sin x\cdot\cos x=\frac{۱}{۲}\sin ۲x$

$$\sin^۳x+\cos^۳x=۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

$$(\sin x+\cos x)\cdot(\sin^۲x-\sin x\cdot\cos x+\cos^۲x)=۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

$$(\sin x+\cos x)\cdot(۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x)=۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

$$(\sin x+\cos x)\cdot(۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x)-(۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x)=۰$$

$$(۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x)\cdot(\sin x+\cos x-۱)=۰$$

$$\begin{cases}۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x=۰\Rightarrow\sin ۲x=۲\ \text{غ ق}\\ \sin x+\cos x=۱\Rightarrow\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})=۱\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin\frac{\pi}{۴}\end{cases}$$

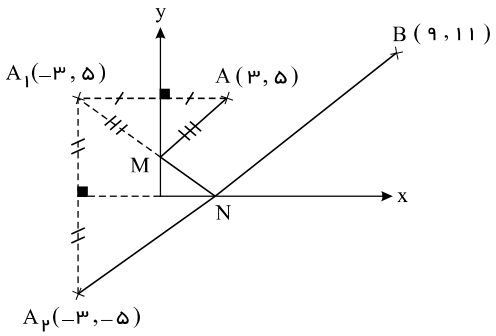
$$\begin{cases}x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi\Rightarrow x=۰,۲\pi\\ x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

$$\text{جمع} = ۰ + \frac{\pi}{۲} + ۲\pi = \frac{۵\pi}{۲}$$

۲۶ ۱ ۲ **۳** ۴ مسیر کوتاه را به‌دست می‌آوریم. مختصات $A_۱$ و $A_۲$ به‌راحتی به‌دست می‌آید.

$A_۱$ قرینهٔ A نسبت به محور y است.

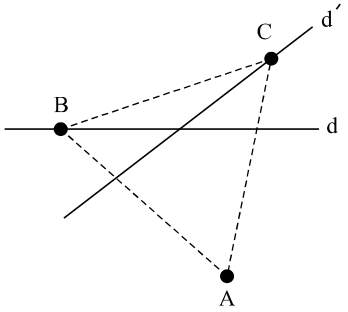
$A_۲$ قرینهٔ $A_۱$ نسبت به محور x است.



$$|AMNB| = |A_۲B| = \sqrt{(x_B - x_{A_۲})^۲ + (y_B - y_{A_۲})^۲} = \sqrt{(۹ + ۳)^۲ + (۱۱ + ۵)^۲} = \sqrt{۱۴۴ + ۲۵۶} = ۲۰$$

۲۷ ۱ ۲ ۳ **۴**

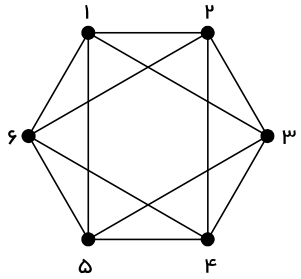
$ABC \Rightarrow \hat{A} = ۶۰^\circ \ , \ AB = AC \Rightarrow R_A^{۶۰^\circ}(B) = C$ متساوی‌الاضلاع است



دوران خط d به مرکز A و زاویهٔ ۶۰، خط d' را در c قطع می‌کند.

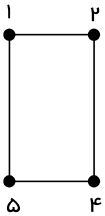
۲۸ ۱ ۲ ۳ **۴** روش اول:

نمودار یک گراف ۴منتظم مرتبهٔ ۶ به‌شکل روبه‌روست.



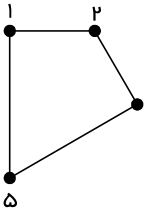
با توجه به تقارن موجود در شکل دورهای به‌طول ۴ را شماش می‌کنیم:

۱) دورهای به‌طول ۴ به‌شکل



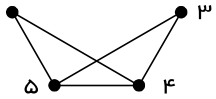
تعداد آن‌ها برابر ۳ می‌باشد.

۲) دورهای به‌طول ۴ به‌شکل



تعداد آن‌ها برابر ۶ می‌باشد.

۳) دورهای به‌طول ۴ به‌شکل



(۶ ۴ ۳ ۵ ۶) تعداد آن‌ها برابر ۶ می‌باشد.

بنابراین تعداد کل دورهای به‌طول ۴ برابر $۶ + ۶ + ۳ = ۱۵$ می‌باشد.

