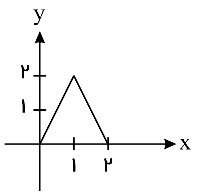
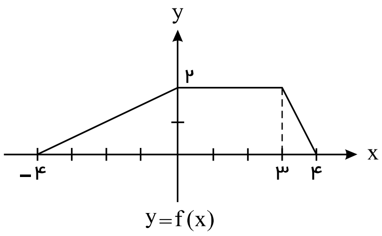
۱- اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=۲x^۲-۱$ باشد، دامنهٔ تابع $fog(x)$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

۲- اگر $f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳$ و $g(x)=x^۳$ باشد، مقدار $g^{-۱}of^{-۱}(۵)$ را به‌دست آورید.

۳- نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت زیر است. با استفاده از آن نمودار $y=-۲f(\frac{۱}{۳}x)$ را رسم کنید.



۴- با استفاده از نمودار تابع $y=f(x)$، نمودار $y=\frac{۱}{۲}f(۴x)$ را رسم کنید.



۵- اگر $f(x)=\sqrt{۲x-x^۲}$، دامنه‌ی تابع $f(۳-x)$، کدام است؟

① $[۰,۲]$ ② $[۰,۳]$ ③ $[۱,۲]$ ④ $[۱,۳]$

۶- اگر $f(x)=(۲x-۳)^۲$ و $g(x)=x+۲$ نمودارهای دو تابع f و fog، با کدام طول متقاطع‌اند؟

① -۱ ② $\frac{۱}{۲}$ ③ ۱ ④ $\frac{۳}{۲}$

۷- اگر $f(x)=x-\sqrt{x^۲-۱}$ و $g(x)=\sqrt{۴-x^۲}$، دامنه‌ی تعریف تابع $f-g$ کدام است؟

① $[-۲,۱]\cup[-۱,۱]$ ② $[-۲,-۱]\cup[۱,۲]$ ③ $R-[-۱,۱]$ ④ $[-۱,۱]-[-۲,۲]$

۸- دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x^۲-x-۲}-\sqrt{۲-x}$ کدام است؟

① $\{۲\}$ ② $[-۱,۲)$ ③ $[-\infty,۲)$ ④ $(-\infty,-۱]\cup\{۲\}$

۹- اگر $f(x)=\sqrt{۴x-x^۲}$ و $g(x)=\frac{۱}{x}$ دامنه‌ی تعریف تابع fog کدام است؟

① $x\geq\frac{۱}{۴}$ ② $x<\frac{۱}{۴}$ ③ $۰<x<۴$ ④ $-\frac{۱}{۴}<x<\frac{۱}{۴}$

۱۰- اگر $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۳}$ و $g(x)=\frac{۳x+۱}{x-۲}$ باشد ضابطه‌ی تابع gof کدام است؟

① $gof(x)=-x$ ② $gof(x)=\frac{x-۲}{x+۱}$ ③ $gof(x)=x$ ④ $gof(x)=\frac{۵x+۴}{۶x-۵}$

۱۱- طول نقطه‌ی تلاقی نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+۲}$ با نمودار معکوس آن روی نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم کدام است؟

① -۱ ② ۲ ③ $۲,-۱$ ④ فاقد نقطه‌ی تلاقی

۱۲- اگر f یک تابع خطی باشد به‌طوری که $f(x)+f(\frac{۱}{x})=\frac{x^۲-۱۲x+۱}{۲x}$ مقدار $f(-۴)$ کدام است؟

① ۱ ② -۱ ③ -۳ ④ -۵

۱۳- اگر $f=\{(۲,۵),(۱,۷),(۳,۴)\}$ و $g(x)=۲x-۱$ تابع $gof^{-1}(x)$ کدام است؟

① $gof^{-1}(x)=\{(۷,۱),(۴,۵),(۵,۳)\}$
② $gof^{-1}(x)=\{(۲,۳),(۱,۱),(۵,۳)\}$
③ $gof^{-1}(x)=\{(۳,۲),(۵,۴),(۱,۱)\}$
④ $gof^{-1}(x)=\{(۱,۷),(۳,۵),(۴,۵)\}$

۱۴- اگر $f(x)=\dfrac{۲x-۵}{۳x+۴}$ و $f(g(x))=x$ باشد تابع $g(x)$ برابر کدام است؟

① $g(x)=\dfrac{۴x-۵}{۲+۳x}$
② $g(x)=\dfrac{۴x+۵}{۲-۳x}$
③ $g(x)=\dfrac{۳x+۴}{۲x-۵}$
④ $g(x)=\dfrac{۳x+۲}{۵-۲x}$

۱۵- اگر $f(x)=\sqrt{۲x-x^۲}$ و $g(\frac{۱}{x})=x+\frac{۱}{x}$ باشند دامنه‌ی تعریف تابع fog کدام است؟

① R
② $\{۱\}$
③ $[۰,۱]$
④ $[-۱,۱]$

۱۶- در نمودار تابع $f(x)=x^۲$ به ترتیب چهار عمل انجام می‌دهیم؛ انتقال ۴ واحد به طرف xهای منفی- قرینه نسبت به محور xها- دو برابر کردن برد- انتقال ۳ واحد به طرف yهای منفی- معادله نمودار حاصل کدام است؟

① $y=۲x^۲-۸x-۱۱$
② $y=۲x^۲-۱۶x-۲۹$
③ $y=-۲x^۲-۱۶x-۳۵$
④ $y=-۲x^۲+۱۶x-۳۵$

۱۷- تابع با ضابطه‌ی $y=x|x-۲|$، در یک بازه، نزولی است. ضابطه‌ی معکوس آن در این بازه، کدام است؟

① $f^{-1}(x)=۱-\sqrt{۱+x}\ ;\ x<۰$
② $f^{-1}(x)=۱-\sqrt{۱-x}\ ;\ x<۱$
③ $f^{-1}(x)=۱+\sqrt{۱-x}\ ;\ ۰<x<۱$
④ $f^{-1}(x)=۱-\sqrt{۱-x}\ ;\ ۰<x<۱$

۱۸- نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=x^۲-۳x-۱۰$ را، حداقل چند واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم، تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور xها غیر منفی باشد؟

① ۱
② ۱٫۵
③ ۲
④ ۳

۱۹- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|۲x-۶|-|x+۱|$، در یک بازه، صعودی است. ضابطه‌ی معکوس آن، در این بازه کدام است؟

① $f^{-1}(x)=-x+۷; x>۸$
② $f^{-1}(x)=\frac{۱}{۳}x+۲; x>۳$
③ $f^{-1}(x)=x+۷; x>-۴$
④ $f^{-1}(x)=\frac{۱}{۲}x-۱; -۴<x<۸$

۲۰- اگر $f(x)=x^۳-۳x$ باشد دامنه‌ی تابع $h(x)=\sqrt{x-f(x)}$ کدام است؟

① $(-\infty,-۲]\cup[۰,۲]$
② $[-۲,۰]\cup[۲,+\infty)$
③ $(-\infty,-۲]$
④ $[۰,۲]$

۲۱- اگر $f(x)=-۲+\dfrac{۱}{x-۱}$ و $g(x)=\dfrac{x+۳}{x+۲}$ باشند ضابطه تابع $f^{-1}og^{-1}$ کدام است؟

① x
② $\dfrac{x}{x-۱}$
③ $\dfrac{x-۱}{۲}$
④ $\dfrac{x+۱}{۲}$

۲۲- اگر $f(x+\frac{۱}{x})=x^۳+\frac{۱}{x^۳}$ باشد $f(\sqrt{۵})$ کدام است؟

① $\sqrt{۵}$
② $۳\sqrt{۵}$
③ $۲\sqrt{۵}$
④ $۴\sqrt{۵}$

۲۳- تابع $f(x)=|۲x-۱|-۲|x+۳|$ در بازه‌ای وارون‌پذیر است. ضابطه‌ی وارون آن کدام است؟

① $f^{-1}(x)=-\frac{۱}{۲}(x+۲)\ ;\ |x|\le ۳$
② $f^{-1}(x)=-\frac{۱}{۴}(x+۵)\ ;\ |x|\le ۷$
③ $f^{-1}(x)=-\frac{۱}{۴}(x+۵)\ ;\ |x|\le ۴$
④ $f^{-1}(x)=-\frac{۱}{۲}(x+۲)\ ;\ |x|\le ۵$

۲۴- اگر $g(x)=۲x+۱$ و $(fog)(x)=۸x^۲+۶x+۵$ باشند، تابع $f(x)$ برابر کدام است؟

① $۲x^۲+۳x+۱$
② $۲x^۲-۲x+۳$
③ $۲x^۲-x+۴$
④ $۲x^۲+x+۳$

۲۵- تابع با ضابطه $f(x)=\left|x^{۳}\right|$ با دامنه R، چگونه است؟

① نزولی ② صعودی ③ وارون‌ناپذیر ④ یک به یک

۲۶- ضابطه‌ی معکوس $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & , \quad x\neq ۰\\ ۰ & , \quad x=۰\end{cases}$ به کدام صورت است؟

① $f(x)=x\sqrt{|x|}\,;\, x\in\mathbb{R}$ ② $f^{-۱}(x)=x\sqrt{|x|}\,;\, x\in\mathbb{R}-\{۰\}$

③ $f^{-۱}(x)=x|x|\,;\, x\in\mathbb{R}-\{۰\}$ ④ $f^{-۱}(x)=x|x|\,;\, x\in\mathbb{R}$

۲۷- اگر عبارت $\sqrt[۳]{۲x-x^{۲}}+\sqrt[۴]{\frac{۲}{x^{۲}}-\frac{۹}{۲}}$، عدد حقیقی باشد، مجموعه‌ی مقادیر x در کدام بازه است؟

① $[\frac{۲}{۳},۲]$ ② $[-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳}]$ ③ $[-\frac{۲}{۳},۰)\cup(۰,۲]$ ④ $[-\frac{۲}{۳},۰)\cup(۰,\frac{۲}{۳}]$

۲۸- اگر $f(x)=\frac{۱+x^{۲}}{۱-x^{۲}}$ و $g(x)=\sqrt{x-x^{۲}}$ باشند. دامنه‌ی تعریف تابع gof، کدام است؟

① $[۰,۱)$ ② $\{۰\}$ ③ $(-۱,۱)$ ④ $\mathbb{R}-\{۱,-۱\}$

۲۹- اگر $f(x)=\frac{۱-x^{۲}}{۱+x^{۲}}$ و $g(x)=\sqrt{x-x^{۲}}$ باشند، دامنه‌ی تعریف تابع gof، کدام است؟

① $[۰,۱]$ ② $[-۱,۱]$ ③ R ④ $R-(-۱,۱)$

۳۰- قرینه‌ی خط به معادله‌ی $۳y-۲x=۴$ را نسبت به خط $y=x$، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

① -۲ ② -۱ ③ ۱ ④ ۲

۳۱- در بازه‌ای که تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x-۲|+|x-۳|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x)=۲x^{۲}-x-۱۰$، در چند نقطه مشترک هستند؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ فاقد نقطه‌ی مشترک

۳۲- تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+۲|+|x-۱|$، در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟

① $(-\infty,-۲)$ ② $(-\infty,۱)$ ③ $(-۲,۱)$ ④ $(۱,+\infty)$

۳۳- تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+۱|-|x-۲|$، در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

① $(-\infty,۲)$ ② $(-۱,+\infty)$ ③ $(-۱,۲)$ ④ $(۲,+\infty)$

۳۴- اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$ و $g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$ دو تابع باشند، برد تابع $(g^{-۱}of)-f$، کدام است؟

① $\{-۱,۴\}$ ② $\{۲,۳\}$ ③ $\{۳,۴\}$ ④ $\{۲,-۱\}$

۳۵- الف) دورهٔ تناوب و مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع $y=۲-۳\sin ۴x$ را به‌دست آورید.

ب) دامنهٔ تابع $f(x)=\tan(۲x)$ را به‌دست آورید.

۳۶- معادلهٔ مثلثاتی $\sin x-\cos ۲x=۰$ را حل کنید.

۳۷- دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به‌دست آورید. (راه حل نوشته شود)

$$y=-\pi\sin(\frac{x}{۲})-۲$$

۳۸- معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۲x-\cos x+۱=۰$ را حل کنید.

۳۹- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin^{۴}x-\cos^{۴}x=\sin^{۲}\frac{۵\pi}{۴}$، به کدام صورت است؟

① $x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$ ② $x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ③ $x=k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$ ④ $x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$

۴۰- مجموع جواب‌های معادله‌ی $2(\sin^4 x - \cos^4 x) = 1$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(۱) 3π (۲) 4π (۳) 5π (۴) $\frac{10\pi}{3}$

۴۱- مقدار $\tan 195^\circ - \tan 105^\circ$ برابر کدام است؟

(۱) 2 (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) 4

۴۲- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sqrt{3}(\tan^2 x - 1) + 2\tan x = 0$ کدام است؟

(۱) $x = k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۲) $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۳) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ (۴) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$

۴۳- اگر $f(x) = 2x^2 - 1$ باشد تابع $(fof)(\cos x)$ برابر کدام است؟

(۱) $\sin^4 x$ (۲) $\cos^4 x$ (۳) $\sin 4x$ (۴) $\cos 4x$

۴۴- اگر $\cot 20^\circ = \frac{8}{3}$ باشد حاصل $\frac{2\sin 250^\circ - \cos 160^\circ}{\sin 160^\circ + 3\cos 70^\circ - \sin 110^\circ}$ برابر کدام است؟

(۱) -3 (۲) -2 (۳) 2 (۴) 3

۴۵- نقطه‌ی $A(3, 2)$ بر روی دایره‌ای به مرکز (۲ و ۰) قرار دارد متحرکی از نقطه‌ی A در جهت چرخش عقربه‌ی ساعت کمان ۱۲۰ درجه تا نقطه‌ی M طی کرده است. مختصات M کدام است؟

(۱) $(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$ (۲) $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$ (۳) $(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$ (۴) $(-\frac{3}{2}, 2 - \frac{3\sqrt{3}}{2})$

۴۶- اگر $\tan 25^\circ = 0/48$ باشد حاصل عبارت $\frac{\sin 155^\circ - 3\cos 245^\circ}{\cos 295^\circ - 2\sin 65^\circ}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{12}{19}$ (۲) $-\frac{13}{19}$ (۳) $-\frac{24}{19}$ (۴) $-\frac{26}{19}$

۴۷- اگر $\tan(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{2 - m}{m + 1}, |x| < \frac{\pi}{4}$ باشد حدود تغییرات m چگونه است؟

(۱) $m < -1$ (۲) $m > 2$ (۳) $-1 < m < 2$ (۴) $m > 2$ یا $m < -1$

۴۸- حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$، با فرض $\tan 15^\circ = 0/28$، کدام است؟

(۱) $-\frac{16}{9}$ (۲) $-\frac{9}{16}$ (۳) $\frac{9}{16}$ (۴) $\frac{16}{9}$

۴۹- اگر $\tan\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2} = 1$ باشد، مقدار $\tan 2x$، کدام است؟

(۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۵۰- اگر $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha)$ کدام است؟

(۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $\frac{3}{4}$

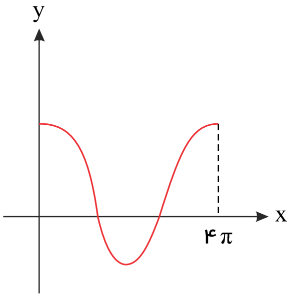
۵۱- اندازه‌ی دو قطر از متوازی‌الاضلاع ۱۲ و $8\sqrt{3}$ واحد است. این دو قطر با زاویه‌ی ۶۰ درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

(۱) ۴۸ (۲) ۵۴ (۳) ۶۴ (۴) ۷۲

۵۲- مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$، در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟

① $\frac{14\pi}{3}$ ② 4π ③ $\frac{9\pi}{2}$ ④ 5π

۵۳- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{1}{2} + 2\cos mx$ است. مقدار تابع در نقطه‌ای به طول $x = \frac{16\pi}{3}$، کدام است؟



① $-\frac{1}{2}$

② $\frac{1}{2}$

③ ۱

④ صفر

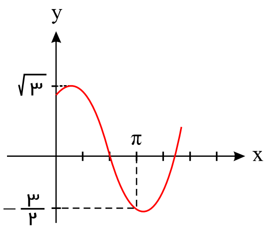
۵۴- جواب کلّی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$، کدام است؟

① $x = \frac{k\pi}{5}$ ② $x = \frac{2k\pi}{5}$ ③ $x = k\pi + \frac{\pi}{5}$ ④ $x = \frac{(2k+1)\pi}{5}$

۵۵- اگر $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ باشد، حاصل $\sqrt{1 + \tan^2 x}(2\sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x)$، کدام است؟

① $\sin x$ ② $\cos x$ ③ $-\sin x$ ④ $-\cos x$

۵۶- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\sin(x + \frac{\pi}{3})$ است. b کدام است؟



① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{3}{2}$

③ $\sqrt{3}$ ④ ۲

۵۷- مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $4\sin x \sin(\frac{3\pi}{2} - x) = 1$، در بازهٔ $[0, 2\pi]$، کدام است؟

① $\frac{5\pi}{2}$ ② 3π ③ 4π ④ 5π

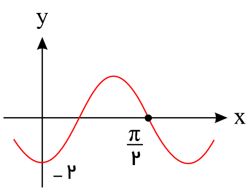
۵۸- حاصل عبارت $\cos\frac{13\pi}{4}\sin\frac{15\pi}{4} + \tan\frac{11\pi}{4}$، کدام است؟

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$

۵۹- دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x)$ کدام است؟

① $\frac{1}{2}$ ② ۱ ③ ۲ ④ π

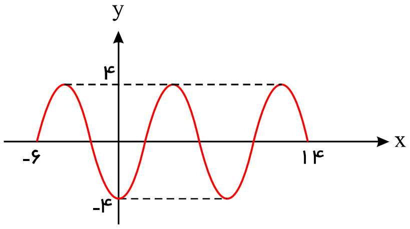
۶۰- شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = a\sin(bx + \frac{\pi}{2})$ است. مقدار $f(\frac{\pi}{12})$ کدام است؟



① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$

③ $-\sqrt{2}$ ④ $-2\sqrt{2}$

۶۱- اگر شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a\cos(\pi+bx)$ باشد، مقدار $f(-\frac{۳۲}{۳})$ کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $-۲\sqrt{۳}$
۳) ۲ ۴) -۲

۶۲- برای $\frac{\pi}{۲۴}<\frac{x-\pi}{۳}<\frac{\pi}{۱۸}$ داریم: $\cos ۲x=۲m-۱$، در این صورت حدود m کدام است؟

۱) $(\frac{۳}{۴},۱]$ ۲) $(\frac{۱}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲}]$ ۳) $(\frac{۳}{۴},\frac{\sqrt{۲}+۲}{۴})$ ۴) $(۰,۱]$

۶۳- تعداد نقاط تلاقی نمودار تابع $y=-۳\sin(۲\pi x)+۱$ با خط $y=-۱$ در بازهٔ $[۰,۱/۵]$ کدام است؟

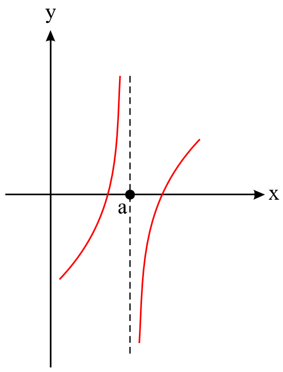
۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۶۴- باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)=x^۳+x^۲-۶$ بر $x+۲$ را بیابید.