روش دوم:

به‌ازای انتخاب هر ۴رأس یک دور به‌طول ۴ داریم پس $۱۵ = \binom{۶}{۴} =$ جواب

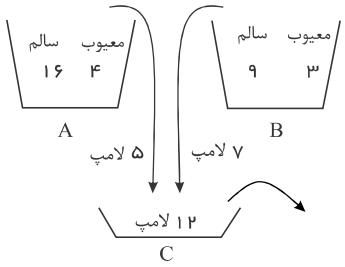
۲۹ ۱ ۲ ۳ ۴ در صورتی بازه برای یک عدد همسایگی محسوب می‌شود که آن عدد درون بازه باشد.

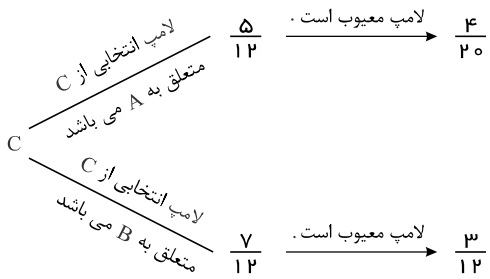
پس:

$$x + ۱ < ۳ < ۲x - ۱ \Rightarrow \begin{cases} x + ۱ < ۳ \to x < ۲ & (۱) \\ ۲x - ۱ > ۳ \to x > ۲ & (۲) \end{cases}$$

$$(۱) \cap (۲) \Rightarrow \varnothing$$

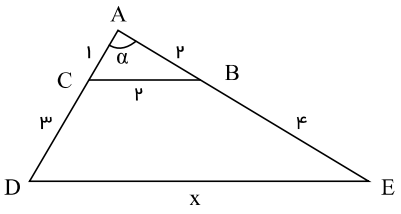
۳۰ ۱ ۲ ۳ ۴





$$P(\text{لامپ انتخابی از } C \text{ معیوب است.}) = \frac{۵}{۱۲} \times \frac{۴}{۲۰} + \frac{۷}{۱۲} \times \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۱۲} + \frac{۷}{۴۸} = \frac{۴ + ۷}{۴۸} = \frac{۱۱}{۴۸}$$

۳۱ ۱ ۲ ۳ ۴



$$\overset{\Delta}{ABC} \xrightarrow{\text{قضیهٔ کسینوس‌ها}} BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ - ۲AB \times AC \cos\alpha$$

$$\Rightarrow ۲^۲ = ۱^۲ + ۲^۲ - ۲(۱)(۲)\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{۱}{۴}$$

$$\overset{\Delta}{ADE} \xrightarrow{\text{قضیهٔ کسینوس‌ها}} x^۲ = ۴^۲ + ۶^۲ - ۲(۴)(۶)\cos\alpha = ۱۶ + ۳۶ - ۴۸\frac{۱}{۴} = ۴۰ \Rightarrow x = ۲\sqrt{۱۰}$$

۳۲ ۱ ۲ ۳ ۴ نکته: در گراف G یک مجموعهٔ احاطه‌گر را مینیمال نامند هرگاه با حذف هر عضو دلخواه آن، مجموعهٔ باقی‌مانده دیگر احاطه‌گر نباشد.

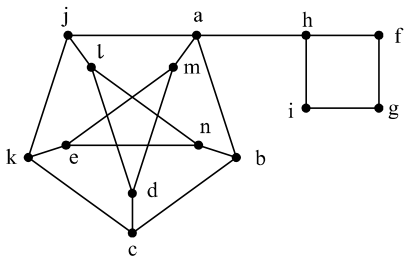
بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱) این مجموعه احاطه‌گر نیست زیرا مثلاً رأس l احاطه نمی‌شود.

گزینهٔ ۲) مینیمال است.

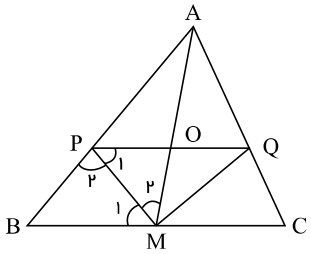
گزینهٔ ۳) احاطه‌گر نیست زیر مثلاً رأسی مانند g احاطه نمی‌شود.

گزینهٔ ۴) احاطه‌گر نیست زیرا رأسی مانند i احاطه نمی‌شود.



۳۳ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\left.\begin{array}{l} A\hat{M}B \text{ نیمساز در } PM \xrightarrow{\text{قضیهٔ نیمسازها}} \frac{AM}{MB}=\frac{AP}{PB} \\ A\hat{M}C \text{ نیمساز در } MQ \xrightarrow{\text{قضیهٔ نیمسازها}} \frac{AM}{MC}=\frac{AQ}{QC} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{میانه } AM]{MB=MC} \frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}$$



طبق عکس تالس باید $PQ||BC$ باشد بنابراین طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب $\hat{P}_۱=\hat{M}_۱$ است و چون MP نیمساز است و $\hat{M}_۱=\hat{M}_۲$ است بنابراین $\hat{M}_۲=\hat{P}_۱$ می‌باشد، یعنی $OM=OP$.

۳۴ ۱ ۲ **۳** ۴

نکته: دو پیشامد A و B را مستقل نامند هرگاه وقوع یا عدم وقوع یکی تأثیری بر دیگری نداشته باشد.
نکته: شرط آن‌که دو پیشامد A و B مستقل باشند آن است که $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$
نکته: اگر A و B مستقل باشند متمم‌های آن‌ها نیز با هم مستقل هستند.

$$P(A\cap B)=۰/۶ \Rightarrow P(A)\times P(B)=۰/۶ \quad (۱)$$

$$P(A\cap B')=۰/۲ \xrightarrow{A \text{ و } B' \text{ مستقل‌اند.}} P(A)\times P(B')=۰/۲ \quad (۲)$$

$$(۱)\div(۲) \Rightarrow: \frac{P(B)}{P(B')}=\frac{۰/۶}{۰/۲}=۳ \Rightarrow P(B)=۳P(B') \xrightarrow{P(B)+P(B')=۱} P(B')=\frac{۱}{۴}$$

$$\xrightarrow{(۲)} P(A)=۰/۸$$

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=۰/۸+\frac{۱}{۴}-۰/۲=۰/۸۵$$

۳۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

نکته: شرط آن‌که سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه قرار داشته باشند آن است که ضرب مختلط آن‌ها صفر باشد.

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=۰$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{vmatrix}=۲i+۷j-۴k$$

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=۰ \Rightarrow -۸+۷m-۲۰=۰ \Rightarrow m=۴$$

۳۶ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲x-۵}{x^۲+ax+b}=-\infty$$

هرگاه x به سمت عددی میل کند که به موجب آن جواب حد یکنوع بی‌نهایت شود (مثلاً فقط $-\infty$) آن عدد ریشهٔ مضاعف مخرج است. بنابراین:

$$x^۲+ax+b=(x-۲)^۲=x^۲-۴x+۴ \Rightarrow a=-۴\ ,\ b=۴$$

درنتیجه داریم:

$$a+b=-۴+۴=۰$$

۳۷ ۱ ۲ **۳** ۴ برای پیوسته بودن باید حد چپ و راست با مقدار تابع برابر باشند.

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(ax-۱)=۲a-۱ \quad \text{حد چپ}$$

$$f(۲)=۲a-۱ \quad \text{مقدار تابع}$$

$\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^+} \dfrac{۳x-۶}{x-\sqrt{x+۲}} = \dfrac{۰}{۰}$ مبهم $\quad H: \lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{۳}{۱-\dfrac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}} = \dfrac{۳}{۱-\frac{۱}{۴}} = \dfrac{۳}{\frac{۳}{۴}} = ۴$ حد راست

با توجه به تعریف پیوستگی داریم:

$۲a-۱=۴ \Rightarrow a=۲/۵$

۳۸ ۱ ۲ ۳ ۴ **ابتدا از همهٔ داده‌ها ۱۴ واحد کم می‌کنیم واضح است از میانگین نیز ۱۴ واحد کم خواهد شد:**