۶۵- در صورتی که دو چندجمله‌ای $x^۲+۳x-۲$ و $x^۳-۴x^۲+۵x+m$ در تقسیم بر $x+۲$ هم باقی‌مانده باشند، m را بیابید.

۶۶- در چندجمله‌ای $f(x)=x^۳+ax^۲+x+b$ مقادیر a و b را طوری بیابید که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $x-۱$ برابر ۴ بوده و بر $x+۲$ بخش پذیر باشد.

۶۷- در نمودار زیر نقطهٔ a وجود حد های چپ و راست و وجود حد تابع را بررسی نمایید.



۶۸- حد عبارت $f(x)=\frac{\sqrt{x}-۲}{\sqrt{۲x+۱}-۳}$ را در $x=۴$ را بدست آورید.

۶۹- اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ax+۹}{۱-x+\sqrt{x+۱}}=۳$ باشد، آنگاه حدّ این کسر وقتی $x\to۳$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۷۰- اگر $f(x)=[x]-x$ و $g(x)=\frac{x-۱}{۲x}$ آنگاه $\lim\limits_{x\to۲^-}g(f(x))$ کدام است؟ ($[\,]$، نماد جزء صحیح است)

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) صفر

۷۱- حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{۱+\cos x}}{\tan ۲x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

۷۲- در تابع $f(x)=\frac{|x^۲-x-۲|}{x^۲-۴}$ قدر مطلق تفاضل حد چپ و حد راست آن در $x=۲$ کدام است؟

۱) ۰/۷۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

۷۳- در تابع $f(x)=\dfrac{ax^m-3x+2}{3x-5x^3+x^2}$ اگر $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{2}{5}$ باشد، $f(2)$ کدام است؟

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$

۷۴- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{ax^n+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}}$، اگر $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to3} f(x)$ کدام است؟

① -6 ② -4 ③ 3 ④ 5

۷۵- حاصل $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2-4x+4}}$ کدام است؟

① $-\frac{1}{6}$ ② $-\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ $\frac{1}{6}$

۷۶- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{ax^n-6}$، اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\dfrac{1}{2}$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$، کدام است؟

① $-\frac{1}{6}$ ② $-\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$

۷۷- اگر $\dfrac{1}{2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-\sqrt{3x-2}}{ax+b}$ باشد، آنگاه b کدام است؟

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2

۷۸- حاصل $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1}$، کدام است؟

① -112 ② -96 ③ -84 ④ -72

۷۹- حد عبارت $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+\sqrt{2x+3}}{2-\sqrt{3-x}}$ کدام است؟

① -2 ② 4 ③ -3 ④ 8

۸۰- حد تابع $f(x)=\dfrac{x^2-\sqrt{2x^2-x^3}}{3-\sqrt{1-4x}}$ وقتی $x\to-2$ کدام است؟

① $-\frac{3}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{9}{4}$ ④ $-\frac{9}{4}$

۸۱- حد عبارت $\dfrac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}$، وقتی $x\to-8$، کدام است؟

① -24 ② -18 ③ -12 ④ -6

۸۲- اگر $f(x)=2x+\sqrt{4x^2+x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$، کدام است؟

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ صفر

۸۳- اگر $-\infty=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x-5}{x^2+ax+b}$ باشد، $a+b$ کدام است؟

① -1 ② صفر ③ 1 ④ 2

۸۴ - حدّ عبارت $\frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^۲-۱۸x+۱۶}$، وقتی $x \to ۲$، کدام است؟

① $-\frac{۱}{۳}$ ② $-\frac{۱}{۴}$ ③ $-\frac{۱}{۶}$ ④ $-\frac{۱}{۸}$

۸۵ - در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\sin x}{۱+۲\cos x}$، کدام بیان، درست است؟

① $\lim\limits_{x\to(\frac{۲\pi}{۳})^+} f(x)=-\infty$ ② $\lim\limits_{x\to(\frac{۲\pi}{۳})^+} f(x)=+\infty$ ③ $\lim\limits_{x\to(\frac{۲\pi}{۳})^-} f(x)=-\infty$ ④ $\lim\limits_{x\to\frac{۴\pi}{۳}} f(x)=+\infty$

۸۶ - اگر $f(x)=x-\sqrt{۴x^۲+x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ ، کدام است؟

① -۲ ② -۱ ③ ۲ ④ ۳

۸۷ - حاصل حد $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۴x+۳}{۳x+\sqrt{x^۲-۴}}$ کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ -۲ ④ -۱

۸۸ - قدر مطلق تفاضل حد راست از حد چپ تابع $\frac{x-۲}{|x-۲|}+\frac{|x^۲-۴|}{x^۲-۴}$ وقتی $x \to ۲$ کدام است؟

① ۶ ② ۴ ③ ۰ ④ ۱

۸۹ - اگر $f(x+۲)=\frac{\cos \pi x}{۱+\sin \pi x}$، حاصل $\lim\limits_{x\to۳} f(x)$ کدام است؟

① ۰ ② -۱ ③ ۱ ④ $+\infty$

۹۰ - اگر تابع f با ضابطه ی $f(x)=a[x]+۲[۱-x]$ در $x_{۰}=۲$ دارای حد باشد، مقدار عددی a کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۹۱ - حد تابع $\frac{x+\sqrt[۳]{x^۲-x^۳}-\sqrt[۳]{x^۲}}{\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{۱-x}-۱}$ وقتی $x \to ۱$ برابر کدام است؟

① ۱ ② $\sqrt[۳]{۲}$ ③ $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}$ ④ $۱+\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}$

۹۲ - اگر $f(۴-x)=\frac{x^۲-x-۲}{\sqrt{x^۳-۴x^۲+۴x}}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to۴^-} f(x-۲)$ کدام است؟

① $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ ② $-\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ ③ $۳\sqrt{۲}$ ④ $-۳\sqrt{۲}$

۹۳ - حد کسر $\frac{\sin x(۱-\cos ۲x)}{\sin ۲x(\cos x-۱)}$ وقتی $x \to ۰$ کدام است؟

① -۲ ② ۲ ③ -۳ ④ ۳

۹۴ - اگر $f(x)=۲x^۳+ax^۲+۴x-۳$ بر $x+۱$ بخش‌پذیر باشد، مجموع مجذورات صفرهای $f(x)$ کدام است؟

① $\frac{۶۱}{۴}$ ② $\frac{۹}{۲}$ ③ $\frac{۲۵}{۳}$ ④ $\frac{۶۵}{۴}$

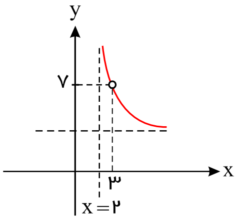
۹۵ - اگر $f(x)=\frac{x^۲+x+۱}{۲x^۲+۳x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to۰^+} f(\frac{۱}{x})$ کدام است؟

① $\frac{۱}{۳}$ ② صفر ③ $\frac{۱}{۲}$ ④ ۱

۹۶- اگر $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x+4}+2}{x^2+2ax+b}=+\infty$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^3+2x+5}{bx^3+x^2+7}$ کدام است؟

① $-\frac{1}{3}$ ② 3 ③ -3 ④ $\frac{1}{3}$

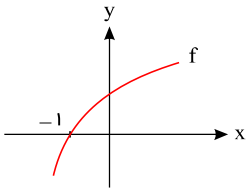
۹۷- اگر قسمتی از نمودار تابع $y=\dfrac{2x^2+ax+b}{x^2+cx+d}$ مطابق شکل زیر باشد، حاصل $ab+cd$ کدام است؟



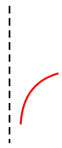
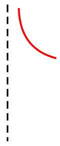
① -15 ② 15

③ 30 ④ -30

۹۸- اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x)=\sqrt{\dfrac{2x+1}{f(x)}}$ در اطراف $x=-1$ به کدام صورت است؟



①  ② 

③  ④ 

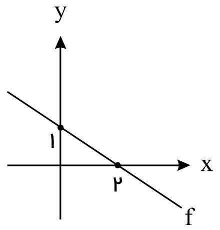
۹۹- کدام‌یک از توابع زیر در همسایگی چپ $x=0$ تعریف می‌شود، اما در همسایگی راست این نقطه تعریف نمی‌شود؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① $y=\sqrt{x-[x]}$ ② $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-[x]}}$ ③ $y=\dfrac{1}{[x]}$ ④ $y=\dfrac{1}{[-x]}$

۱۰۰- اگر $\lim\limits_{x\to k^+}\dfrac{1-x}{x^2+x-12}=+\infty$ باشد، مقدار k کدام است؟

① فقط ۳ ② فقط ۴- ③ ۳ یا ۴- ④ وجود ندارد.

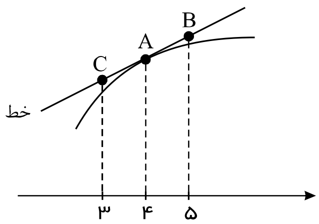
۱۰۱- نمودار تابع خطی f به شکل روبه‌رو است. حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2f(x)+1}{f(3x)-x}$ کدام است؟



① 1 ② 2

③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{2}{5}$

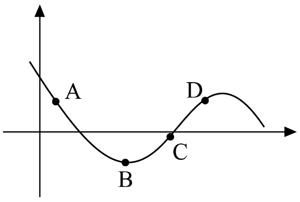
۱۰۲- برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم $f'(4)=1{,}5$ و $f(4)=24$ با توجه به شکل، مختصات نقاط A، B و C را بیابید.



۱۰۳- مشتق توابع زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x)=\left(\dfrac{x}{2x-1}\right)^5$ ب) $g(x)=x^2(\sqrt{x+1})$

۱۰۴ - نقاط داده شده روی منحنی را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.



شیب	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	-۲
نقطه				

۱۰۵ - مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+x & x\geq ۱ \\ ۳x-۱ & x<۱ \end{cases}$ را در نقطهٔ $x=۱$ بررسی کنید.

۱۰۶ - مشتق تابع $y=\frac{۱}{x}(۲\sqrt{x}-۱)^{۴}$ را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

۱۰۷ - آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x+۲}$ را وقتی متغیر از $x_{۱}=۲$ به $x_{۲}=۷$ تغییر می کند به‌دست آورید.

۱۰۸ - مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف) $f(x)=(x^{۲}+۱)^{۳}(۵x-۱)$ ب) $g(x)=\frac{۹x-۲}{\sqrt{x}}$

۱۰۹ - اگر $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x<۰ \\ x & x\geq ۰ \end{cases}$ نشان دهید $f'_{+}(۰)$ و $f'_{-}(۰)$ موجودند ولی $f'(۰)$ موجود نیست.

۱۱۰ - ضابطه و دامنهٔ مشتق تابع $f(x)=|x^{۲}-۴|$ را به‌دست آورید و سپس نمودار f' را رسم کنید.

۱۱۱ - مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x^{۲}-۲x|$ را در نقاط $x_{۰}=۰$ و $x_{۰}=۲$ بررسی کنید و سپس نمودار f و f' را رسم کنید.

۱۱۲ - در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(۲x+۱)^{-\frac{۱}{۲}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع، از $x_{۱}=۴$ تا $x_{۲}=۱۲$ ، از آهنگ لحظه‌ای آن در $x=۴$ ، چقدر بیشتر است؟

(۱) $\frac{۷}{۵۴۰}$ (۲) $\frac{۱۱}{۵۴۰}$ (۳) $\frac{۷}{۲۷۰}$ (۴) $\frac{۱۱}{۲۷۰}$

۱۱۳ - خط $y=ax+b$ نمودار تابع $f(x)=\log_{۲}^{x+۱}$ را دو نقطه به طول‌های $-\frac{۱}{۲}$ و ۳ قطع می‌کند. $(۷a)$ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۱۴ - در نقطه‌ای با کدام طول، خط مماس بر نمودار تابع $y=x^{۲}-۳x+۲$ موازی خط گذرابر دو نقطه‌ی $(۱,۴)$ و $(۳,۲)$ است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۱۵ - در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x^{۲}+x}$ حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ کدام است؟

(۱) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ (۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$ (۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ (۴) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

۱۱۶ - معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y=\frac{۲x-۱}{x+۳}$ در نقطه‌ای به طول -۲ واقع بر آن کدام است؟

(۱) $y=۷x+۹$ (۲) $y=۶x+۷$ (۳) $y=-۷x+۹$ (۴) $y=۴x+۳$

۱۱۷ - مشتق عبارت $y=\left(x+\sqrt{x^{۲}+۱}\right)^{۳}$ به ازای $x=\frac{۳}{۴}$ کدام است؟

(۱) ۱۶٫۸ (۲) ۱۸٫۴ (۳) ۱۹٫۲ (۴) ۱۹٫۶

۱۱۸ - در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x، در نقطه‌ی $x=۱$ با نمو متغیر ۰٫۲۱، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

(۱) $\frac{۱}{۴۲}$ (۲) $\frac{۱}{۲۱}$ (۳) $\frac{۳}{۴۲}$ (۴) $\frac{۲}{۲۱}$

۱۱۹ - در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع، از $x_1=۴$ تا $x_۲=۶/۲۵$ ، از آهنگ لحظه‌ای آن در $x=۴$، چقدر کمتر است؟

① $\frac{۱}{۳۶}$ ② $\frac{۱}{۱۸}$ ③ $\frac{۵}{۷۲}$ ④ $\frac{۱}{۱۲}$

۱۲۰ - در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x-\frac{۱}{x} & x\geq ۱ \\ x^۲+ax+b & x<۱ \end{cases}$ ، مقدار $f'(۱)$ موجود است، $f(۱-\sqrt{۲})$ کدام می‌باشد؟

① $۳-\sqrt{۲}$ ② $۲-\sqrt{۲}$ ③ $۲-۲\sqrt{۲}$ ④ $۳-۲\sqrt{۲}$

۱۲۱ - مشتق مرتبه‌ی سوم تابع $y=\sqrt[۳]{۲x-۱}$ به ازای $x=۱$ کدام است؟

① $-\frac{۴۰}{۹}$ ② $\frac{۴۰}{۹}$ ③ $\frac{۴۰}{۲۷}$ ④ $\frac{۸۰}{۲۷}$

۱۲۲ - بر روی منحنی $y=\sqrt{x^۲-۱۶}$ دو نقطه‌ی A و B به طول‌های ۴ و ۸ انتخاب شده است. خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی C واقع بر آن موازی خط AB است. طول نقطه‌ی C کدام است؟

① ۶ ② $۲\sqrt{۲}$ ③ $۲\sqrt{۶}$ ④ $۴\sqrt{۲}$

۱۲۳ - در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)^۳$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ ، کدام است؟

① -۲۱ ② -۱۸ ③ ۱۲ ④ ۱۵

۱۲۴ - نمودارهای دو تابع $y=(\frac{\sqrt{۳}}{۳})^{۲x}$ و $y=۳^x+\frac{۸}{۳}$ در نقطه‌ی A متقاطع‌اند. فاصله‌ی نقطه‌ی A از نقطه‌ی $(-۱,۱)$ کدام است؟

① ۱ ② $\sqrt{۲}$ ③ ۲ ④ $\sqrt{۵}$

۱۲۵ - اگر تابع f در $x=۴$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{f(x)+۷}{x-۴}=\frac{-۳}{۲}$ باشد، آنگاه مشتق $y=\frac{f(۲x)}{x}$ در $x=۲$ ، کدام است؟

① $-\frac{۱}{۴}$ ② $-\frac{۱}{۲}$ ③ $\frac{۱}{۴}$ ④ $\frac{۱}{۲}$

۱۲۶ - به‌ازای کدام مقدار a، خط به معادله‌ی $y=۵x+a$، بر نمودار تابع $y=۲x^۲-۳x+۶$، مماس است؟

① -۳ ② -۲ ③ ۲ ④ ۳

۱۲۷ - تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \frac{۱}{x-۱} & ; x\geq ۲ \\ -x^۲+ax+b & ; x<۲ \end{cases}$، روی مجموعهٔ اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

① -۲ ② -۱ ③ ۱ ④ ۲

۱۲۸ - اگر $g(x)=x+\sqrt{x}$ و $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\frac{۴}{۳}$ باشد، $(fog)'(۱)$ کدام است؟

① $\frac{۲}{۳}$ ② $\frac{۳}{۲}$ ③ ۲ ④ ۳

۱۲۹ - در تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x+۲)\sqrt{۴x+۱}$، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[۰,۲]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x=\frac{۳}{۴}$ چقدر بیشتر است؟

① ۰/۱۰ ② ۰/۱۵ ③ ۰/۲۰ ④ ۰/۲۵

۱۳۰ - تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۴x-۵}{x+۱}$ و دامنهٔ $[۰,۸]$، خط مماس بر نمودار آن موازی پاره‌خطی است که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل کند. این خط مماس، محور yها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

① -۲ ② $-۱/۵$ ③ -۱ ④ $-۰/۵$

۱۳۱ – تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{۱+|x|}$ در $x=\alpha$ مشتق ندارد. مقدار $f'_{+}(\alpha)-f'_{-}(\alpha)$ کدام است؟

(۱) -۱ (۲) $\frac{۱}{۲}$ (۳) ۱ (۴) تعریف نشده

۱۳۲ – در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|۵-x\sqrt{x}|$ مقدار $f'(۱)+f'(۴)$ کدام است؟

(۱) ۰ (۲) $\frac{۱}{۲}$ (۳) $\frac{۳}{۲}$ (۴) ۳

۱۳۳ – اگر $f(x)=\left|x^{۲}-۴\right|+\sqrt{۳x^{۲}}$، حاصل $\lim\limits_{\Delta x\to ۰^{-}}\frac{f(۲+\Delta x)-f(۲)}{\Delta x}$ کدام است؟

(۱) $۲\sqrt{۳}-۱$ (۲) $-۴+\sqrt{۳}$ (۳) $۴\sqrt{۳}+۱$ (۴) $\sqrt{۳}+۲$

۱۳۴ – یک ظرف آب مشتمل بر ۴۰ لیتر آب است در لحظه ی $t=۰$ یک سوراخ در ظرف ایجاد می شود. اگر حجم آب باقی مانده در ظرف، پس از t ثانیه از رابطه ی $V=۴۰(۱-\frac{t}{۱۰۰})^{۲}$ به دست آید، در چه زمانی آهنگ آنی تغییر V برابر آهنگ متوسط تغییر آن از $t=۰$ تا $t=۱۰۰$ (ثانیه) است؟

(۱) ۲۵ (۲) ۱۲۵ (۳) ۵۰ (۴) ۴۵

۱۳۵ – در تابع $f(x)=\begin{cases}x^{۲}+۳x & x\geq ۱\\ x^{۲}-۳x+۶ & x<۱\end{cases}$ حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱)-f(۱-h^{۲})}{h^{۲}}$ چقدر است؟

(۱) ۵ (۲) -۱ (۳) ۴ (۴) -۲

۱۳۶ – تابع f مشتق‌پذیر است. اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)+۲}{x-۲}=\frac{۱}{۲}$ باشد، معادله‌ی خط مماس بر تابع $y=xf(\sqrt{x})$ در نقطه‌ای به طول $x=۴$ واقع بر آن کدام است؟

(۱) $۲y+۳x+۴=۰$ (۲) $۲y+۳x=۲۲$ (۳) $۲y=۳x+۱۰$ (۴) $۲y=۳x-۲۲$

۱۳۷ – نمودار دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=\frac{x^{۳}}{۳}+x^{۲}+۲x-۳$ و $g(x)=۲x^{۲}+x+a$ بر هم مماس‌اند. عرض نقطه‌ی تماس کدام است؟

(۱) $\frac{۱}{۳}$ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) $-\frac{۸}{۳}$

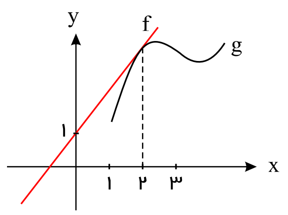
۱۳۸ – معادله‌ی خط مماس بر تابع $y=x^{۳}-۵x^{۲}+۷x+۱$ در $x=۱$ واقع بر منحنی، وتری با چه طول روی سهمی $y=x^{۲}-۵x+۶$ جدا می کند؟

(۱) $\sqrt{۱۷}$ (۲) $\sqrt{۱۳}$ (۳) $\sqrt{۱۱}$ (۴) $\sqrt{۱۹}$

۱۳۹ – در تابع $y=f(x)$، با افزایش x از ۲ به $۲+h$ مقدار تابع به‌اندازهٔ $۳h-h^{۲}$ زیاد می‌شود. شیب خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در $x=۲$ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۴۰ – در شکل زیر اگر داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(۲x)-f(۲)}{x-۱}=۴$، آنگاه حاصل $f(۱)+g'(۲)$ چقدر است؟



(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۴۱ – اگر $f(x)=(x^{۲}+۱)(x^{۴}+۱)$ و $g(x)=x^{۸}-۱$ مقدار $g'(۱)f(۱)-f'(۱)g(۱)$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

۱۴۲ - اگر $f(x)=\frac{3x+1}{2x+1}$ و $g(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{(2x+1)^2}$ باشد، مقدار $\frac{g'(x)f'(x)-g(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$ به‌ازای $x=9$ کدام است؟

① $\frac{5}{6}$ ② $-\frac{5}{6}$ ③ $\frac{7}{6}$ ④ $-\frac{7}{6}$

۱۴۳ - مشتق تابع $f(x)=(\sqrt{5x+1})(3x-2)^3$ در نقطه‌ای به‌طول صفر کدام است؟

① ۲۰ ② ۱۶ ③ ۸ ④ صفر

۱۴۴ - در مورد تابع $f(x)=\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{2-x}}$ کدام گزینه صحیح است؟

① $f'(0)=0$ ② $f'(0)=+\infty$ ③ $f'_+(0)=+\infty$ ④ $f'_+(0)=-\infty$

۱۴۵ - الف) جدول تغییرات تابع $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ را رسم و نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی آن را مشخص کنید.

ب) نقاط بحرانی تابع f و اکسترمم مطلق این تابع را در بازهٔ $[-1,3]$ مشخص کنید.

۱۴۶ - الف) جدول تغییرات تابع $f(x)=x^3-3x+4$ را رسم کنید و نقاط اکسترمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

ب) اکسترمم‌های مطلق تابع $g(x)=x^3+2x-5$ را در بازهٔ $[-2,1]$ در صورت وجود تعیین کنید.

۱۴۷ - دو عدد حقیقی a و b را طوری بیابید که داشته باشیم $2a+b=60$ و حاصل‌ضرب آن‌ها بیشترین مقدار ممکن گردد.

۱۴۸ - اگر تابع $f(x)=ax^2+bx$ در $x=1$ دارای ماکسیمم نسبی برابر ۷ باشد، مقادیر a و b را به‌دست آورید.

۱۴۹ - ورق فلزی مربع شکل به‌طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشهٔ آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس لبهٔ جعبه را به اندازهٔ x برمی‌گردانیم تا یک جعبهٔ در باز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد؟

۱۵۰ - دو عدد حقیقی را بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

۱۵۱ - نقطه‌ای با کدام طول بر روی محور xها انتخاب شود، به‌طوری که تفاضل فواصل آن، از دو نقطهٔ $A\begin{vmatrix}1\\5\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}7\\-2\end{vmatrix}$، بیش‌ترین مقدار را داشته باشد؟

① ۸ ② ۹ ③ ۱۰ ④ ۱۱

۱۵۲ - کم‌ترین مقدار تابع $y=\frac{1}{4}x^4-x^3-2x^2$ کدام است؟

① -36 ② -32 ③ -24 ④ -18

۱۵۳ - مجموعه‌ی طول نقاط بحرانی تابع $y=|x^2-4x|$ کدام است؟

① $\{2\}$ ② $\{0,4\}$ ③ $\{0,2,4\}$ ④ $\{2,4\}$

۱۵۴ - تابع $y=x^3+ax^2+b$ در نقطه $(2,3)$ دارای مینیمم نسبی است. b کدام است؟

① ۷ ② ۶ ③ ۴ ④ ۵

۱۵۵ - بیشترین مقدار تابع $y=x+\frac{9}{x}$ به ازای مقادیر منفی x کدام است؟

① -2 ② -6 ③ -4 ④ -8

۱۵۶ - مجموعه‌ی طول نقاط بحرانی تابع $y=x^{\frac{8}{3}}-4x^{\frac{2}{3}}$ کدام است؟

① $\{0,1\}$ ② $\{-1,0\}$ ③ $\{-1,1\}$ ④ $\{-1,0,1\}$

۱۵۷ - مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-15x$، در بازه‌ی $[-4,3]$ ، کدام است؟

① -18 و ۲۴ ② -45 و ۲۷ ③ -36 و ۲۷ ④ -27 و ۳۶

۱۵۸ - در ساخت یک قیف به‌شکل مخروط قائم به‌حجم $\frac{\pi}{3}$، با کدام ارتفاع، کم‌ترین مقدار جنس مصرف می‌شود؟

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② ۱ ③ $\sqrt[3]{2}$ ④ $\sqrt{2}$

۱۵۹ – در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x|x - ۴|$، فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکسیمم نسبی و مینیمم نسبی آن، کدام است؟

① $\sqrt{۵}$ ② $۲\sqrt{۲}$ ③ $۳\sqrt{۲}$ ④ $۲\sqrt{۵}$

۱۶۰ – بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن، بر روی منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{۱۲ - x}$، در ناحیهٔ اول واقع شود، کدام است؟

① $۸\sqrt{۲}$ ② $۸\sqrt{۳}$ ③ ۱۶ ④ ۱۸

۱۶۱ – در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x|x| - ۲x$، فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکسیمم نسبی و مینیمم نسبی آن، کدام است؟

① $۲\sqrt{۲}$ ② ۳ ③ $۳\sqrt{۲}$ ④ ۴

۱۶۲ – بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم‌دایره باشد، کدام است؟

① ۱۸ ② ۲۴ ③ ۲۷ ④ ۳۶

۱۶۳ – طول خط وصل کننده‌ی نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی تابع $y = -x^۳ + ۳x + ۱$ چقدر است؟

① $\sqrt{۲}$ ② $۲\sqrt{۲}$ ③ $\sqrt{۵}$ ④ $۲\sqrt{۵}$

۱۶۴ – به ازای چه مقادیری از a، تابع $y = \dfrac{x + ۲}{x - a}$ در هر یک از شاخه‌هایش همواره نزولی می‌باشد؟

① $a < -۲$ ② $-۲ < a < ۲$ ③ $a > -۲$ ④ $a < -۲ \ , \ a > ۲$

۱۶۵ – نقطه‌ی مینیمم تابع با ضابطه‌ی $y = x^۲ - ax + ۱$ روی نیمساز ربع دوم و چهارم قرار دارد، a کدام است؟

① $۱ + \sqrt{۵}$ ② $۱ - \sqrt{۲۰}$ ③ $۱ + \sqrt{۲۰}$ ④ $\sqrt{۵}$

۱۶۶ – مجموع طول‌های نقاط بحرانی تابع $f(x) = (x^۳ - ۳x^۲ + ۴)^{\frac{۱}{۳}}$ برابر است با:

① ۱ ② -۱ ③ ۲ ④ ۰

۱۶۷ – اختلاف ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \dfrac{۲}{x^۲ - ۲x + ۵}$ در بازه‌ی $[-۱, ۲]$ کدام است؟

① $\dfrac{۱}{۴}$ ② $\dfrac{۱}{۲}$ ③ $\dfrac{۳}{۴}$ ④ $\dfrac{۳}{۲}$

۱۶۸ – خط گذرنده از نقاط ماکسیمم و می‌نیمم نسبی منحنی به معادله‌ی $f(x) = ۲x^۳ - ۹x^۲ + ۱۲x + ۱$ با جهت مثبت محور xها کدام زاویه را تشکیل می‌دهد؟

① ۳۰° ② ۶۰° ③ ۱۲۰° ④ ۱۳۵°

۱۶۹ – نقطه $A(۱, \dfrac{۳}{۲})$ اکسترمم نسبی $f(x) = x^۳ - \dfrac{۹}{۲}x^۲ + ax + b$ است. Min نسبی تابع f کدام است؟

① $(۱, \dfrac{۳}{۲})$ ② $(۲, ۱)$ ③ $(۱, ۲)$ ④ $(-۱, -۲)$

۱۷۰ – حاصل ضرب اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = ۲\cos x + \sin x + ۳$ کدام است؟

① $\sqrt{۵} + ۳$ ② ۹ ③ ۴ ④ ۶

۱۷۱ – مجموع بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = \sqrt{x - ۱} + \sqrt{۵ - x}$ کدام است؟

① $\sqrt{۲}$ ② $۲\sqrt{۲} + ۲$ ③ $۲\sqrt{۲}$ ④ $۲\sqrt{۲} - ۱$

۱۷۲ – کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = \dfrac{۲}{۱ - \cos x} + \dfrac{۲}{۱ + \cos x}$ کدام است؟

① ۲ ② ۴ ③ ۶ ④ ۸

۱۷۳ - بیش‌ترین محیط مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که طول وتر آن‌ها برابر یک واحد است، کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) $\sqrt{۲}+۱$ (۴) $\sqrt{۲}+۲$

۱۷۴ - در ساخت یک لیوان فلزی (بدون درب) به شکل استوانهٔ قائم با حجم π ، با کدام ارتفاع کم‌ترین مقدار فلز مصرف می‌شود؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ (۳) $\frac{۱}{۲}$ (۴) $\sqrt[۳]{۲}$

۱۷۵ - کدام گزینه در مورد تابع $f(x)=۲-|x+۱|$ صحیح است؟

(۱) ماکسیمم مطلق برابر با صفر دارد. (۲) مینیمم مطلق برابر با صفر دارد. (۳) ماکسیمم مطلق برابر با ۲ دارد. (۴) مینیمم مطلق برابر با ۲ دارد.

۱۷۶ - مجموعه‌ی طول نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{\frac{۳}{۵}}(۴-x)$ کدام است؟

(۱) $\left\{۰,\frac{۳}{۲}\right\}$ (۲) $\left\{۰,\frac{۲}{۳}\right\}$ (۳) $\varnothing$ (۴) $\{۴,۲\}$

۱۷۷ - بیشترین مقدار تابع $f(x)=x^۳-۳x+۱$ در فاصله‌ی $[۰,۲]$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۷۸ - طول ماکسیمم نسبی تابع $f(x)=x^۴-۴x^۳-۸x^۲+۱$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۴

۱۷۹ - اگر $۲x+y=۵$ ، آنگاه ماکسیمم مقدار $x^۳y^۲$ کدام است؟

(۱) $\frac{۲۷}{۴}$ (۲) $\frac{۲۷}{۲}$ (۳) $\frac{۹}{۲}$ (۴) $\frac{۹}{۴}$

۱۸۰ - اگر x و y دو ضلع قائم از مثلثی به وتر ۵ باشند، بیش‌ترین مقدار $x+۲y$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{۵}$ (۲) $۵\sqrt{۵}$ (۳) $۲\sqrt{۵}$ (۴) $\sqrt{۱۰}$

۱۸۱ - می‌خواهیم یک مخزن استوانه‌ای با حجم ۲۰۰π بسازیم. هزینهٔ ساخت هر واحد سطح درپوش و کف مخزن ۸ و هر واحد سطح دیوارهٔ مخزن ۱۰ واحد قیمت است. ارتفاع استوانه را چه مقدار انتخاب کنیم تا هزینهٔ ساخت حداقل شود؟

(۱) ۸ (۲) ۴ (۳) ۱۰ (۴) ۵

۱۸۲ - تابع $y=[\sqrt{x}]-x$ در بازهٔ $(۰,۹)$ به ترتیب از راست به چپ چند ماکسیمم نسبی و چند مینیمم نسبی دارد؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

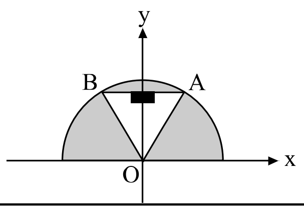
(۱) ۲، صفر (۲) ۱، ۱ (۳) صفر، ۲ (۴) ۲، ۱

۱۸۳ - معادلهٔ خطی که نقاط اکسترمم تابع $y=\frac{ax}{x^۲+۱}$ را به‌هم وصل می‌کند، $y=۴x+b$ است. b کدام است؟

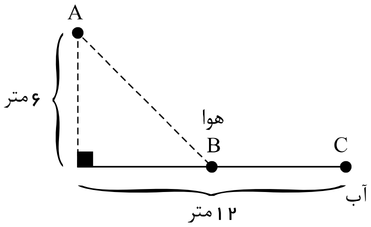
(۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) ۳

۱۸۴ - مثلث OAB مطابق شکل در داخل منحنی $y=\sqrt{۲-x^۲}$ محاط شده است. به‌گونه‌ای که یک رأس آن روی مبدأ مختصات و ۲ رأس دیگر آن روی منحنی قرار دارد. اگر مساحت قسمت هاشورخورده در شکل کمترین مقدار ممکن باشد، اندازهٔ میانهٔ وارد بر ضلع AB کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\sqrt{۲}$ (۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ (۴) $\frac{۱}{۲}$



۱۸۵ - مرغ دریایی در نقطهٔ A قرار گرفته و قصد دارد به نقطهٔ C برود. برای این کار، قسمتی از مسیر را در هوا و بخشی را روی سطح آب، مطابق شکل زیر طی می‌کند. اگر این پرنده روی آب ۱۰ کالری‌برمتر و در هوا $۱۰\sqrt{۵}$ کالری‌برمتر انرژی مصرف کند، فاصلهٔ نقطهٔ B از C چند متر باشد تا مرغ دریایی کم‌ترین انرژی ممکن را مصرف کند؟



(۱) ۳

(۲) ۹

(۳) ۴

(۴) ۶

۱۸۶ - می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای‌شکل با ضخامت معین و درباز بسازیم که گنجایش آن ۳۰۰۰ واحد مکعب باشد. ارتفاع قوطی کدام باشد تا مقدار فلز به‌کاررفته برای تولید آن مینیمم شود؟ $(\pi \simeq ۳)$

(۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۱۵ (۴) ۸

۱۸۷ - اگر نقطهٔ $A(۲,۱)$ یکی از اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x) = x^۳ + bx^۲ + d$ باشد، عرض از مبدأ خط واصل اکسترمم‌های این تابع کدام است؟

(۱) -۳ (۲) صفر (۳) ۵ (۴) ۴

پاسخنامه تشریحی

۱ -

$$f(x)=\sqrt{x-۱}\rightarrow D_f: x-۱\geq ۰\rightarrow x\geq ۱$$

$$g(x)=۲x^۲-۱\rightarrow D_g=\mathbb{R}$$

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g, g(x)\in D_f\}=\{x|x\in\mathbb{R}, ۲x^۲-۱\geq ۱\}=\{x|x\in\mathbb{R}, ۲x^۲\geq ۲\}=\{x|x\in\mathbb{R}, x^۲\geq ۱\}$$

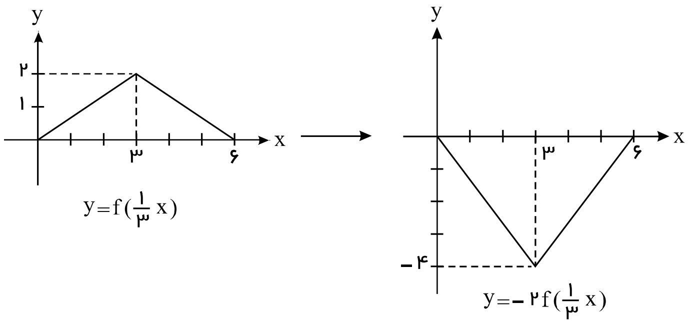
$= x\geq ۱$ یا $x\leq -۱ = (-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$

۲ - می‌دانیم اگر $f(a)=b$ باشد، آن‌گاه $f^{-۱}(b)=a$ است.

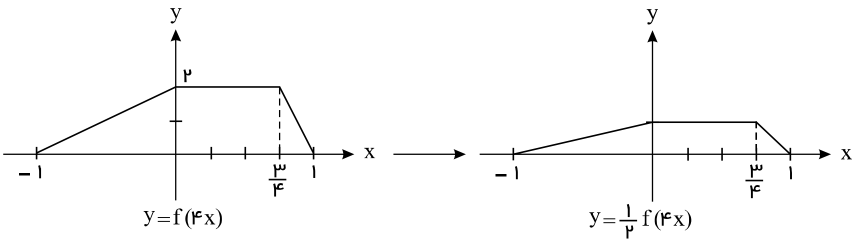
$$g^{-۱}of^{-۱}(۵)=g^{-۱}(f^{-۱}(۵))=g^{-۱}(۶۴)=۴$$

علت: $\begin{cases} f^{-۱}(۵)=\alpha\rightarrow f(\alpha)=۵\rightarrow \dfrac{۱}{۸}\alpha-۳=۵\rightarrow \dfrac{۱}{۸}\alpha=۸\rightarrow\alpha=۶۴ \\ g^{-۱}(۶۴)=\beta\rightarrow g(\beta)=۶۴\rightarrow\beta^۳=۶۴\rightarrow\beta=۴\end{cases}$

۳ - ابتدا طول نقاط را ۳ برابر کرده و سپس عرض نقاط را ۲− برابر کنیم.



۴ - کافی است طول نقاط را $\frac{۱}{۴}$ برابر کرده و سپس عرض نقاط را نصف کنیم.



۵ - گزینه ۴

$$۲x-x^۲\geq ۰\Rightarrow x(۲-x)\geq ۰\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & ۰ & & ۲ & +\infty \\ \hline \text{عبارت} >۰ & - & ۰ & + & ۰ & - \end{array}\Rightarrow ۰\leq x\leq ۲$$

حال برای پیدا کردن دامنه‌ی $f(۳-x)$ کافی است $۳-x$ را بین صفر و ۲ قرار دهیم.

$$۰\leq ۳-x\leq ۲\Rightarrow -۳\leq -x\leq -۱\Rightarrow ۳\geq x\geq ۱\Rightarrow x\in[۱,۳]$$

البته می‌توانید ابتدا ضابطه‌ی $f(۳-x)$ را به‌دست آورید و سپس زیر رادیکال را بزرگ‌ترمساوی صفر قرار دهید.

۶ - گزینه ۲

$$fog(x)=f(g(x))=(۲(x+۲)-۳)^۲=(۲x+۱)^۲=۴x^۲+۴x+۱$$

$$f(x)=(۲x-۳)^۲\Rightarrow f(x)=۴x^۲-۱۲x+۹$$

تلاقی: $۴x^۲+۴x+۱=۴x^۲-۱۲x+۹\Rightarrow ۱۶x=۸\Rightarrow x=\dfrac{۱}{۲}$

۷ - گزینه ۲ کافی است دامنه‌ی تعریف دو تابع را پیدا کرده و سپس از آن‌ها اشتراک بگیریم (زیرا رادیکال‌ها باید بزرگ‌تر مساوی صفر باشند.)