$x-۱۴$	-۴	-۲	۰	۱	۳	۴
f	۵	۸	۷	۱۰	۶	۴

$$\overline{x}-۱۴ = \frac{\sum\limits_{i=۱}^{۵} f_i x_i}{\sum\limits_{i=۱}^{۵} f_i} = \frac{۵(-۴)+۸(-۲)+۷(۰)+۱۰(۱)+۶(۳)+۴(۴)}{۵+۸+۷+۱۰+۶+۴}$$

$$\Rightarrow \overline{x}-۱۴ = \frac{-۲۰-۱۶+۰+۱۰+۱۸+۱۶}{۴۰} = \frac{۸}{۴۰} = \frac{۱}{۵} = ۰/۲$$

$$\Rightarrow \overline{x}-۱۴ = ۰/۲ \Rightarrow \overline{x} = ۱۴/۲$$

۳۹ ۱ **۲** ۳ ۴

نکته: در محاسبهٔ میانهٔ داده‌های $x_۱, x_۲, \cdots, x_n$
اگر تعداد داده‌ها فرد باشد داده وسط
و اگر تعداد داده‌ها زوج باشد میانگین
دو دادهٔ وسط برابر میانه خواهد بود.
نکته: در داده‌های فوق میانه همان چارک دوم
$Q_۲$ می‌باشد میانه نیمهٔ اول داده‌ها $Q_۱$
(چارک اول) و میانهٔ نیمهٔ دوم داده‌ها $Q_۳$ (چارک سوم) است.

ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

داده‌ها : ۱۰/۶, ۱۰/۶, ۱۱/۲, ۱۱/۵, ۱۱/۹, ۱۲/۳, ۱۲/۷, ۱۲/۸, ۱۳/۵, ۳۰/۲

تعداد داده‌ها برابر ۱۰ می‌باشد پس میانه $(Q_۲)$ میانگین دو دادهٔ وسط می‌باشد.

$$Q_۲ = \frac{\text{دادهٔ ۶ ام} + \text{دادهٔ ۵ ام}}{۲} = \frac{۱۱/۹+۱۲/۳}{۲} = \frac{۲۴/۲}{۲} = ۱۲/۱$$

$$Q_۱ \overset{\text{میانهٔ داده‌های کمتر از } ۱۲/۱}{=\!=\!=} \text{دادهٔ سوم} = ۱۱/۲ \quad , \quad Q_۳ \overset{\text{میانهٔ داده‌های بیشتر از } ۱۲/۱}{=\!=\!=} ۱۲/۸$$

$$\frac{Q_۱+Q_۳-۲Q_۲}{Q_۳-Q_۱} = \frac{۱۱/۲+۱۲/۸-۲\times ۱۲/۱}{۱۲/۸-۱۱/۲} = \frac{-۰/۲}{۱/۶} = -۰/۱۲۵$$

۴۰ ۱ ۲ **۳** ۴

نکته: تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n$
از دستور $\binom{n-۱}{k-۱}$ حاصل می‌شود.

$x_۱$: تعداد توپ‌های نفر اول

$x_۲$: تعداد توپ‌های نفر دوم

$x_۳$: تعداد توپ‌های نفر سوم

$x_۴$: تعداد توپ‌های نفر چهارم

$x_۵$: تعداد توپ‌های نفر پنجم

$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱۱ \xrightarrow{۱\le x_i\ ,\ i=۱,۲,۳,۴,۵}$ تعداد جواب‌ها $= \binom{n-۱}{k-۱} = \binom{۱۰}{۴} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷}{۲۴} = ۲۱۰$

۴۱ ۱ ۲ **۳** ۴

می‌دانیم:

$$\lim_{a\to ۰} \frac{f(x+a)-f(x)}{a} = f'(a)$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sin a \cdot \cos x + \cos a \cdot \sin x - \sin a}{x} = \lim_{x\to ۰} \frac{\sin(x+a)-\sin a}{x}$$

بنابه تعریف مشتق، این عبارت مشتق تابع $y = \sin x$ در نقطهٔ $x = a$ است.

$$= (\sin x)'(a) = \cos a$$

۴۲ ۱ ۲ ۳ **۴** در مربع لاتین جدید به‌جای سه عدد ۱ در مربع اولیه، باید اعداد ۱, ۲, ۳ را قرار دهیم که اینکار به $۳! = ۶$ حالت قابل انجام است بعد از قرار دادن آن‌ها، درایه‌های دیگر منحصراً به یک حالت پر می‌شود.