$D_f: x^۲ - ۱ \geq ۰ \to x^۲ \geq ۱ \to x \geq ۱, \; x \leq -۱ \quad (I)$
$D_g: ۴ - x^۲ \geq ۰ \to x^۲ \leq ۴ \to -۲ \leq x \leq ۲ \quad (II)$

از اشتراک $I \; , \; II$ جواب $-۲ \leq x \leq -۱ \cup ۱ \leq x \leq ۲$ حاصل می‌شود یعنی $x \in [-۲, -۱] \cup [۱, ۲]$

۸ - گزینه ۴ زیر هر دو رادیکال باید بزرگ‌ترمساوی صفر باشد.

$x^۲ - x - ۲ \geq ۰ \to (x-۲)(x+۱) \geq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x \leq -۱ \; x \geq ۲ (I)$
$۲ - x \geq ۰ \to x \leq ۲ \quad (II)$

از اشتراک $I \; , \; II$ نتیجه می‌شود $x \leq -۱$ یا $x = ۲$ یعنی $x \in (-\infty, -۱] \cup \{۲\}$.

۹ - گزینه ۱

ابتدا دامنه‌ی تعریف توابع g, f را به‌دست می‌آوریم.

$f(x) = \sqrt{۴x - x^۲} \to D_f: ۴x - x^۲ \geq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰ \leq x \leq ۴$
$g(x) = \frac{۱}{x} \to D_g: R - \{۰\}$
$D_{fog} = \{x \in D_g, \; g(x) \in D_f\} = \left\{x \neq ۰, \; ۰ \leq \frac{۱}{x} \leq ۴\right\}$

حال باید نامعادله‌ی $۰ \leq \frac{۱}{x} \leq ۴$ را حل کنیم:

$\begin{cases} \frac{۱}{x} \geq ۰ \to x > ۰ \\ \frac{۱}{x} \leq ۴ \xrightarrow{\text{معکوس}} x \geq \frac{۱}{۴} \end{cases}$ (چون دو طرف هم‌علامتند هنگام معکوس کردن، جهت عوض می‌شود) $\xrightarrow{\text{اشتراک}} x \geq \frac{۱}{۴}$

پس $D_{fog}: x \geq \frac{۱}{۴}, \; x \neq ۰ = x \geq \frac{۱}{۴}$

۱۰ - گزینه ۱

$gof(x) = g(f(x)) = g(\frac{۲x-۱}{x+۳}) = \dfrac{\frac{۶x-۳}{x+۳}+۱}{\frac{۲x-۱}{x+۳}-۲} = \dfrac{\frac{۶x-۳+x+۳}{x+۳}}{\frac{۲x-۱-۲x-۶}{x+۳}} = \frac{۷x}{-۷} = -x$

۱۱ - گزینه ۲ کافی است که تابع $y = f(x)$ را با خط $y = x$ قطع دهیم.

$x = \sqrt{x+۲} \Rightarrow x^۲ = x + ۲ \to x^۲ - x - ۲ = ۰ \to (x-۲)(x+۱) = ۰ \to \begin{cases} x = ۲ & \text{ق ق} \\ x = -۱ & \text{غ ق ق} \end{cases}$

جواب منفی مورد قبول نیست. زیرا در معادله‌ی $\left(x = \sqrt{x+۲}\right)$ صدق نمی‌کند.

۱۲ - گزینه ۴ تابع خطی به‌صورت $f(x) = ax + b$ نشان داده می‌شود.

$f(x) + f(\frac{۱}{x}) = \frac{x^۲ - ۱۲x + ۱}{۲x} \to ax + b + \frac{a}{x} + b = \frac{ax^۲ + bx + a + bx}{x}$
$= \frac{ax^۲ + ۲bx + a}{x} = \frac{۲ax^۲ + ۴bx + ۲a}{۲x} = \frac{x^۲ - ۱۲x + ۱}{۲x} \xrightarrow{\text{مقایسه}} a = \frac{۱}{۲}, \; ۴b = -۱۲, \; b = -۳$

بنابراین $f(x) = \frac{۱}{۲}x?۳ \to f(?۴) = ?۲?۳ = ?۵$

۱۳ - گزینه ۱

$f^{-۱}(x) = \{(۵,۲)\,(۷,۱)\,(۴,۳)\} \quad , \quad g(x) = ۲x - ۱$
$gof^{-۱}(x) = g(f^{-۱}(x)) = \; g\left(f^{-۱}(۵)\right) = g(۲) = ۲(۲) - ۱ = ۳$
$g\left(f^{-۱}(۷)\right) = g(۱) = ۲(۱) - ۱ = ۱$
$g\left(f^{-۱}(۴)\right) = g(۳) = ۲(۳) - ۱ = ۵$

پس: $gof^{?۱}(x) = \{(۵,\,۳)(۷\,,۱)(۴,۵)\}$

۱۴ - گزینه ۲

$(fog)(x) = x \to f(g(x)) = x, \; f(x) = \frac{۲x-۵}{۳x+۴} \to f(g(x)) = \frac{۲g(x)-۵}{۳g(x)+۴}$

پس: $\frac{۲g(x)-۵}{۳g(x)+۴} = x \to ۲g(x) - ۵ = ۳xg(x) + ۴x$

$\to ۲g(x) - ۳xg(x) = ۴x + ۵ \to (۲-۳x)g(x) = ۴x + ۵ \Rightarrow g(x) = \frac{۴x+۵}{۲-۳x}$

۱۵ - گزینه ۲

ابتدا دامنه‌ی تعریف توابع g, f را به‌دست می‌آوریم.

$$g(\frac{1}{x}) = x + \frac{1}{x} \to g(x) = \frac{1}{x} + x \to Dg : R - \{0\}$$

$$f(x) = \sqrt{2x - x^2} \to D_f : 2x - x^2 \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} D_f : 0 \leq x \leq 2$$

$$D_{fog} = \left\{x \in Dg,\ g(x) \in D_f\right\} = \left\{x \neq 0\ ,\ 0 \leq x + \frac{1}{x} \leq 2\right\}$$

$$= \left\{x \neq 0\ ,\ 0 \leq \frac{x^2+1}{x} \leq 2\right\}$$

حال باید نامعادله‌ی $2 \leq \frac{x^2+1}{x} \leq 0$ را حل کنیم:

$$\begin{cases} \frac{\overbrace{x^2+1}^{+}}{x} \geq 0 \to x > 0 \\ \frac{x^2+1}{x} \leq 2 \to \frac{x^2+1}{x} - 2 \leq 0 \to \frac{x^2+1-2x}{x} \leq 0 \to \frac{\overbrace{(x-1)^2}^{\text{نامنفی}}}{x} \leq 0 \to x < 0\ ,\ x = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x = 1$$

پس $D_{fog} = \{x \neq 0\ ,\ x = 1\} = \{1\}$

۱۶ - گزینه ۳ به ترتیب اعمال مورد نظر داریم:

$$f(x) = x^2 \xrightarrow{\text{۴ واحد انتقال به طرف } x \text{ های منفی}} f_1(x) = (x+4)^2$$
$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x\text{ها}} f_2(x) = -(x+4)^2 \xrightarrow{\text{دو برابر کردن برد}} f_3(x) = -2(x+4)^2$$
$$\xrightarrow{\text{۳ واحد انتقال به طرف } y \text{ های منفی}} f_4(x) = -2(x+4)^2 - 3 \to f_4(x) = -2(x^2 + 8x + 16) - 3$$

در نتیجه $y = -2x^2 - 16x - 35$

۱۷ - گزینه ۳ ابتدا با تعیین علامت، قدرمطلق را بر می‌داریم:

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & x < 2 \end{cases}$$

برای تشخیص نزولی بودن از تابع مشتق گرفته کوچک‌تر از صفر قرار می‌دهیم.

$$x \geq 2 : y = x^2 - 2x \to y' = 2x - 2 < 0 \to 2x < 2 \to x < 1 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \varnothing$$
$$x < 2 : y = -x^2 + 2x \to y' = -2x + 2 < 0 \to -2x < -2 \to x > 1 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} 1 < x < 2$$

پس تابع در $(1, 2)$ نزولی است حال ضابطه‌ی معکوس را پیدا می‌کنیم.

$$y = -x^2 + 2x \to y = -(x^2 - 2x) \to y = -((x-1)^2 - 1) \to y = -(x-1)^2 + 1$$
$$\to (x-1)^2 = 1 - y \to x - 1 = \pm\sqrt{1-y} \xrightarrow[\text{سمت چپ مثبت است}]{1<x<2} x - 1 = \sqrt{1-y} \to x = 1 + \sqrt{1-y}$$
$$\to f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1-x}$$

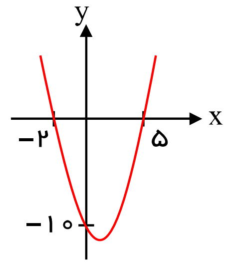
روش دوم:

متوجه شدیم که تابع، $y = -x^2 + 2x$ $(1 < x < 2)$ است یک عدد دلخواه مثلاً $x = \frac{3}{2}$ در تابع قرار می‌دهیم.

$x = \frac{3}{2} \to y = \frac{3}{4} \to \begin{vmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \end{vmatrix} \in f \to \begin{vmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \end{vmatrix} \in f^{-1} \to$ فقط در گزینه‌ی سوم صدق می‌کند.

۱۸ - گزینه ۳ کافی است تابع درجه‌ی دوم را رسم کنیم در این تابع چون ضریب x^2 مثبت است تابع دارای Min است حال محل برخورد تابع با محورهای مختصات را به‌دست می‌آوریم.

$$y = 0 \to x^2 - 3x - 10 = 0 \to (x-5)(x+2) = 0 \to x = -2, x = 5$$
$$x = 0 \to y = -10$$



واضح است اگر نمودار تابع f را حداقل دو واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم طول نقاط برخورد نمودار تابع f با محور xها غیر منفی می‌باشد.

۱۹ - گزینه ۳

در ابتدا باید تکلیف قدرمطلق‌ها را معلوم کنیم. پس از تابع مشتق گرفته و بزرگ‌تر از صفر قرار دهیم.

x	$-\infty$	-1		3		$+\infty$
$2x-6$	$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$	

$x < -1\ :\ y = -2x + 6 - (-x - 1) \to y = -x + 7 \to y' = -1 < 0 \to$ نزولی

$-1 \leq x \leq 3\ :\ y = -2x + 6 - (x + 1) \to y = -3x + 5 \to y' = -3 < 0 \to$ نزولی

$x > ۳ : \; y = ۲x - ۶ - (x+۱) \to y = x - ۷ \to y' = ۱ > ۰ \to$ صعودی

پس باید ضابطه‌ی معکوس تابع $y = x - ۷$ را به ازای $x > ۳$ به‌دست آوریم.

$y = x - ۷ \to x = y + ۷ \to f^{-۱}(x) = x + ۷ \;,\; x > -۴$

توجه کنید: $y = x - ۷ \xrightarrow{x>۳} y > -۴$

دقت کنید $y > -۴$ برد تابع f است که در حقیقت دامنه‌ی تابع معکوس است.

۲۰ - گزینه ۱

تابع $\sqrt{x - f(x)} = \sqrt{۴x - x^۳}$ وقتی با معنی است که $۴x - x^۳ \geq ۰$ باشد

$۴x - x^۳ \geq \to x(۴ - x^۲) \geq ۰ \to$

x	$-\infty$		-۲		۰		۲		$+\infty$
عبارت ≥ ۰		$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$	

بنابراین دامنه‌ی تعریف تابع به‌صورت $(-\infty, -۲] \cup [۰, ۲]$ است.

۲۱ - گزینه ۱ از آنجایی که $(gof)^{-۱}(x) = (f^{-۱}og^{-۱})(x)$ است، ضابطه‌ی تابع gof را تعیین می‌کنیم.

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(\frac{-۲x+۳}{x-۱}) = \frac{\frac{-۲x+۳}{x-۱} + ۳}{\frac{-۲x+۳}{x-۱} + ۲} = \frac{\frac{-۲x+۳+۳x-۳}{x-۱}}{\frac{-۲x+۳+۲x-۲}{x-۱}} = \frac{x}{۱} = x$$

چون $(gof)(x) = x$ است و معکوس تابع همانی خود تابع همانی است پس ضابطه‌ی $(gof)^{-۱}(x)$ برابر x است.

۲۲ - گزینه ۳ می دانیم: $\boxed{a^۳ + b^۳ = (a+b)^۳ - ۳ab(a+b)}$

$$f(x + \frac{۱}{x}) = x^۳ + \frac{۱}{x^۳} \to f(x + \frac{۱}{x}) = (x + \frac{۱}{x})^۳ - ۳x(\frac{۱}{x})(x + \frac{۱}{x})$$

$$\to f(x + \frac{۱}{x}) = (x + \frac{۱}{x})^۳ - ۳(x + \frac{۱}{x})$$

$$\xrightarrow{x + \frac{۱}{x} = t} f(t) = t^۳ - ۳t \to f(\sqrt{۵}) = (\sqrt{۵})^۳ - ۳\sqrt{۵} = ۵\sqrt{۵} - ۳\sqrt{۵} = ۲\sqrt{۵}$$

۲۳ - گزینه ۲ تابع $f(x) = |۲x - ۱| - |۲x + ۶|$ را به صورت چند ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} -۲x + ۱ + ۲x + ۶ & x < -۳ \\ -۲x + ۱ - ۲x - ۶ & -۳ \leq x \leq \frac{۱}{۲} \\ ۲x - ۱ - ۲x - ۶ & x > \frac{۱}{۲} \end{cases} = \begin{cases} ۷ & x < -۳ \\ -۴x - ۵ & -۳ \leq x \leq \frac{۱}{۲} \\ -۷ & x > \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -۴x - ۵$ در بازه $\left[-۳, \frac{۱}{۲}\right]$ معکوس‌پذیر است.

$$y = -۴x - ۵ \to ۴x = -y - ۵ \to x = -\frac{y}{۴} - \frac{۵}{۴} \to f^{-۱}(x) = -\frac{۱}{۴}(x + ۵)$$

دقت کنید که دامنه‌ی $f^{-۱}$ برابر برد تابع f است. پس کافی است برد تابع $y = -۴x - ۵$ را در بازه‌ی $\left[-۳, \frac{۱}{۲}\right]$ بدست آوریم.

$$-۳ \leq x \leq \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\times(-۴)} ۱۲ \geq -۴x \geq -۲ \xrightarrow{\text{با } (-۵) \text{ جمع می‌کنیم}} ۷ \geq -۴x - ۵ \geq -۷$$

$$\to -۷ \leq y \leq ۷ \to |y| \leq ۷ \to D_{f^{-۱}} = |x| \leq ۷$$

۲۴ - گزینه ۳ روش اول:

$$fog(x) = ۸x^۲ + ۶x + ۵ \to f\,(g(x)) = ۸x^۲ + ۶x + ۵ \to f(۲x + ۱) = ۸x^۲ + ۶x + ۵$$

برای پیدا کردن $f(x)$ باید $۲x + ۱$ را مساوی t قرار دهیم.

$$۲x + ۱ = t \to ۲x = t - ۱ \to x = \frac{t - ۱}{۲}$$

پس: $f(t) = ۸(\frac{t-۱}{۲})^۲ + ۶(\frac{t-۱}{۲}) + ۵ \to f(t) = ۸(\frac{t^۲ + ۱ - ۲t}{۴}) + ۳(t - ۱) + ۵$

$$\to f(t) = ۲t^۲ + ۲ - ۴t + ۳t - ۳ + ۵ \to f(t) = ۲t^۲ - t + ۴$$

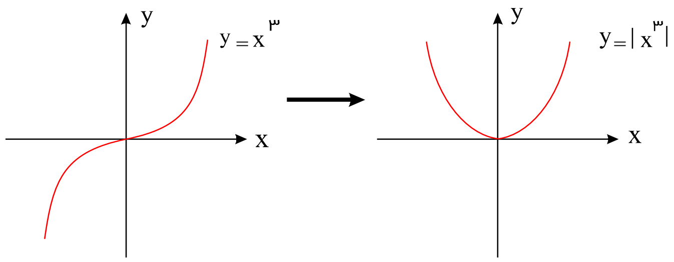
$$\to f(x) = ۲x^۲ - x + ۴$$

روش دوم: $f(۲x + ۱) = ۸x^۲ + ۶x + ۵$ است. به جای x یک عدد دلخواه مثلاً صفر قرار می‌دهیم:

$$x = ۰ \to f(۱) = ۵$$

گزینه‌ای درست است که اگر در آن $x = ۱$ را قرار دهیم حاصل برابر ۵ شود که گزینه‌ی سوم است.

۲۵ - گزینه ۳



این تابع، غیر یک به یک و در نتیجه وارون‌ناپذیر است.

۲۶ - گزینه ۴

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & , \ x\neq 0\\ 0 & , \ x=0\end{cases}=\begin{cases}\sqrt{x} & x>0\\ & x=0\\ -\sqrt{-x} & x<0\end{cases}$$

$$y=\sqrt{x}\rightarrow x=y^2\rightarrow f^{-1}(x)=x^2 \ , \ \overbrace{x>0}^{\text{برد } y_1=\sqrt{x}}$$

$$y=-\sqrt{-x}\rightarrow -x=y^2\rightarrow x=-y^2\rightarrow f^{-1}(x)=-x^2 \ , \ \underbrace{x<0}_{\text{برد } y_2=-\sqrt{-x}}$$

$$\rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases}x^2 & , \ x>0\\ 0 & , \ x=0\\ -x^2 & , \ x<0\end{cases}\rightarrow f^{-1}(x)=x|x| \ , \ x\in\mathbb{R}$$

۲۷ - گزینه ۴ روش اول:

چون یک چندجمله‌ای در زیررادیکال با فرجه‌ی فرد قرار دارد، بنابراین رادیکال با فرجه‌ی فرد به ازای تمام مقادیر x تعریف شده است و فقط باید عبارت زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهید.

$$\frac{2}{x^2}-\frac{9}{2}\geq 0\rightarrow\frac{4-9x^2}{2x^2}\geq 0\rightarrow\begin{cases}\text{صورت}=0\rightarrow 9x^2=4\rightarrow x^2=\frac{4}{9}\rightarrow x=\pm\frac{2}{3}\\ \text{مخرج}=0\rightarrow 2x^2=0\rightarrow x=0\end{cases}$$

x	$-\infty$		$\frac{-2}{3}$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
عبارت ≥ 0		$-$	0	$+$	ن	$+$	0	$-$	

$$\rightarrow x\in[\frac{-2}{3},0)\cup(0,\frac{2}{3}]$$

روش دوم:

اگر $x=1$ باشد زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج، منفی می‌شود بنابراین گزینه‌های اول و سوم که شامل $x=1$ هستند حذف می‌شوند در ضمن $x=0$ مخرج را صفر می‌کند و گزینه‌ی دوم که شامل $x=0$ است نیز حذف می‌شود.

۲۸ - گزینه ۲ ابتدا دامنه‌ی تعریف دو تابع g, f را بدست می‌آوریم.

$$f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}\rightarrow D_f=R-\{-1,1\}$$

$$g(x)=\sqrt{x-x^2}\rightarrow D_g: x-x^2\geq 0\rightarrow x(1-x)\geq 0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}0\leq x\leq 1$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \ , \ f(x)\in D_g\}=\{\underbrace{x\neq 1, x\neq -1}_{I} \ , \ 0\leq\frac{1+x^2}{1-x^2}\leq 1\}$$

$$\frac{\overbrace{1+x^2}^{+}}{1-x^2}\geq 0\rightarrow 1-x^2>0\rightarrow x^2<1\rightarrow -1<x<1 \quad (II)$$

$$\frac{1+x^2}{1-x^2}\leq 1\rightarrow\frac{1+x^2}{1-x^2}-1\leq 0\rightarrow\frac{1+x^2-1+x^2}{1-x^2}\leq 0\rightarrow\frac{2x^2}{1-x^2}\leq 0$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
عبارت ≤ 0		$-$	ت ن	$+$	0	$+$	ت ن	$-$	

$$\rightarrow x<-1 \ \text{ یا } \ x>1 \ \text{ یا } \ x=0 \quad (III)$$

از اشتراک I و II و III به جواب $x=0$ می‌رسیم.

۲۹ - گزینه ۲ ابتدا دامنه‌ی تعریف دو تابع f و g را بدست می‌آوریم.

$$f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}\rightarrow D_f=R$$

$$g(x)=\sqrt{x-x^2}\rightarrow D_g: \ x-x^2\geq 0\rightarrow x(1-x)\geq 0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}0\leq x\leq 1$$

$D_{gof} = \{x \in D_f\ ,\ f(x) \in D_g\} \ = \{\underbrace{x \in R}_{I}\ ,\ ۰ \le \frac{۱ - x^۲}{۱ + x^۲} \le ۱\}$

$\frac{۱ - x^۲}{\underbrace{۱ + x^۲}_{+}} \ge ۰ \to ۱ - x^۲ \ge ۰ \to x^۲ \le ۱ \to -۱ \le x \le ۱ \ :\ II$

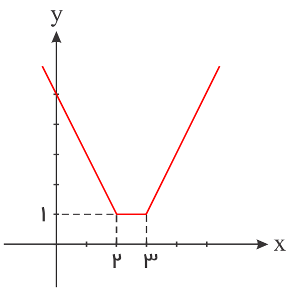
$\frac{۱ - x^۲}{۱ + x^۲} \le ۱ \to \frac{۱ - x^۲}{۱ + x^۲} - ۱ \le ۰ \to \frac{۱ - x^۲ - ۱ - x^۲}{۱ + x^۲} \le ۰ \to \frac{\overbrace{-۲x^۲}^{\text{منفی یا صفر}}}{\underbrace{۱ + x^۲}_{+}} \le ۰$ همواره برقرار است : III

از اشتراک سه جواب به دست آمده به جواب $۱ \le x \le ۱-$ می‌رسیم. $(x \in [-۱, ۱])$

۳۰ - گزینه ۱ دو تابع f و $f^{-۱}$ نسبت به خط $y = x$ متقارن هستند و می‌دانیم برای پیدا کردن ضابطه‌ای معکوس یک تابع، ابتدا رابطه را برحسب x بدست می‌آوریم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$۳y - ۲x = ۴ \to ۲x = ۳y - ۴ \to x = \frac{۳}{۲}y - ۲ \to f^{-۱}(x) = \frac{۳}{۲}x - ۲ \xrightarrow{x=۰}$ عرض از مبدأ $= -۲$

۳۱ - گزینه ۱ تابع داده شده یک تابع گلدانی است که در $x < ۲$ اکیداً نزولی است.

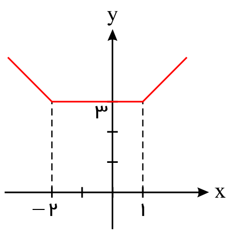


$y = |x - ۲| + |x - ۳| \xrightarrow{x<۲} y = -x + ۲ - x + ۳ \to y = -۲x + ۵$

$\begin{cases} f(x) = -۲x + ۵ \\ g(x) = ۲x^۲ - x - ۱۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} ۲x^۲ - x - ۱۰ = -۲x + ۵ \to ۲x^۲ + x - ۱۵ = ۰$

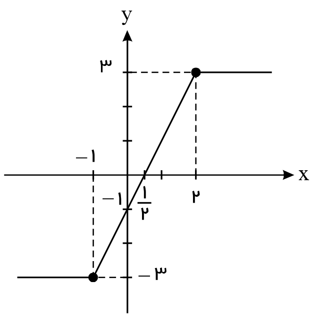
$\xrightarrow{\Delta = b^۲ - ۴ac = ۱ + ۱۲۰ = ۱۲۱} \begin{cases} x = \frac{-۱ + ۱۱}{۴} = \frac{۵}{۲} (x < ۲ \text{ با توجه به}) \text{ غ ق ق} \\ x = \frac{-۱ - ۱۱}{۴} = -۳ \quad \text{ق ق} \end{cases} \to$ در یک نقطه مشترک هستند

۳۲ - گزینه ۱ تابع داده‌شده یک تابع گلدانی است که در $x = -۲$ و $x = ۱$ (ریشه‌های داخل قدرمطلق) دارای شکست است.



$\to x < -۲ :$ اکیداً نزولی

۳۳ - گزینه ۳ تابع داده‌شده یک تابع سرسره‌ای (آبشاری) است که در $x = -۱$ و $x = ۲$ (ریشه‌های داخل قدرمطلق) دارای شکست است.



$\longrightarrow -۱ < x < ۲ :$ اکیداً صعودی

۳۴ - گزینه ۴

$$g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\} \rightarrow g^{-۱}\{(۳,۲),(۲,۴),(۶,۵),(۱,۳)\}$$

$$g^{-۱}of(x):\begin{cases} g^{-۱}(f(۱))=g^{-۱}(۲)=۴ \\ g^{-۱}(f(۲))=g^{-۱}(۵)=\varnothing \\ g^{-۱}(f(۳))=g^{-۱}(۴)=\varnothing \\ g^{-۱}(f(۴))=g^{-۱}(۶)=۵ \end{cases} \rightarrow g^{-۱}of(x)=\{(۱,۴),(۴,۵)\}$$

$$\begin{cases} g^{-۱}of(x)=\{(۱,۴),(۴,۵)\} \\ f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\} \end{cases} \rightarrow g^{-۱}of(x)=\{(۱,۴-۲),(۴,۵-۶)\}=\{(۱,۲),(۴,-۱)\}$$

بنابراین برد تابع به‌صورت $\{۲,-۱\}$ است.

۳۵ - الف)

$$y=a\sin bx+c \rightarrow \begin{cases} T=\dfrac{۲\pi}{|b|} \\ Max=|a|+c \\ Min=-|a|+c \end{cases}$$

پس:

$$T=\frac{۲\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}$$

$$Max=|a|+c=|-۳|+۲=۳+۲=۵$$

$$Min=-|a|+c=-|-۳|+۲=-۳+۲=-۱$$

ب)

$$y=\tan f(x)\rightarrow f(x)\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

پس:

$$f(x)=\tan ۲x\rightarrow ۲x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\rightarrow x\neq\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$$

۳۶ - می‌دانیم که $\cos ۲a=۱-۲\sin^۲ a$ است.

$$\sin x-\cos ۲x=۰\longrightarrow \sin x-(۱-۲\sin^۲ x)=۰\longrightarrow ۲\sin^۲ x+\sin x-۱=۰$$

$$\xrightarrow{\sin x=A} ۲A^۲+A-۱=۰\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases} A=-۱ \\ A=-\dfrac{c}{a}=\dfrac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$A=-۱\longrightarrow \sin x=-۱\xrightarrow{\text{حالت خاص}} x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$$

$$A=\frac{۱}{۲}\longrightarrow \sin x=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶}\longrightarrow\begin{cases} x=۲k\pi+\alpha=۲k\pi+\dfrac{\pi}{۶} \\ x=۲k\pi+\pi-\alpha=۲k\pi+\dfrac{۵\pi}{۶} \end{cases}$$

۳۷ - در تابع $y=a\sin bx+c$ می‌دانیم که $T=\dfrac{۲\pi}{|b|}$ و $Max=|a|+c$ و $Min=-|a|+c$ است.

$$y=-\pi\sin(\frac{x}{۲})-۲\rightarrow\begin{cases} T=\dfrac{۲\pi}{|\frac{۱}{۲}|}=۴\pi \\ Max=|-\pi|-۲=\pi-۲ \\ Min=-|-\pi|-۲=-\pi-۲ \end{cases}$$

۳۸ - می‌دانیم $\cos ۲a=۲\cos^۲ a-۱$ است.

$$\cos ۲x-\cos x+۱=۰\rightarrow ۲\cos^۲ x-۱-\cos x+۱=۰\rightarrow ۲\cos^۲ x-\cos x=۰$$

$$\rightarrow \cos x(۲\cos x-۱)=۰\rightarrow\begin{cases} \cos x=۰\xrightarrow{\text{حالت خاص}} x=k\pi+\dfrac{\pi}{۲} \\ \cos x=\dfrac{۱}{۲}=\cos\dfrac{\pi}{۳}\xrightarrow{\cos x=\cos\alpha\rightarrow x=۲k\pi\pm\alpha} x=۲k\pi\pm\dfrac{\pi}{۳} \end{cases}$$

۳۹ - گزینه ۴

می‌دانیم $\boxed{\cos ۲a = \cos^۲ a - \sin^۲ a}$

$$\sin^۴ x - \cos^۴ x = \sin^۲ \frac{۵\pi}{۴} \Rightarrow (\sin^۲ x - \cos^۲ x)\underbrace{(\sin^۲ x + \cos^۲ x)}_{۱} = (\frac{-\sqrt{۲}}{۲})^۲ \Rightarrow -\cos ۲x = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۲x = -\frac{۱}{۲} = \cos \frac{۲\pi}{۳} \xrightarrow{x=۲k\pi\pm\alpha} ۲x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$$

توجه کنید که $\sin \frac{۵\pi}{۴} = \sin(\pi + \frac{\pi}{۴}) = -\sin \frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است.

۴۰ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{\cos ۲a = \cos^۲ a - \sin^۲ a}$

$$۲(\sin^۴ x - \cos^۴ x) = ۱ \to ۲\underbrace{(\sin^۲ x + \cos^۲ x)}_{۱}(\sin^۲ x - \cos^۲ x) = ۱$$

$$\to ۲(-\cos ۲x) = ۱ \to \cos ۲x = -\frac{۱}{۲} = \cos \frac{۲\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x=۲k\pi+\alpha} ۲x = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳} \to x = k\pi + \frac{\pi}{۳} \\ \xrightarrow{x=۲k\pi-\alpha} ۲x = ۲k\pi - \frac{۲\pi}{۳} \to x = k\pi - \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c} k & x \\ \hline ۰ & \frac{\pi}{۳}, \cancel{-\frac{\pi}{۳}} \\ ۱ & \frac{۴\pi}{۳}, \frac{۲\pi}{۳} \\ ۲ & \cancel{\frac{۷\pi}{۳}}, \frac{۵\pi}{۳} \end{array} \to \text{مجموع جواب ها} = \frac{\pi}{۳} + \frac{۴\pi}{۳} + \frac{۲\pi}{۳} + \frac{۵\pi}{۳} = \frac{۱۲\pi}{۳} = ۴\pi$$

۴۱ - گزینه ۴

می دانیم: $\boxed{\tan a + \cot a = \frac{۲}{\sin ۲a}}$

$$\tan ۱۹۵ - \tan ۱۰۵ = \tan(\pi + ۱۵) - \tan(\frac{\pi}{۲} + ۱۵) = \tan ۱۵ + \cot ۱۵ = \frac{۲}{\sin ۳۰} = \frac{۲}{\frac{۱}{۲}} = ۴$$

۴۲ - گزینه ۳

می دانیم: $\boxed{\tan ۲a = \frac{۲\tan a}{۱ - \tan^۲ a}}$

$$\sqrt{۳}(\tan^۲ x - ۱) + ۲\tan x = ۰ \to ۲\tan x = \sqrt{۳}(۱ - \tan^۲ x)$$

$$\to \frac{۲\tan x}{۱ - \tan^۲ x} = \sqrt{۳} \Rightarrow \tan ۲x = \sqrt{۳} = \tan \frac{\pi}{۳} \xrightarrow{x=k\pi+\alpha} ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۳} \to x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}$$

۴۳ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\cos ۲a = ۲\cos^۲ a - ۱}$

$$fof(\cos x) = f(f(\cos x)) = f(۲\cos^۲ x - ۱) = f(\cos ۲x)$$
$$= ۲\cos^۲ ۲x - ۱ = \cos ۴x$$

۴۴ - گزینه ۲ تمام زاویه‌ها را برحسب ۲۰° می‌نویسیم.

$$\frac{۲\sin ۲۵۰^\circ - \cos ۱۶۰^\circ}{\sin ۱۶۰^\circ + ۳\cos ۷۰^\circ - \sin ۱۱۰^\circ} = \frac{۲\sin(\frac{۳\pi}{۲} - ۲۰) - \cos(\pi - ۲۰)}{\sin(\pi - ۲۰) + ۳\cos(\frac{\pi}{۲} - ۲۰) - \sin(\frac{\pi}{۲} + ۲۰)}$$

$$= \frac{-۲\cos ۲۰ + \cos ۲۰}{\sin ۲۰ + ۳\sin ۲۰ - \cos ۲۰} = \frac{-\cos ۲۰}{۴\sin ۲۰ - \cos ۲۰}$$

$$\text{همه جملات را بر } \sin ۲۰ \text{ تقسیم می‌کنیم} = \frac{-\cot ۲۰}{۴ - \cot ۲۰} = \frac{\frac{-۸}{۳}}{۴ - \frac{۸}{۳}} = \frac{\frac{-۸}{۳}}{\frac{۴}{۳}} = -۲$$

۴۵ - گزینه ۴ اگر مرکز دایره $O(x_۰ , y_۰)$ بوده و بخواهیم نقطه‌ی A روی دایره را به اندازه‌ی θ درجه در جهت عقربه‌های ساعت روی دایره به شعاع R دوران دهیم. مختصات نقطه‌ی جدید به صورت $(x_۰ + R\cos\theta \ , \ y_۰ - R\sin\theta)$ در می‌آید.

$$R = ۳, O(۰, ۲) \to M = (۰ + ۳\cos ۱۲۰ \ , \ ۲ - ۳\sin ۱۲۰) \to M = \left(-\frac{۳}{۲} \ , \ ۲ - \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

۴۶ – گزینه ۳ تمام زوایا را برحسب ۲۵° می‌نویسیم .

$$\frac{\sin ۱۵۵^\circ - ۳\cos ۲۴۵^\circ}{\cos ۲۹۵^\circ - ۲\sin ۶۵^\circ} = \frac{\sin(\pi - ۲۵) - ۳\cos(\frac{۳\pi}{۲} - ۲۵)}{\cos(\frac{۳\pi}{۲} + ۲۵) - ۲\sin(\frac{\pi}{۲} - ۲۵)} = \frac{\sin ۲۵ + ۳\sin ۲۵}{\sin ۲۵ - ۲\cos ۲۵} = \frac{۴\sin ۲۵}{\sin ۲۵ - ۲\cos ۲۵}$$

صورت و مخرج کسر را بر $\cos ۲۵$ تقسیم می کنیم: $\frac{۴\tan ۲۵}{\tan ۲۵ - ۲} = \frac{۴\,(۰٫۴۸)}{۰٫۴۸ - ۲} = \frac{۱٫۹۲}{-۱٫۵۲} = -\frac{۱۹۲}{۱۵۲} = -\frac{۲۴}{۱۹}$

۴۷ – گزینه ۳ ابتدا حدود کمان تانژانت را بدست می آوریم.

$$|x| < \frac{\pi}{۴} \to -\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۴} \to -\frac{\pi}{۴} < -x < \frac{\pi}{۴} \to ۰ < \frac{\pi}{۴} - x < \frac{\pi}{۲}$$

یعنی کمان تانژانت در ناحیه‌ی اول قرار دارد و در ناحیه‌ی اول دایره‌ی مثلثاتی تانژانت مثبت است یعنی:

$$\frac{۲ - m}{m + ۱} > ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$$

m	$-\infty$		-۱		۲		$+\infty$
عبارت > ۰		$-$	ن	$+$	۰	$-$	

$\to -۱ < m < ۲$

۴۸ – گزینه ۱ ابتدا تمام زوایا را برحسب ۱۵° می‌نویسیم:

$$\cos ۲۸۵^\circ = \cos(۲۷۰^\circ + ۱۵^\circ) = \sin ۱۵^\circ \ , \ \sin ۲۵۵^\circ = \sin(۲۷۰^\circ - ۱۵^\circ) = -\cos ۱۵^\circ$$
$$\sin ۵۲۵^\circ = \sin(۵۴۰^\circ - ۱۵^\circ) = \sin(۱۸۰^\circ - ۱۵^\circ) = \sin ۱۵^\circ \ , \ \sin ۱۰۵^\circ = \sin(۹۰^\circ + ۱۵^\circ) = \cos ۱۵^\circ$$

بنابراین داریم : $\frac{\cos ۲۸۵^\circ - \sin ۲۵۵^\circ}{\sin ۵۲۵^\circ - \sin ۱۰۵^\circ} = \frac{\sin ۱۵^\circ + \cos ۱۵^\circ}{\sin ۱۵^\circ - \cos ۱۵^\circ}$

تمام جملات را بر $\cos ۱۵^\circ$ تقسیم می‌کنیم در نتیجه:

$$\frac{\tan ۱۵^\circ + ۱}{\tan ۱۵^\circ - ۱} = \frac{۰٫۲۸ + ۱}{۰٫۲۸ - ۱} = \frac{۱٫۲۸}{-۰٫۷۲} = \frac{-۱۲۸}{۷۲} = -\frac{۱۶}{۹}$$

۴۹ – گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\tan ۲a = \frac{۲\tan a}{۱ - \tan^۲ a} \ , \ \cot a - \tan a = ۲\cot ۲a}$

$$\tan\frac{x}{۲} - \cot\frac{x}{۲} = ۱ \to \cot\frac{x}{۲} - \tan\frac{x}{۲} = -۱ \to ۲\cot x = -۱ \to \cot x = \frac{-۱}{۲} \to \tan x = -۲$$
$$\tan ۲x = \frac{۲\tan x}{۱ - \tan^۲ x} \to \tan ۲x = \frac{۲(-۲)}{۱ - ۴} = \frac{-۴}{-۳} = \frac{۴}{۳}$$

۵۰ – گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{(\sin a - \cos a)^۲ = ۱ - \sin ۲a}$

$$\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱ - \sin ۲\alpha = \frac{۱}{۴} \to \sin ۲\alpha = \frac{۳}{۴}$$
$$\cos(\frac{۳\pi}{۲} - ۲\alpha) = -\sin ۲\alpha = -\frac{۳}{۴}$$

۵۱ – گزینه ۴ مساحت هر چهارضلعی از نصف حاصل‌ضرب دو قطر در سینوس زاویه‌ی بینشان به‌دست می‌آید.

$$S = \frac{۱}{۲}(۱۲)(۸\sqrt{۳})(\sin ۶۰^\circ) = (۴۸\sqrt{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = ۲۴ \times ۳ = ۷۲$$

۵۲ – گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{\sin ۲a = ۲\sin a\cos a \ , \ \cos(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \sin\alpha}$

$$\sin ۲x + \cos(\frac{\pi}{۲} - x) = ۰ \to ۲\sin x\cos x + \sin x = ۰ \to \sin x(۲\cos x + ۱) = ۰$$

$$\to \begin{cases} \sin x = ۰ \xrightarrow{\text{حال خاص}} x = k\pi \xrightarrow{k=۰,۱,۲} x = ۰, \pi, ۲\pi \\ ۲\cos x + ۱ = ۰ \to \cos x = -\frac{۱}{۲} = \cos\frac{۲\pi}{۳} \xrightarrow{x = ۲k\pi \pm \alpha} \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳} \xrightarrow{k=۰} x = \frac{۲\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi - \frac{۲\pi}{۳} \xrightarrow{k=۱} x = \frac{۴\pi}{۳} \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر $۰ + \pi + ۲\pi + \frac{۲\pi}{۳} + \frac{۴\pi}{۳} = ۵\pi$ است.