۴۳ ۱ ۲ **۳** ۴

می‌دانیم:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \quad , \quad (fog)'(x) = g'(x)\cdot f'(g(x))$$

$$f'(۲) = \lim_{x\to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow f'(۲) = \frac{۴}{۳}$$

$$(fog)'(۱) = g'(۱)\cdot f'(g(۱)) \quad (I)$$

$$g(۱) = ۱ + \sqrt{۱} = ۲ \quad , \quad g'(x) = ۱ + \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \to g'(۱) = ۱ + \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

$$(I) \Rightarrow g'(۱)\cdot f'(g(۱)) = \frac{۳}{۲} \times f'(۲) = \frac{۳}{۲} \times \frac{۴}{۳} = ۲$$

۴۴ **۱** ۲ ۳ ۴ ابتدا پیوستگی تابع را در نقطهٔ مرزی $x = ۲$ بررسی می‌کنیم و نیز می‌دانیم به‌ازای $x < ۲$ داریم: $|x^۲ - ۲x| = ۲x - x^۲$ پس:

$$f(x) = \begin{cases} ۲x - x^۲ & x < ۲ \\ \frac{۱}{۲}x^۲ + ax + b & x \ge ۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < ۲ \Rightarrow f(۲^-) = ۴ - ۴ = ۰ \\ x > ۲ \Rightarrow f(۲^+) = ۲ + ۲a + b \end{cases} \Rightarrow \boxed{۲a + b = -۲} \quad (۱)$$

$$f'(x) = \begin{cases} ۲ - ۲x & x < ۲ \\ x + a & x > ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} f'_-(۲) = -۲ \\ f'_+(۲) = ۲ + a \end{matrix} \Rightarrow ۲ + a = -۲ \Rightarrow a = -۴ \xrightarrow{(۱)} \boxed{b = ۶}$$

درنتیجه داریم:

$$a + b = ۲$$

۴۵ **۱** ۲ ۳ ۴ روش اول:

می‌خواهیم تعداد توابع پوشا از مجموعهٔ ۶عضوی $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ به مجموعهٔ ۳عضوی $B = \{a,b,c\}$ را بیابیم بایستی از کل توابع قابل‌تعریف از A به B آن‌هایی که a یا b یا c را نمی‌پوشانند کم کنیم:

A : توابعی که a را نمی‌پوشانند.

B : توابعی که b را نمی‌پوشانند.

C : توابعی که c را نمی‌پوشانند.

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}| = |(\overline{A\cup B\cup C}| = \text{کل توابع} - |A\cup B\cup C|$$

$$= ۳^۶ - (|A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|)$$

$$= ۳^۶ - (۲^۶ + ۲^۶ + ۲^۶ - ۱^۶ - ۱^۶ - ۱^۶ + ۰) = ۷۲۹ - ۱۸۹ = ۵۴۰$$

روش دوم:

تعداد توابع پوشا از یک مجموعهٔ nعضوی به یک مجموعهٔ ۳عضوی از دستور $۳^n - ۳ \times ۲^n + ۳$ حاصل می‌شود

$$۳^n - ۳ \times ۲^n + ۳ \overset{n=۶}{=\!=\!=} ۳^۶ - ۳ \times ۲^۶ + ۳ = ۵۴۰$$

۴۶ ۱ ۲ ۳ **۴** اعضای مجموعهٔ داده‌شده به‌فرم $۳k + ۲$ می‌باشند. اعضای این مجموعه را دوتا دوتا در خانه‌هایی به‌شکل زیر چنان قرار می‌دهیم که مجموع دو عدد یک خانه برابر ۸۲ باشد:

۴۱	۳۸, ۴۴	۳۵, ۴۷	۳۲, ۵۰	۲۹, ۵۳	۲۶, ۵۶	۲۳, ۵۹	۲۰, ۶۲	۱۷, ۶۵	۱۴, ۶۸	۱۱, ۷۱	۸	۵

تعداد خانه‌ها برابر ۱۳ می‌باشد. در بهترین حالت ممکن اعداد ۴۱, ۸, ۵ را به‌همراه یک عدد از هر خانه برمی‌داریم حال اگر ۱۴امین عدد را برداریم طبق اصل لانهٔ کبوتری قطعاً حداقل یک جفت عدد داریم که مجموع آن‌ها برابر ۸۲ باشد.