۵۳ – گزینه ۱ می‌دانیم دوره‌ی تناوب تابع $y = a\cos bx$ برابر $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ است. از روی شکل مشخص است که دوره‌ی تناوب تابع برابر ۴π است.

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} \to ۴\pi = \frac{۲\pi}{|m|} \to ۲ = \frac{۱}{|m|} \to |m| = \frac{۱}{۲} \to m = \frac{۱}{۲}, m = -\frac{۱}{۲}$$

چون $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ است فرقی نمی‌کند که $m = \frac{۱}{۲}$ یا $m = -\frac{۱}{۲}$ باشد.

$$y = \frac{۱}{۲} + ۲\cos(\frac{۱}{۲}x) \to y(\frac{۱۶\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲} + ۲\cos(\frac{۱}{۲} \times \frac{۱۶\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲} + ۲\cos\frac{۸\pi}{۳}$$
$$\to y(\frac{۱۶\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲} + ۲\cos(۲\pi + \frac{۲\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲} + ۲\cos\frac{۲\pi}{۳} = \frac{۱}{۲} + ۲(\frac{-۱}{۲}) = \frac{۱}{۲} - ۱ = -\frac{۱}{۲}$$

۵۴ – گزینه ۲ کسری برابر صفر است که صورتش صفر باشد.

$$\sin 3x + \sin 2x = 0 \to \sin 3x = -\sin 2x \to \sin 3x = \sin(-2x)$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{x=2k\pi+\alpha} 3x = 2k\pi - 2x \to 5x = 2k\pi \to x = \frac{2k\pi}{5} \\ \xrightarrow{x=2k\pi+\pi-\alpha} 3x = 2k\pi + \pi + 2x \to x = 2k\pi + \pi \ \text{غ‌ق‌ق (مخرج را صفر می‌کند)} \end{cases}$$

۵۵ - گزینه ۴ می‌دانیم که $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ است و چون $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ است انتهای کمان در ناحیهٔ سوم دایرهٔ مثلثاتی است.

$$\sqrt{1+\tan^2 x}\left(2\sin^2\frac{\pi}{4} - \sin^2 x\right) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\left(2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \sin^2 x\right) = \frac{1}{\underbrace{|\cos x|}_{-}}(1 - \sin^2 x) = \frac{-1}{\cos x}(\cos^2 x) = -\cos x$$

۵۶ - گزینه ۳ می‌دانیم در تابع $y = a\sin bx + c$ بیشترین مقدار تابع، برابر $|a| + c$ است.

$$Max = \sqrt{3} \to |b| + a = \sqrt{3} \xrightarrow[\text{است.}\ b>0\ \text{است،}]{\text{چون شکل فرمت خود سینوس}} b + a = \sqrt{3}$$

$$\begin{vmatrix} \pi \\ -\frac{3}{2} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق در تابع}} -\frac{3}{2} = a + b\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \to -\frac{3}{2} = a - b\sin\frac{\pi}{3} \to -\frac{3}{2} = a - \frac{\sqrt{3}}{2}b \to -3 = 2a - \sqrt{3}b$$

$$-2\begin{cases} b + a = \sqrt{3} \\ 2a - \sqrt{3}b = -3 \end{cases} \to -2b - \sqrt{3}b = -2\sqrt{3} - 3 \to 2b + \sqrt{3}b = 2\sqrt{3} + 3$$

$$\to (2 + \sqrt{3})b = 2\sqrt{3} + 3 \to b = \frac{2\sqrt{3}+3}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3} - 6 + 6 - 3\sqrt{3}}{4-3} = \sqrt{3}$$

۵۷ - گزینه ۴ می‌دانیم $\sin a\cos a = \frac{1}{2}\sin 2a$ است.

$$4\sin x \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1 \to -4\sin x\cos x = 1 \to -4\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) = 1 \to -2\sin 2x = 1 \to \sin 2x = -\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)$$

$$\xrightarrow{\sin x=\sin\alpha \to \begin{cases} x=2k\pi+\alpha \\ x=2k\pi+\pi-\alpha \end{cases}} \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \to x = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \to x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \end{cases} \xrightarrow{\text{به } k \text{ عدد می‌دهیم}} x = \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \xrightarrow{\text{مجموع جواب‌ها}} \frac{60\pi}{12} = 5\pi$$

۵۸ - گزینه ۲

$$\tan\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \tan\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin\left(\frac{15\pi}{4}\right) = \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{13\pi}{4}\right) = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس: $A = (-1) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

۵۹ - گزینه ۱ می‌دانیم $\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha$ است.

پس: $f(x) = -(\cot\pi x - \tan\pi x) = -2\cot 2\pi x = \frac{-2}{\tan 2\pi x}$

می‌دانیم دورهٔ تناوب $y = \tan bx$ برابر $T = \frac{\pi}{|b|}$ است بنابراین $T = \frac{\pi}{|2\pi|} = \frac{1}{2}$ می‌باشد.

۶۰ - گزینه ۳

$$f(x) = a\sin\left(\frac{\pi}{2} + bx\right) \xrightarrow{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha} f(x) = a\cos bx$$

نمودار تابع از نقطه‌ی $\begin{vmatrix} 0 \\ -2 \end{vmatrix}$ عبور می‌کند بنابراین این نقطه در تابع صدق می‌کند.

$$\left|\begin{matrix}۰\\ -۲\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} -۲ = a\cos ۰ \to a=-۲ \to f(x) = -۲\cos bx$$

می‌دانیم دوره‌ی تناوب $y=\cos bx$ برابر $T=\dfrac{۲\pi}{|b|}$ است و از روی نمودار داریم:

$$\frac{۳T}{۴} = \frac{\pi}{۲} \to T = \frac{۲\pi}{۳} \to \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{۳} \to |b| = ۳ \to b=\pm ۳$$

پس: $f(x) = -۲\cos(\pm ۳x) \xrightarrow{\cos(-\alpha)=\cos\alpha} f(x) = -۲\cos ۳x \to f(\frac{\pi}{۱۲}) = -۲\cos\frac{\pi}{۴} = -۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = -\sqrt{۲}$

۶۱ - گزینه ۳

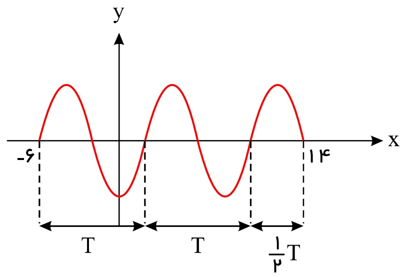
نکته: $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$

ابتدا ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x) = a\underbrace{\cos(\pi+bx)}_{-\cos bx} \Rightarrow f(x) = -a\cos bx$$

نمودار رسم شده، تابع را در ۲/۵ دورهٔ تناوب نشان می دهد، پس:

$$\Rightarrow \frac{۵}{۲}T = ۱۴-(-۶) \Rightarrow \frac{۵}{۲}T = ۲۰ \Rightarrow T = ۸$$



از طرفی دورهٔ تناوب تابع از رابطهٔ $\dfrac{۲\pi}{|b|}$ به‌دست می‌آید، پس:

$$\frac{۲\pi}{|b|} = ۸ \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{۴}$$

از طرفی مقدار تابع در $x=۰$ برابر -۴ است، پس:

$$f(۰) = -۴ \Rightarrow -a\underbrace{\cos ۰}_{۱} = -۴ \Rightarrow a = ۴$$

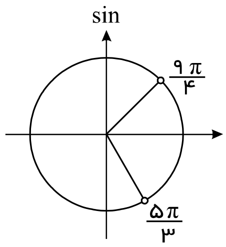
در نتیجه ضابطهٔ f به‌صورت $f(x) = -۴\cos\dfrac{\pi x}{۴}$ یا $f(x) = -۴\cos(-\dfrac{\pi x}{۴})$ در می‌آید و داریم:

$$f(-\frac{۳۲}{۳}) = -۴\cos(\frac{\pi}{۴}\times\frac{-۳۲}{۳}) = -۴\cos(\frac{-۸\pi}{۳}) = -۴\cos(\frac{۸\pi}{۳})$$
$$= -۴\cos(۲\pi+\frac{۲\pi}{۳}) = -۴\cos\frac{۲\pi}{۳} = -۴\times\frac{-۱}{۲} = ۲$$

دقت کنید چون $\cos(-\theta) = \cos\theta$، جواب سؤال برای $b = -\dfrac{\pi}{۴}$ نیز همین است.

۶۲ - گزینه ۱ با به‌دست آوردن محدودهٔ $۲x$ داریم:

$$-\frac{\pi}{۱۸} < \frac{x-\pi}{۳} < \frac{\pi}{۲۴} \xrightarrow{\times ۳} -\frac{\pi}{۶} < x-\pi < \frac{\pi}{۸}$$
$$\xrightarrow{+\pi} \frac{۵\pi}{۶} < x < \frac{۹\pi}{۸} \xrightarrow{\times ۲} \frac{۵\pi}{۳} < ۲x < \frac{۹\pi}{۴}$$



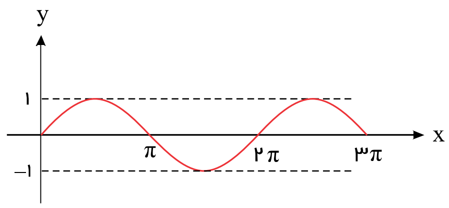
$$\to \begin{cases} \cos\dfrac{۹\pi}{۴} = \cos(۲\pi+\dfrac{\pi}{۴}) = \cos\dfrac{\pi}{۴} = \dfrac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \cos ۰ = ۱ \\ \cos\dfrac{۵\pi}{۳} = \cos(۲\pi-\dfrac{\pi}{۳}) = \cos\dfrac{\pi}{۳} = \dfrac{۱}{۲} \end{cases}$$

در این بازه، $\cos ۲x$ هریک از مقادیر بازهٔ $(\dfrac{۱}{۲}, ۱]$ را می‌تواند اختیار کند.

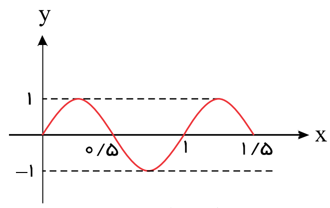
یعنی:

$$\frac{۱}{۲} < \cos ۲x \le ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲} < ۲m-۱ \le ۱ \Rightarrow \frac{۳}{۴} < m \le ۱$$

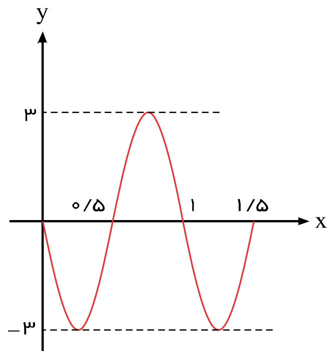
۶۳ - گزینه ۱ برای رسم تابع $y = -۳\sin(۲\pi x) + ۱$، ابتدا نمودار $y=\sin x$ را در بازهٔ $[۰, ۳\pi]$ رسم می کنیم. سپس طول نقاط دامنهٔ تابع $y=\sin x$ را بر ۲π تقسیم کرده تا شکل $y=\sin(۲\pi x)$ به‌دست آید. در مرحلهٔ بعد عرض نقاط منحنی را سه برابر کرده و نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا تابع $y=-۳\sin(۲\pi x)$ به‌دست آید. در مرحلهٔ آخر منحنی را یک واحد به بالا می‌بریم تا تابع $y=-۳\sin(۲\pi x)+۱$ حاصل شود. نمودار این تابع در چهار نقطه خط $y=-۱$ را قطع می‌کند.



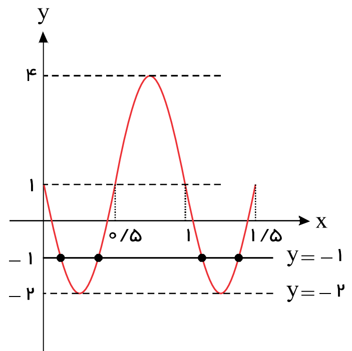
y=sin x



y=sin(۲πx)



y=–۳sin ۲πx



y=–۳sin ۲πx+۱

۶۴ – باید ریشهٔ مقسوم‌علیه را در مقسوم قرار دهیم.

$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow$ باقی‌مانده $r=f(-2)=(-2)^3+(-2)^2-6$

$\Rightarrow f(-2)=-8+4-6=-10 \Rightarrow$ باقی‌مانده $=-10$

۶۵ – فرض می‌کنیم: $f(x)=x^2+3x-2$ و $g(x)=x^3-4x^2+5x+m$

چون باقی‌مانده f و g بر $x+2$ یکسان است، یعنی $f(-2)=g(-2)$، پس:

$f(-2)=g(-2)\Rightarrow 4-6-2=-8-16-10+m\Rightarrow -4=-34+m\Rightarrow m=30$

۶۶ –

$f(x)=x^3+ax^2+x+b$

$x-1=0\Rightarrow x=1\Rightarrow$ باقی‌مانده $=f(1)=4\Rightarrow 1+a+1+b=4\Rightarrow a+b=2$

$x+2=0\Rightarrow x=-2\Rightarrow$ باقی‌مانده $=f(-2)=0\Rightarrow -8+4a-2+b=0\Rightarrow 4a+b=10$

$$-\begin{cases}a+b=2\\4a+b=10\end{cases}$$

$$3a=8\to a=\frac{8}{3}\Rightarrow b=2-\frac{8}{3}\Rightarrow b=\frac{-2}{3}$$

۶۷ – با توجه به نمودار $f(x)$ در $x=a$ تعریف نشده است و هرگاه از سمت راست به نقطهٔ $x=a$ نزدیک شویم مقدار تابع $f(x)$ به سمت $-\infty$ میل می‌کند و اگر از سمت چپ به نقطهٔ $x=a$ نزدیک شویم مقدار تابع به $+\infty$ میل می‌کند. در نتیجه تابع $f(x)$ در $x=a$ حد ندارد.

۶۸ – حد صورت و مخرج تابع $f(x)$ در سمت راست ۴ برابر صفر است. برای بدست آوردن مقدار حد صورت و مخرج کسر را هم در $\sqrt{x}+2$ و هم در $\sqrt{2x+1}+3$ ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\lim\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}\times\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\times\frac{\sqrt{2x+1}+3}{\sqrt{2x+1}+3}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}{(2x+1-9)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\sqrt{2x+1}+3}{2(x-4)\sqrt{x}+2}=\frac{6}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

۶۹ – گزینه ۳

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+9}{1-x+\sqrt{x+1}}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{-x}=-a=3\Rightarrow a=-3$$

$$\text{پس}:\lim_{x\to 3}\frac{-3x+9}{1-x+\sqrt{x+1}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 3}\frac{-3}{-1+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}=\frac{-3}{-1+\frac{1}{4}}=\frac{-3}{-\frac{3}{4}}=4$$

۷۰ – گزینه ۱

$$\lim_{x\to 2^-} g(f(x))=\lim_{x\to 2^-}\frac{[x]-x-1}{2([x]-x)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{1-x-1}{2(1-x)}=\frac{1-2-1}{2(1-2)}=\frac{-2}{-2}=1$$

۷۱ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\sin u = ۲\sin\frac{u}{۲}\cos\frac{u}{۲}\ ,\ ۱+\cos u = ۲\cos^۲\frac{u}{۲}}$

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{۱+\cos x}}{\tan ۲x}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{۲\cos^۲\frac{x}{۲}}}{\frac{\sin ۲x}{\cos ۲x}}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{۲}\cos ۲x\overbrace{\left|\cos\frac{x}{۲}\right|}^{+}}{\sin ۲x}$$

$(\frac{\pi}{۲})^-$ در ناحیه‌ی اول است و در این ناحیه، کسینوس مثبت است.

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{۲}\cos ۲x\cdot\cos\frac{x}{۲}}{۲\sin x\cos x}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{۲}\cos ۲x\cdot\cos\frac{x}{۲}}{۲(۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲})\cos x}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{۲}\cos ۲x}{۴\sin\frac{x}{۲}\cos x}=\frac{\sqrt{۲}}{۴(۱)(-۱)}=-\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

۷۲ - گزینه ۳

تابع داده شده به صورت $f(x)=\frac{|(x-۲)(x+۱)|}{x^۲-۴}$ است.

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{\overbrace{|(x-۲)(x+۱)|}^{+}}{x^۲-۴}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{(x-۲)(x+۱)}{(x+۲)(x-۲)}=\frac{۲+۱}{۲+۲}=\frac{۳}{۴}$$

$$\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{\overbrace{|(x-۲)(x+۱)|}^{-}}{x^۲-۴}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-(x-۲)(x+۱)}{(x+۲)(x-۲)}=\frac{-(۲+۱)}{۲+۲}=-\frac{۳}{۴}$$

پس قدر مطلق تفاضل این دو حد برابر $\frac{۶}{۴}$ یا ۱٫۵ است.

۷۳ - گزینه ۴ چون جواب حد، عدد شده است بنابراین بزرگترین توان x صورت و مخرج باهم برابر هستند پس $m=۳$ است.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^۳-۳x+۲}{۳x-۵x^۳+x^۲}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^۳}{-۵x^۳}=-\frac{a}{۵}=\frac{۲}{۵}\to a=-۲$$

پس: $f(x)=\frac{-۲x^۳-۳x+۲}{۳x-۵x^۳+x^۲}\to f(۲)=\frac{-۱۶-۶+۲}{۶-۴۰+۴}=\frac{-۲۰}{-۳۰}=\frac{۲}{۳}$

۷۴ - گزینه ۱

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{۳x-\sqrt{۴x^۲}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{۳x-۲\underbrace{|x|}_{-}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{۵x}$$

چون جواب حد، عدد شده است پس بزرگترین توان x صورت و مخرج با هم برابرند یعنی $n=۱$. پس داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax}{۵x}=\frac{a}{۵}=-۱\to a=-۵$$

$$\lim_{x\to ۳}\frac{-۵x+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}\times\frac{۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}{۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}=\lim_{x\to ۳}\frac{(-۵x+۱۵)(۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x})}{\underbrace{۹x^۲-۴x^۲-۱۵x}_{۵x^۲-۱۵x}}=\lim_{x\to ۳}\frac{-۵(x-۳)(۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x})}{۵x(x-۳)}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{-(۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x})}{x}=\frac{-(۹+۹)}{۳}=-۶$$

البته حد را می‌توان از قاعدهٔ هوپیتال نیز محاسبه کرد.

$$\lim_{x\to ۳}f(x)=\lim_{x\to ۳}\frac{-۵x+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۳}\frac{-۵}{۳-\frac{۱(۸x+۱۵)}{۲\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}}=\frac{-۵}{۳-\frac{۳۹}{۱۸}}=\frac{-۵}{\frac{۱۵}{۱۸}}=-۶$$

۷۵ - گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{\sqrt{x^۲-۴x+۴}}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{\sqrt{(x-۲)^۲}}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{\underbrace{|x-۲|}_{+}}$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{x-۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۲^+}\frac{-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۶)^۲}}}{۱}=-\frac{۱}{۱۲}$$

۷۶ ـ گزینه ۲

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+\sqrt{x^۲-۳x}}{ax^n-۶}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+\sqrt{x^۲}}{ax^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+|\overbrace{x}^{+}|}{ax^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x}{ax^n}$$

چون جواب حد، عدد شده است پس بزرگترین توان x صورت و مخرج با هم برابرند یعنی $n=۱$ پس داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x}{ax}=\frac{۳}{a}=-\frac{۱}{۲}\to a=-۶$$

$$\lim_{x\to-۱} f(x)=\lim_{x\to-۱}\frac{۲x+\sqrt{x^۲-۳x}}{-۶x-۶}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to-۱}\frac{۲+\frac{۱(۲x-۳)}{۲\sqrt{x^۲-۳x}}}{-۶}=\frac{۲-\frac{۵}{۴}}{-۶}=\frac{-۱}{۸}$$

۷۷ ـ گزینه ۲

$$\lim_{x\to۲}\frac{x-\sqrt{۳x-۲}}{ax+b}=\frac{۰}{۲a+b}\xrightarrow[\frac{۰}{۰}\ \text{بوده که پس از رفع ابهام جوابش}\ \frac{۱}{۲}\ \text{شده است}]{\text{چون جواب حد، برابر عدد شده است پس این کسر حتما}}۲a+b=۰$$

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۲}\frac{۱-\frac{۳}{۲\sqrt{۳x-۲}}}{a}=\frac{۱-\frac{۳}{۴}}{a}=\frac{۱}{۴a}=\frac{۱}{۲}\to a=\frac{۱}{۲}\ ,\ b=-۱$$

۷۸ ـ گزینه ۱

روش اول: با ابهام $\frac{۰}{۰}$ مواجه هستیم، برای رفع ابهام صورت را بر $x-۴$ تقسیم می‌کنیم و عبارت را در مزدوج مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to۴}\frac{۳x^۲-۱۰x-۸}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}-۱}=\lim_{x\to۴}\frac{۳x^۲-۱۰x-۸}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}-۱}\times\frac{\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱}=\lim_{x\to۴}\frac{(x-۴)(۳x+۲)(\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱)}{۳-\sqrt{x}-۱}$$

$$=\lim_{x\to۴}\frac{(\sqrt{x}-۲)(\sqrt{x}+۲)(۳x+۲)(\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱)}{-(\sqrt{x}-۲)}=-(۴)(۱۴)(۲)=-۱۱۲$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to۴}\frac{۳x^۲-۱۰x-۸}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}-۱}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۴}\frac{۶x-۱۰}{\frac{\frac{-۱}{۲\sqrt{x}}}{۲\sqrt{۳-\sqrt{x}}}}=\frac{۱۴}{\frac{-\frac{۱}{۴}}{۲}}=\frac{۱۴}{-\frac{۱}{۸}}=-۱۱۲$$

۷۹ ـ گزینه ۴ روش اول: عبارت را در مزدوج صورت و مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to-۱}\frac{x+\sqrt{۲x+۳}}{۲-\sqrt{۳-x}}=\lim_{x\to-۱}\frac{(x+\sqrt{۲x+۳})(x-\sqrt{۲x+۳})(۲+\sqrt{۳-x})}{(۲-\sqrt{۳-x})(۲+\sqrt{۳-x})(x-\sqrt{۲x+۳})}$$

$$\lim_{x\to-۱}\frac{(x^۲-۲x-۳)(۲+\sqrt{۳-x})}{(۴-۳+x)(x-\sqrt{۲x+۳})}=\lim_{x\to-۱}\frac{(x+۱)(x-۳)(۲+\sqrt{۳-x})}{(x+۱)(x-\sqrt{۲x+۳})}$$

$$=\frac{-۴\times۴}{-۱-۱}=۸$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to-۱}\frac{x+\sqrt{۲x+۳}}{۲-\sqrt{۳-x}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to-۱}\frac{۱+\frac{۱(۲)}{۲\sqrt{۲x+۳}}}{-\frac{۱(-۱)}{۲\sqrt{۳-x}}}=\frac{۲}{\frac{۱}{۴}}=۸$$

۸۰ ـ گزینه ۴ روش اول: عبارت را در مزدوج صورت و مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to-۲}\frac{x^۲-\sqrt{۲x^۲-x^۳}}{۳-\sqrt{۱-۴x}}=\lim_{x\to-۲}\frac{(x^۲-\sqrt{۲x^۲-x^۳})(x^۲+\sqrt{۲x^۲-x^۳})(۳+\sqrt{۱-۴x})}{(۳-\sqrt{۱-۴x})(۳+\sqrt{۱-۴x})(x^۲+\sqrt{۲x^۲-x^۳})}$$

$$=\lim_{x\to-۲}\frac{(x^۴-۲x^۲+x^۳)(۳+\sqrt{۱-۴x})}{(۹-۱+۴x)(x^۲+\sqrt{۲x^۲-x^۳})}=\lim_{x\to-۲}\frac{x^۲(x+۲)(x-۱)(۳+\sqrt{۱-۴x})}{۴(x+۲)(x^۲+\sqrt{۲x^۲-x^۳})}$$

$$=\frac{۴\times(-۳)(۳+۳)}{۴(۴+۴)}=\frac{-۹}{۴}$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-\sqrt{2x^2-x^3}}{3-\sqrt{1-4x}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to -2}\frac{2x-\dfrac{1(4x-3x^2)}{2\sqrt{2x^2-x^3}}}{-\dfrac{1(-4)}{2\sqrt{1-4x}}}=\frac{-4+\dfrac{20}{8}}{\dfrac{4}{6}}=\frac{\dfrac{-12}{8}}{\dfrac{4}{6}}=\frac{-72}{32}=\frac{-9}{4}$$

۸۱ - گزینه ۳ روش اول:

با ابهام $\frac{0}{0}$ مواجه هستیم که برای رفع ابهام از اتحاد چاق‌ولاغر کمک می‌گیریم $\left((a+b)(a^2+b^2-ab)=a^3+b^3\right)$

$$\lim_{x\to -8}\frac{x^2+10x+16}{6(2+\sqrt[3]{x})}\times\frac{4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}}{4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to -8}\frac{(x+8)(x+2)(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})}{6(8+x)}$$

$$=\lim_{x\to -8}\frac{(x+2)(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})}{6}=\frac{-6(12)}{6}=-12$$

روش دوم:

از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to -8}\frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to -8}\frac{2x+10}{6\left(\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)}=\frac{-6}{6\left(\dfrac{1}{12}\right)}=-12$$

۸۲ - گزینه ۳ حد داده‌شده دارای ابهام $\infty-\infty+$ است که از کتاب حذف شده است و متأسفانه طراحان بدون توجه به کتاب درسی این سؤال را طرح کرده‌اند، برای رفع ابهام، عبارت را در مزدوجش ضرب و تقسیم کرده و پس از استفاده از اتحاد مزدوج از صورت و مخرج جملات با توان بیشتر را انتخاب کنید.

$$\lim_{x\to -\infty}(2x+\sqrt{4x^2+x})\times\frac{2x-\sqrt{4x^2+x}}{2x-\sqrt{4x^2+x}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{4x^2-4x^2-x}{2x-\sqrt{4x^2+x}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-x}{2x-2|\underbrace{x}_{-}|}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-x}{4x}=-\frac{1}{4}$$

۸۳ - گزینه ۲

هر گاه x به سمت عددی میل کند که به موجب آن جواب حد یک نوع بی‌نهایت شود (مثلاً فقط $-\infty$) آن عدد ریشهٔ مضاعف مخرج است. یعنی $x=2$ ریشهٔ مضاعف مخرج است. بنابراین:

$x^2+ax+b=(x-2)^2=x^2-4x+4\Rightarrow a=-4\ ,\ b=4$

درنتیجه داریم:

$a+b=-4+4=0$

۸۴ - گزینه ۴ روش اول:

با ابهام $\frac{0}{0}$ مواجه هستیم که برای رفع ابهام از اتحاد چاق‌ولاغر کمک می‌گیریم $\left((a-b)(a^2+b^2+ab)=a^3-b^3\right)$ و مخرج را بر عامل ابهام یعنی $x-2$ تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-\sqrt[3]{3x+2}}{5x^2-18x+16}\times\frac{4+\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2}}{4+\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2}}=\lim_{x\to 2}\frac{\overbrace{8-(3x+2)}^{-3x+6}}{(x-2)(5x-8)(4+\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-3(x-2)}{(x-2)(5x-8)(4+\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2})}=\lim_{x\to 2}\frac{-3}{(5x-8)(4+\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2})}$$

$$=\frac{-3}{(2)(4+4+4)}=\frac{-3}{24}=\frac{-1}{8}$$

روش دوم:

از قاعدهٔ هوپیتال کمک می‌گیریم.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-\sqrt[3]{3x+2}}{5x^2-18x+16}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{-3}{3\sqrt[3]{(3x+2)^2}}}{10x-18}=\frac{\dfrac{-1}{4}}{2}=\frac{-1}{8}$$

۸۵ - گزینه ۱ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم.

گزینهٔ اول : $\lim_{x\to (\frac{2\pi}{3})^+}\dfrac{\sin x}{1+2\cos x}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+2(\frac{-1}{2})^-}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^-}=-\infty$: درست

گزینهٔ سوم : $\lim\limits_{x\to(\frac{۲\pi}{۳})^-}\dfrac{\sin x}{۱+۲\cos x}=\dfrac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱+۲(\frac{-۱}{۲})^+}=\dfrac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^+}=+\infty$: نادرست

گزینهٔ چهارم : $\lim\limits_{x\to\frac{۴\pi}{۳}}\dfrac{\sin x}{۱+۲\cos x}\begin{cases}\lim\limits_{x\to(\frac{۴\pi}{۳})^+}\dfrac{\sin x}{۱+۲\cos x}=\dfrac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱+۲(-\frac{۱}{۲})^+}=\dfrac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^+}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to(\frac{۴\pi}{۳})^-}\dfrac{\sin x}{۱+۲\cos x}=\dfrac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱+۲(-\frac{۱}{۲})^-}=\dfrac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^-}=+\infty\end{cases}$ $\to$ نادرست

توجه کنید:

$$\sin\frac{۲\pi}{۳}=\sin(\pi-\frac{\pi}{۳})=\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos\frac{۲\pi}{۳}=\cos(\pi-\frac{\pi}{۳})=-\cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}\to\begin{cases}\cos(\frac{۲\pi}{۳})^+=(-\frac{۱}{۲})^-\\ \cos(\frac{۲\pi}{۳})^-=(-\frac{۱}{۲})^+\end{cases}$$

$$\sin\frac{۴\pi}{۳}=\sin(\pi+\frac{\pi}{۳})=-\sin\frac{\pi}{۳}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos\frac{۴\pi}{۳}=\cos(\pi+\frac{\pi}{۳})=-\cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}\to\begin{cases}\cos(\frac{۴\pi}{۳})^+=(\frac{-۱}{۲})^+\\ \cos(\frac{۴\pi}{۳})^-=(\frac{-۱}{۲})^-\end{cases}$$

۸۶ - گزینه ۴

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{۴x^۲+x}}{x}\overset{\text{توان بیشتر}}{=\!=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{۴x^۲}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-۲|\overbrace{x}^{-}|}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+۲x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x}{x}=۳$$

۸۷ - گزینه ۲

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۴x+۳}{۳x+\sqrt{x^۲-۴}}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{۴x}{۳x+\sqrt{x^۲}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۴x}{۳x+|\underbrace{x}_{-}|}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{۴x}{۳x-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۴x}{۲x}=۲$$

۸۸ - گزینه ۲

$$\lim_{x\to۲^+}\left(\frac{\overbrace{|x^۲-۴|}^{+}}{x^۲-۴}+\frac{x-۲}{\underbrace{|x-۲|}_{+}}\right)=\lim_{x\to۲^+}\left(\frac{(x^۲-۴)}{x^۲-۴}+\frac{x-۲}{x-۲}\right)=۱+۱=۲$$

$$\lim_{x\to۲^-}\left(\frac{\overbrace{|x^۲-۴|}^{-}}{x^۲-۴}+\frac{x-۲}{\underbrace{|x-۲|}_{-}}\right)=\lim_{x\to۲^-}\left(\frac{-(x^۲-۴)}{x^۲-۴}+\frac{x-۲}{-(x-۲)}\right)=-۱-۱=-۲$$

بنابراین قدرمطلق تفاضل حد راست از حد چپ تابع برابر ۴ می‌باشد.

۸۹ - گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۳} f(x)=\lim_{x\to ۱} f(x+۲)$$
$$\lim_{x\to ۳} f(x)=\lim_{x\to ۱}\frac{\cos \pi x}{۱+\sin \pi x}=\frac{\cos\pi}{۱+\sin\pi}=\frac{-۱}{۱+۰}=-۱$$

۹۰ - گزینه ۲ کافی است حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در $x=۲$ با یکدیگر برابر قرار بدهیم. لذا داریم:

$$x\to ۲^+ : x>۲ \Rightarrow \begin{cases}[x]=۲\\ -x<-۲\Rightarrow ۱-x<-۱\Rightarrow [۱-x]=-۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۲^+} a[x]+۲[۱-x]=۲a+۲(-۲)=۲a-۴$$

$$x\to ۲^- : x<۲ \Rightarrow \begin{cases}[x]=۱\\ -x>-۲\Rightarrow ۱-x>-۱\Rightarrow [۱-x]=-۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۲^-} a[x]+۲[۱-x]=a(۱)+۲(-۱)=a-۲$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)\Rightarrow ۲a-۴=a-۲\Rightarrow a=۲$$

۹۱ - گزینه ۱ در صورت کسر از $\sqrt[۳]{x^۲}$ فاکتورگیری می کنیم. لذا خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x+\sqrt[۳]{x^۲-x^۳}-\sqrt[۳]{x^۲}}{\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{۱-x}-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{x^۳}+\sqrt[۳]{x^۲(۱-x)}-\sqrt[۳]{x^۲}}{\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{۱-x}-۱}$$
$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{x^۲}(\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{۱-x}-۱)}{\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{۱-x}-۱}=\lim_{x\to ۱}\sqrt[۳]{x^۲}=۱$$

۹۲ - گزینه ۱ چون $x\to ۴^-$ میل می‌کند، در نتیجه $x<۴$ پس $x-۲<۲$ در نتیجه ورودی تابع f به سمت ۲^- میل می‌کند: پس باید $f(۲^-)$ را حساب کنیم.

از طرفی تابعی که به ما داده شده است $f(x)$ نیست بلکه $f(۴-x)$ است پس باید $۴-x\to ۲^-$ باشد.

$$۴-x\to ۲^-\Rightarrow x\to ۴-۲^-\Rightarrow x\to ۲^+$$

در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(۴-x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-x-۲}{\sqrt{x(x^۲-۴x+۴)}}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{(x-۲)(x+۱)}{\sqrt{x(x-۲)^۲}}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{(x-۲)(x+۱)}{\underbrace{|(x-۲)|}_{+}\sqrt{x}}$$
$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{(x-۲)(x+۱)}{(x-۲)\sqrt{x}}=\frac{۳}{\sqrt{۲}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

۹۳ - گزینه ۱ می‌دانیم که $۱-\cos u=۲\sin^۲\frac{u}{۲}$ و $\sin u=۲\sin\frac{u}{۲}\cos\frac{u}{۲}$ است.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x(۱-\cos ۲x)}{\sin ۲x(\cos x-۱)}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x(۲\sin^۲ x)}{۲\sin x\cos x(-۲\sin^۲\frac{x}{۲})}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^۲ x}{\cos x(-۲\sin^۲\frac{x}{۲})}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{(۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲})^۲}{-۲\cos x\cdot\sin^۲\frac{x}{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{۴\sin^۲\frac{x}{۲}\cos^۲\frac{x}{۲}}{-۲\cos x\sin^۲\frac{x}{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{۴\cos^۲\frac{x}{۲}}{-۲\cos x}=\frac{۴(۱)}{-۲(۱)}=-۲$$

۹۴ - گزینه ۴

$$f(x)=۲x^۳+ax^۲+۴x-۳$$

چون $f(x)$ بر $x+۱$ بخش‌پذیر است، داریم:

$$x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\Rightarrow f(-۱)=۰\Rightarrow -۲+a-۴-۳=۰\Rightarrow a=۹$$
$$f(x)=۲x^۳+۹x^۲+۴x-۳$$

با تقسیم $f(x)$ بر $x+۱$ داریم:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+9x^2+4x-3 & x+1 \\ \cline{2-2} \underline{-2x^3 \pm 2x^2} & 2x^2+7x-3 \\ 7x^2+4x-3 & \\ \underline{-7x^2 \pm 7x} & \\ -3x-3 & \\ \underline{\mp 3x \mp 3} & \\ 0 & \end{array}$$

$$f(x)=(x+1)(2x^2+7x-3)=0 \Rightarrow x=-1\ ,\ 2x^2+7x-3=0 \Rightarrow \Delta>0$$

اگر ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+7x-3=0$ را x_1 و x_2 بنامیم، داریم:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-\frac{b}{a})^2-2(\frac{c}{a})=\frac{49}{4}-2(-\frac{3}{2})=\frac{61}{4}$$

$$f(x)\ \text{مجموع مجذورات صفرهای}=(-1)^2+x_1^2+x_2^2=1+\frac{61}{4}=\frac{65}{4}$$

۹۵ - گزینه ۳ اگر $x\to 0^+$ آن‌گاه $\frac{1}{x}$ به $+\infty$ میل می‌کند و داریم:

$$\lim_{x\to 0^+} f(\frac{1}{x})=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{2x^2+3x} \overset{\text{توان بیشتر}}{=\!=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

۹۶ - گزینه ۴

$$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{x+4}+2}{x^2+2ax+b}=+\infty$$

حد صورت برابر ۳ است و چون حاصل حد $+\infty$ می‌باشد، پس باید $x=-3$ ریشهٔ مضاعف مخرج باشد و با توجه به اینکه ضریب x^2 در مخرج برابر یک است، یعنی مخرج همان عبارت $(x+3)^2$ می‌باشد.

$$x^2+2ax+b=(x+3)^2=x^2+6x+9$$

$$2a=6 \Rightarrow a=3, b=9$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^3+2x+5}{bx^3+x^2+7}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3}{9x^3}=\frac{1}{3}$$

۹۷ - گزینه ۱ تابع در $x=2$ نامتناهی می‌شود بنابراین $x=2$ ریشهٔ مخرج است.

$$x=2 \xrightarrow{\text{صدق در مخرج}} 4+2c+d=0 \to 2c+d=-4$$

تابع در $x=3$ توخالی است بنابراین $x=3$ ریشهٔ مخرج است.

$$x=3 \xrightarrow{\text{صدق در مخرج}} 9+3c+d=0 \to 3c+d=-9$$

از حل دو معادله به جواب $c=-5$ و $d=6$ می‌رسیم پس مخرج x^2-5x+6 یا همان $(x-2)(x-3)$ است.

با توجه به شکل، تابع در $x=3$ حدی برابر ۷ دارد.

$$x=3 \to \frac{18+3a+b}{0} \xrightarrow{\text{این کسر حتماً } \frac{0}{0} \text{ بوده که پس از رفع ابهام}} 18+3a+b=0$$

$$\lim_{x\to3}\frac{2x^2+ax+b}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to3}\frac{\overset{\text{جوابش ۷ شده است.}}{(x-3)(2x+a+6)}}{(x-2)(x-3)}=\frac{12+a}{1}=7 \to a=-5, b=-3$$

پس $ab+cd=15-30=-15$ است.