۴۷ ۱ ۲ ۳ **۴**

آهنگ تغییر متوسط : $\frac{f(۲) - f(۰)}{۲ - ۰} = \frac{۱۲ - ۲}{۲} = ۵$

آهنگ تغییر لحظه‌ای : $f'(x) = \sqrt{۴x + ۱} + \frac{۴}{۲\sqrt{۴x + ۱}} \times (x + ۲)$

$$f'(\frac{۳}{۴}) = ۲ + \frac{۱۱}{۴} = ۴٫۷۵$$

$$\text{اختلاف} = \text{متوسط} - \text{آنی} = ۵ - ۴٫۷۵ = ۰٫۲۵$$

۴۸ ۱ ۲ **۳** ۴ برای محاسبهٔ اکسترمم‌های مطلق یک تابع، عرض‌های نقاط بحرانی را با مقادیر تابع در دو سر دامنه مقایسه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^۲ + ۲x}{(x - ۱)^۲} \quad , \quad D_f = \mathbb{R} - \{۱\} = (-\infty, +\infty) - \{۱\}$$

$$f'(x) = \frac{(۲x + ۲) \cdot (x - ۱)^۲ - ۲(x - ۱) \cdot (x^۲ + ۲x)}{(x - ۱)^۴} = ۰$$

$$۲(x - ۱)\Big((x + ۱) \cdot (x - ۱) - (x^۲ + ۲x)\Big) = ۰ \Rightarrow x = ۱ \notin D_f$$

$$(x^۲ - ۱ - x^۲ - ۲x) = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲} \text{ طول نقطهٔ بحرانی}$$

$$f(-\frac{۱}{۲}) = -\frac{۱}{۳}$$

$$f(\pm\infty) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^۲}{x^۲} = ۱$$

عدد $-\frac{۱}{۳}$ مینیمم مطلق تابع است که در $x = -\frac{۱}{۲}$ قرار دارد و خط قائم $x = ۱$ مجانب قائم است چون ریشهٔ مخرج است اما ریشهٔ صورت نیست.

$$\text{فاصله} = ۱ - (-\frac{۱}{۲}) = \frac{۳}{۲}$$

۴۹ **۱** ۲ ۳ ۴ با توجه به شکل، نقطهٔ $x = ۰$ مینیمم نسبی تابع است پس ریشهٔ مشتق است و نیز در $x = ۱$ خط مماس افقی در نقطهٔ عطف دارد پس $x = ۱$ هم ریشهٔ مشتق اول و هم ریشهٔ مشتق دوم است.

$$f(x) = ۳x^۴ + ax^۳ + bx^۲ + cx$$

$$f'(x) = ۱۲x^۳ + ۳ax^۲ + ۲bx + c \quad , \quad f''(x) = ۳۶x^۲ + ۶ax + ۲b$$

$$f'(۰) = ۰ \Rightarrow c = ۰$$

$$f'(۱) = ۰ \Rightarrow ۱۲ + ۳a + ۲b = ۰ \Rightarrow ۳a + ۲b = -۱۲$$

$$f''(۱) = ۰ \Rightarrow ۳۶ + ۶a + ۲b = ۰ \Rightarrow ۳a + b = -۱۸$$

$$\Rightarrow a = -۸$$

۵۰ ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$$A = \sqrt[۵]{۲^۲ \times \sqrt[۳]{۲^۴}} \times (۲^{-۱})^{-\frac{۴}{۳}} = \sqrt[۵]{۲^۲ \times ۲^{\frac{۴}{۳}}} \times ۲^{\frac{۴}{۳}} = \sqrt[۵]{۲^{\frac{۱۰}{۳}}} \times ۲^{\frac{۴}{۳}}$$

$$A = ۲^{\frac{۲}{۳} \times \frac{۴}{۳}} = ۲^۲$$

$$(۲A)^{-\frac{۱}{۳}} = (۲ \times ۲^۲)^{-\frac{۱}{۳}} = ۲^{۳ \times (-\frac{۱}{۳})} = ۲^{-۱} = \frac{۱}{۲} = ۰/۵$$

۵۱ ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم: اگر n تعداد جملات یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d و جملهٔ اول a باشد آنگاه مجموع n جملهٔ اول این دنباله برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{۲} \cdot (۲a + (n-۱) \cdot d)$$

کوچک‌ترین عدد دورقمی مضرب ۷ عدد ۱۴ است و بزرگترین آن عدد $۹۸ = ۷ \times ۱۴$ می‌باشد بنابراین تعداد جملات آن:

$$n = \frac{a_n - a}{d} + ۱ = \frac{۹۸ - ۱۴}{۷} + ۱ = ۱۳$$

$$S_n = \frac{۱۳}{۲} \cdot (۲(۱۴) + ۱۲ \times ۷) = ۷۲۸$$

۵۲ ۱ ۲ ۳ ۴ برای اینکه یک معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز باشد باید $\Delta > ۰$ باشد بنابراین:

$$\Delta = (۶)^۲ - ۴(۲m-۱) \cdot (m-۲) > ۰ \Rightarrow ۲m^۲ - ۵m - ۷ < ۰ \Rightarrow (m+۱) \cdot (۲m-۷) < ۰ \Rightarrow -۱ < m < ۳/۵$$

توجه داشته باشید که ضریب $x^۲$ باید مخالف صفر باشد تا این تابع، درجهٔ دوم باقی بماند.

پس باید $m \neq \frac{۱}{۲}$ باشد.

$$\text{جواب} = -۱ < m < ۳/۵ - \left\{\frac{۱}{۲}\right\}$$

۵۳ ۱ ۲ ۳ ۴ اگر بهروز بتواند به‌تنهایی این کار را در k ساعت انجام دهد، فرهاد همان کار را به‌تنهایی در $k+۹$ ساعت انجام می دهد؛ آنگاه داریم:

$$\frac{۱}{k} + \frac{۱}{k+۹} = \frac{۱}{۲۰} \Rightarrow \frac{۲k+۹}{k \cdot (k+۹)} = \frac{۱}{۲۰}$$

$$\Rightarrow k^۲ + ۹k = ۴۰k + ۱۸۰ \Rightarrow k^۲ - ۳۱k - ۱۸۰ = ۰$$

$$\Rightarrow k = -۵ \text{ غ‌ق‌ق} \quad , \quad k = ۳۶ \text{ ق‌ق}$$

۵۴ ۱ ۲ ۳ ۴ چون دو نقطه به طول‌های $x = ۱$ و $x = ۲$ محل برخورد این دو تابع است پس در هر دو تابع صدق می‌کند؛ بنابراین داریم:

$$y = x^۲ - x \rightarrow \begin{cases} y(۱) = ۰ \\ y(۲) = ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(۱) = ۰ \\ f(۲) = ۲ \end{cases}$$

$$f(۱) = -۲ + (\frac{۱}{۲})^{A+B} = ۰ \Rightarrow ۲^{-A-B} = ۲^۱ \Rightarrow \boxed{A+B=-۱} \quad (۱)$$

$$f(۲) = -۲ + (\frac{۱}{۲})^{۲A+B} = ۲ \Rightarrow ۲^{-۲A-B} = ۲^۲ \Rightarrow \boxed{۲A+B=-۲} \quad (۲)$$

$$\begin{cases} A+B=-۱ \\ ۲A+B=-۲ \end{cases} \Rightarrow A=-۱ \ , \ B=۰ \Rightarrow f(x) = -۲ + (\frac{۱}{۲})^{-x} \Rightarrow f(۳) = -۲ + ۲^۳ = ۶$$

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۴	۳	۲	۱
۲	۲	۳	۴	۱
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۲	۳	۴	۱
۵	۴	۳	۲	۱
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۴	۳	۲	۱
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۴	۳	۲	۱
۱۰	۳	۲	۱	۴
۱۱	۴	۳	۲	۱
۱۲	۳	۲	۱	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۲	۳	۴	۱

۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۲	۳	۴	۱
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۲	۳	۴	۱
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۳	۴	۱	۲
۲۱	۴	۳	۲	۱
۲۲	۲	۳	۴	۱
۲۳	۲	۳	۴	۱
۲۴	۳	۴	۱	۲
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۳	۴	۱	۲
۲۷	۴	۳	۲	۱
۲۸	۴	۳	۲	۱

۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۲	۳	۴	۱
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۲	۳	۴	۱
۳۳	۴	۳	۲	۱
۳۴	۳	۴	۱	۲
۳۵	۴	۳	۲	۱
۳۶	۲	۳	۴	۱
۳۷	۳	۴	۱	۲
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۲	۳	۴	۱
۴۰	۳	۴	۱	۲
۴۱	۳	۴	۱	۲
۴۲	۴	۳	۲	۱

۴۳	۳	۲	۱	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۴	۳	۲	۱
۴۶	۴	۳	۲	۱
۴۷	۴	۳	۲	۱
۴۸	۳	۲	۱	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۲	۳	۴	۱
۵۱	۲	۳	۴	۱
۵۲	۳	۲	۱	۴
۵۳	۴	۳	۲	۱
۵۴	۴	۳	۲	۱