برای آنکه متوجه شوید چگونه $2x^2+ax+b$ را به‌صورت $(x-3)(2x+a+6)$ نوشتیم باید توجه کنید که $2x^2+ax+b$ را بر $x-3$ تقسیم کردیم.

$$\begin{array}{l|l} 2x^2+ax+b & x-3 \\ \cline{2-2} \underline{-2x^2+6x} & 2x+a+6 \\ (a+6)x+b & \\ \underline{-(a+6)x+3a+18} & \\ \underbrace{3a+18+b}_{\text{صفر است}} & \end{array} \qquad \to 2x^2+ax+b=(x-3)(2x+a+6)$$

و توجه کنید برای رفع ابهام از $\lim_{x\to3}\frac{2x^2+ax+b}{x^2-5x+6}$ می‌توان از روش هوپیتال نیز استفاده کرد.

$$\lim_{x\to3}\frac{2x^2+ax+b}{x^2-5x+6}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to3}\frac{4x+a}{2x-5}=\frac{12+a}{1}=7\to a=-5$$

۹۸ - گزینه ۱ ابتدا دامنهٔ تابع g را حساب می‌کنیم.

$$\frac{۲x+۱}{f(x)} \geq ۰ \Rightarrow$$

x	$-\infty$		-۱		$-\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
$۲x+۱$		$-$		$-$	۰	$+$	
$f(x)$		$-$	۰	$+$		$+$	
عبارت ≥ ۰		$+$	ن	$-$	۰	$+$	

$$\Rightarrow D_g = (-\infty, -۱) \cup [-\frac{۱}{۲}, +\infty)$$

باتوجه به دامنه، تابع g در همسایگی چپ $x=-۱$ تعریف شده است، حال داریم:

$$\lim_{x \to (-۱)^-} \sqrt{\frac{۲x+۱}{f(x)}} = \sqrt{\frac{-۲+۱}{۰^-}} = \sqrt{\frac{-۱}{۰^-}} = \sqrt{+\infty} = +\infty$$

۹۹ - گزینه ۳ دامنهٔ تابع مربوط به هر گزینه را می‌یابیم.

۱ گزینهٔ) $y = \sqrt{x-[x]}$: می‌دانیم : $۰ \leq x-[x] < ۱ \Rightarrow x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ دامنه $= \mathbb{R}$

۲ گزینهٔ) $y = \frac{۱}{\sqrt{x-[x]}} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-[x] > ۰ \\ \text{می‌دانیم} : ۰ \leq x-[x] < ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow x-[x] \neq ۰ \Rightarrow [x] \neq x \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ دامنهٔ تابع $= \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

۳ گزینهٔ) $y = \frac{۱}{[x]}$, $[x] = ۰ \Rightarrow ۰ \leq x < ۱ \Rightarrow$ دامنه $= \mathbb{R} - [۰,۱) = (-\infty, ۰) \cup [۱, +\infty)$

با توجه به دامنه، تابع در همسایگی چپ $x=۰$ تعریف شده است ولی در همسایگی راست این نقطه تعریف نشده است.

۴ گزینهٔ) $y = \frac{۱}{[-x]}$, $[-x] = ۰ \Rightarrow ۰ \leq -x < ۱ \Rightarrow -۱ < x \leq ۰$

دامنه $= \mathbb{R} - (-۱, ۰] = (-\infty, -۱] \cup (۰, +\infty)$

۱۰۰ - گزینه ۴ چون حاصل حد نامتناهی شده است، پس k می تواند یکی از ریشه های مخرج باشد. پس:

$$x^۲ + x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow x = ۳, -۴$$

در هر دو حالت حد را حساب می کنیم:

$$۱)\ x=۳ \Rightarrow \lim_{x \to ۳^+} \frac{۱-x}{x^۲+x-۱۲} = \lim_{x \to ۳^+} \frac{۱-x}{(x-۳)(x+۴)} = \frac{-۲}{۰^+} = -\infty$$

$$۲)\ k=-۴ \Rightarrow \lim_{x \to (-۴)^+} \frac{۱-x}{x^۲+x-۱۲} = \lim_{x \to (-۴)^+} \frac{۱-x}{(x-۳)(x+۴)} = \frac{۵}{۰^-} = -\infty$$

پس برای k مقداری وجود ندارد.

۱۰۱ - گزینه ۴ ابتدا با داشتن دو نقطه، ضابطهٔ تابع f را می‌نویسیم.

$$\begin{cases} A \left| \begin{array}{l} ۰ \\ ۱ \end{array} \right. \\ B \left| \begin{array}{l} ۲ \\ ۰ \end{array} \right. \end{cases} \to \frac{y-y_A}{x-x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \to \frac{y-۱}{x} = \frac{۱}{-۲} \to ۲y - ۲ = -x \to ۲y = -x + ۲ \to y = -\frac{۱}{۲}x + ۱ \to f(x) = -\frac{۱}{۲}x + ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۲f(x)+۱}{f(۳x)-x} = \frac{۲(-\frac{۱}{۲}x+۱)+۱}{-\frac{۱}{۲}(۳x)+۱-x} = \frac{-x+۳}{-\frac{۵}{۲}x+۱}$$

$$\text{پس} : \lim_{x \to +\infty} \frac{-x+۳}{-\frac{۵}{۲}x+۱} \overset{\text{توان بیشتر}}{=\!=\!=} \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{-\frac{۵}{۲}x} = \frac{۲}{۵}$$

- ۱۰۲

$$m_{AC} = ۱٫۵ \longrightarrow \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = ۱٫۵ \longrightarrow \frac{۲۴ - y_C}{۴-۳} = ۱٫۵$$

$$\longrightarrow ۲۴ - y_C = ۱٫۵ \longrightarrow y_C = ۲۲٫۵ \longrightarrow C \left| \begin{array}{l} ۳ \\ ۲۲٫۵ \end{array} \right.$$

$$m_{AB} = ۱٫۵ \longrightarrow \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = ۱٫۵ \longrightarrow \frac{۲۴ - y_B}{۴-۵} = ۱٫۵$$

$$\longrightarrow ۲۴ - y_B = -۱/۵ \longrightarrow y_B = ۲۵/۵ \longrightarrow B \left| \begin{matrix} ۵ \\ ۲۵/۵ \end{matrix} \right.$$

مختصات نقطهٔ A هم طبق صورت سؤال $A \left| \begin{matrix} ۴ \\ ۲۴ \end{matrix} \right.$ است.

۱۰۳ -

الف)

$$f(x) = \left(\frac{x}{۲x-۱}\right)^۵ \to f'(x) = ۵\left(\frac{x}{۲x-۱}\right)^۴ \left(\frac{۱(۲x-۱)-۲(x)}{(۲x-۱)^۲}\right)$$

ب)

$$g(x) = x^۲(\sqrt{x+۱}) \to g'(x) = ۲x(\sqrt{x+۱}) + \frac{۱(۱)}{۲\sqrt{x+۱}}x^۲$$

۱۰۴ -

توجه کنید که $m_B = ۰$ است و $m_A < ۰$ و $m_C > m_D > ۰$ است.

شیب	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	-۲
نقطه	C	B	D	A

۱۰۵ - تابع f در $x = a$ وقتی مشتق‌پذیر است که تابع در $x = a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع f در $x = a$ با هم برابر باشند.

$$\text{پیوستگی:} \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} (x^۲+x) = ۱+۱ = ۲ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} (۳x-۱) = ۳-۱ = ۲ \\ f(۱) = ۱+۱ = ۲ \end{cases} \to \text{تابع در } x = ۱ \text{ پیوسته است.}$$

$$\text{مشتق‌های راست و چپ:} \begin{cases} f'(۱^+) = ۲x+۱ = ۲(۱)+۱ = ۳ \\ f'(۱^-) = ۳ \end{cases}$$

با توجه به پیوسته بودن و تساوی مشتق‌های راست و چپ، تابع در $x = ۱$ مشتق‌پذیر است.

۱۰۶ - از مشتق حاصل‌ضرب استفاده می‌کنیم. $(y = uv \to y' = u'v + v'u)$

$$y = \frac{۱}{x}(۲\sqrt{x}-۱)^۴ \to y' = -\frac{۱}{x^۲}(۲\sqrt{x}-۱)^۴ + ۴(۲\sqrt{x}-۱)^۳(۲(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}))\frac{۱}{x}$$

۱۰۷ -

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱} = \frac{f(۷)-f(۲)}{۷-۲} = \frac{\sqrt{۹}-\sqrt{۴}}{۵} = \frac{۳-۲}{۵} = \frac{۱}{۵}$$

۱۰۸ -

الف) مشتق حاصل ضرب می باشد. $(y = uv \to y' = uv' + v'u)$

$$f(x) = (x^۲+۱)^۳(۵x-۱) \to f'(x) = ۳(x^۲+۱)^۲(۲x)(۵x-۱) + ۵(x^۲+۱)^۳$$

ب)

$$g(x) = \frac{۹x-۲}{\sqrt{x}} \to g'(x) = \frac{۹(\sqrt{x}) - \frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۹x-۲)}{x}$$

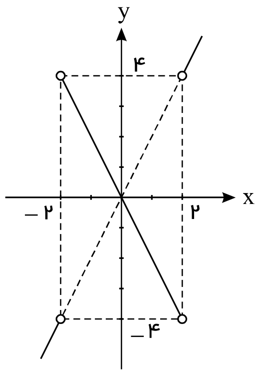
۱۰۹ - برای محاسبهٔ مشتق راست سراغ ضابطهٔ پایین و برای محاسبهٔ مشتق چپ سراغ ضابطهٔ بالا می‌رویم.

$$\left.\begin{matrix} x \geq ۰ \to f(x) = x \to f'_+(۰) = ۱ \\ x < ۰ \to f(x) = x^۲ \to f'(x) = ۲x \to f'_-(۰) = ۰ \end{matrix}\right\} \to f'_+(۰) \neq f'_-(۰)$$

۱۱۰ - تابع در $x = ۲$ و $x = -۲$ (ریشه‌های غیرمکرر داخل قدرمطلق) مشتق‌ناپذیر است.

x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
$x^۲-۴$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$$\begin{cases} x < -۲ & \to f(x) = x^۲-۴ \\ -۲ \leq x \leq ۲ & \to f(x) = -x^۲+۴ \\ x > ۲ & \to f(x) = x^۲-۴ \end{cases} \longrightarrow f'(x) = \begin{cases} ۲x & x < -۲ \\ -۲x & -۲ < x < ۲ \\ ۲x & x > ۲ \end{cases}$$



۱۱۱ - تابع در $x=۲$ و $x=۰$ (ریشه‌های غیرمکرر داخل قدرمطلق) مشتق‌ناپذیر است بدین علت:

$$f'(x_\circ)=\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}=\lim_{x\to ۰}\frac{|x(x-۲)|-\overbrace{f(۰)}^{۰}}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{|x(x-۲)|}{x}$$

$$\to\begin{cases} f'(۰^+)=\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{\overbrace{|x(x-۲)|}^{-}}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{-x(x-۲)}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^+}-(x-۲)=۲\\ f'(۰^-)=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{\overbrace{|x(x-۲)|}^{+}}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{x(x-۲)}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^-}(x-۲)=-۲\end{cases}$$

تابع $f(x)$ در $x_\circ=۰$ مشتق‌ناپذیر است.

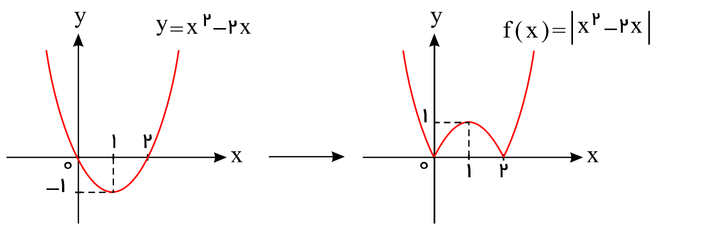
$$f'(x_\circ)=\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}=\lim_{x\to ۲}\frac{|x(x-۲)|-\overbrace{f(۲)}^{۰}}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{|x(x-۲)|}{x-۲}$$

$$\to\begin{cases} f'(۲^+)=\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{\overbrace{|x(x-۲)|}^{+}}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{x(x-۲)}{(x-۲)}=\lim\limits_{x\to ۲^+}x=۲\\ f'(۲^-)=\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{\overbrace{|x(x-۲)|}^{-}}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{-x(x-۲)}{(x-۲)}=\lim\limits_{x\to ۲^-}-x=-۲\end{cases}$$

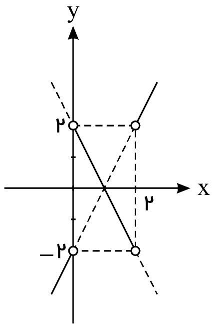
تابع $f(x)$ در $x_\circ=۲$ مشتق‌ناپذیر است.

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
$x^۲-۲x$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$$\begin{cases} x<۰ & \to\ f(x)=x^۲-۲x\\ ۰\le x\le ۲ & \to\ f(x)=-x^۲+۲x\\ x>۲ & \to\ f(x)=x^۲-۲x\end{cases}\longrightarrow f'(x)=\begin{cases}۲x-۲ & x<۰\\ -۲x+۲ & ۰<x<۲\\ ۲x-۲ & x>۲\end{cases}$$



و نمودار f' به صورت مقابل است:



۱۱۲ ـ گزینه ۲

$$f(x)=(۲x+۱)^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲x+۱}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{آهنگ متوسط از ۴ تا ۱۲} = \dfrac{f(۱۲)-f(۴)}{۱۲-۴}=\dfrac{\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۳}}{۸}=\dfrac{\frac{-۲}{۱۵}}{\frac{۸}{۱}}=-\dfrac{۱}{۶۰} \\ \text{مشتق=آهنگ لحظه‌ای} = \dfrac{\frac{-۲}{۲\sqrt{۲x+۱}}}{۲x+۱}\overset{x=۴}{=\!=\!=}\dfrac{-\frac{۲}{۶}}{۹}=-\dfrac{۱}{۲۷} \end{array}\right\}\Rightarrow -\frac{۱}{۶۰}-(-\frac{۱}{۲۷})=\frac{۱۱}{۵۴۰}$$

۱۱۳ ـ گزینه ۴

$$f(x)=\log_{۲}^{x+۱}\xrightarrow{x=۳}y=\log_{۲}^{۴}=\log_{۲}^{۲^{۲}}=۲\ ,\ A\left|\begin{array}{l}۳\\۲\end{array}\right.\xrightarrow{y=ax+b}۲=۳a+b$$

$$f(x)=\log_{۲}^{x+۱}\xrightarrow{x=-\frac{۱}{۲}}y=\log_{۲}^{\frac{۱}{۲}}=\log_{۲}^{۲^{-۱}}=-۱\ ,\ B\left|\begin{array}{l}-\frac{۱}{۲}\\-۱\end{array}\right.\xrightarrow{y=ax+b}-۱=-\frac{۱}{۲}a+b$$

$$\begin{cases}۳a+b=۲\\ -\frac{۱}{۲}a+b=-۱\end{cases}\rightarrow a=\frac{۶}{۷}\rightarrow ۷a=۶$$

۱۱۴ ـ گزینه ۳ ابتدا شیب خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A\left|\begin{array}{l}۱\\۴\end{array}\right.$ و $B\left|\begin{array}{l}۳\\۲\end{array}\right.$ را بدست می‌آوریم.

$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{۴-۲}{۱-۳}=-۱\xrightarrow{\text{موازی}}m_{\text{مماس}}=-۱$$

کافی است از تابع، مشتق گرفته و برابر -۱ قرار دهیم.

$$y'=-۱\rightarrow ۲x-۳=-۱\rightarrow ۲x=۲\rightarrow x=۱$$

۱۱۵ ـ گزینه ۲ روش اول:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x^{۲}+x}-\sqrt{۲}}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}+x-۲}{(x-۱)(\sqrt{x^{۲}+x}+\sqrt{۲})}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x+۲)(x-۱)}{(x-۱)(\sqrt{x^{۲}+x}+\sqrt{۲})}=\frac{۳}{۲\sqrt{۲}}$$

روش دوم:

عبارت $\lim_{h\to ۰}\dfrac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ تعریف مشتق در $x=۱$ است یعنی $f'(۱)$.

$$f(x)=\sqrt{x^{۲}+x}\rightarrow f'(x)=\frac{۱(۲x+۱)}{۲\sqrt{x^{۲}+x}}\rightarrow f'(۱)=\frac{۳}{۲\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$$

۱۱۶ ـ گزینه ۱

$$۱)\ x=-۲\xrightarrow{\text{تابع}}y=-۵\rightarrow A\left|\begin{array}{l}-۲\\-۵\end{array}\right.$$

$$۲)\ y'=\frac{۲(x+۳)-۱(۲x-۱)}{(x+۳)^{۲}}=\frac{۷}{(x+۳)^{۲}}\rightarrow m_{\text{مماس}}=۷$$

$$۳)\ y+۵=۷(x+۲)\rightarrow y=۷x+۹$$

۱۱۷ - گزینه ۳

$$y=\left(x+\sqrt{x^۲+۱}\right)^۳ \Rightarrow y'=۳\left(x+\sqrt{x^۲+۱}\right)^۲(۱+\frac{۱\,(۲x)}{۲\sqrt{x^۲+۱}})$$

$$\xrightarrow{x=\frac{۳}{۴}} y'=۳\left(\frac{۳}{۴}+\frac{۵}{۴}\right)^۲(۱+\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۵}{۲}})\to y'=۳\,(۴)\,(\frac{۸}{۵})=\frac{۹۶}{۵}=۱۹/۲$$

۱۱۸ - گزینه ۱ وقتی x اولیه ، یک می‌باشد و نمو متغیر ۰/۲۱ است پس x ثانویه ۱/۲۱ است.

$$[۱,۱/۲۱] \text{ آهنگ متوسط } =\frac{f(۱/۲۱)-f(۱)}{۱/۲۱-۱}=\frac{\sqrt{۱/۲۱}-\sqrt{۱}}{۰/۲۱}=\frac{۱/۱-۱}{۰/۲۱}=\frac{\frac{۱}{۱۰}}{\frac{۲۱}{۱۰۰}}=\frac{۱۰}{۲۱}$$

$$x=۱ \text{ آهنگ لحظه‌ای در } =f'(۱)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین تفاضل آنها $\frac{۱}{۴۲}=\frac{۱۰}{۲۱}-\frac{۱}{۲}$ است.

۱۱۹ - گزینه ۱

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{f(۶/۲۵)-f(۴)}{۶/۲۵-۴}=\frac{\sqrt{۶/۲۵}-\sqrt{۴}}{۲/۲۵}=\frac{۲/۵-۲}{۲/۲۵}=\frac{\frac{۵}{۱۰}}{\frac{۲۲۵}{۱۰۰}}=\frac{۲}{۹}$$

$$\text{مشتق} = \text{آهنگ لحظه‌ای} =\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \overset{x=۴}{=\!=} \frac{۱}{۴}$$

پس تفاضل آنها $\frac{۱}{۳۶}=\frac{۲}{۹}-\frac{۱}{۴}$ می‌شود.

۱۲۰ - گزینه ۳

$$\text{شرط پیوستگی}: \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(x-\frac{۱}{x})=۱-۱=۰ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(x^۲+ax+b)=۱+a+b \\ f(۱)=۱-۱=۰ \end{cases} \Rightarrow ۱+a+b=۰$$

$$\text{تساوی مشتق‌های راست وچپ}: f'_+(۱)=f'_-(۱)\to ۱+\frac{۱}{x^۲}=۲x+a\to ۱+۱=۲+a\to a=۰\ ,\ b=-۱$$

پس $f(x)=\begin{cases} ۱-\frac{۱}{x} & x\geq ۱ \\ x^۲-۱ & x<۱ \end{cases}$ می‌باشد.

$$f(۱-\sqrt{۲})=(۱-\sqrt{۲})^۲-۱=۱+۲-۲\sqrt{۲}-۱=۲-۲\sqrt{۲}$$

۱۲۱ - گزینه ۴

$$y=(۲x-۱)^{\frac{۱}{۳}}\Rightarrow y'=\frac{۲}{۳}(۲x-۱)^{\frac{-۲}{۳}}\Rightarrow y''=-\frac{۸}{۹}(۲x-۱)^{-\frac{۵}{۳}}$$

$$\Rightarrow y^{(۳)}=\frac{۸۰}{۲۷}(۲x-۱)^{-\frac{۸}{۳}}\xrightarrow{x=۱} y^{(۳)}=\frac{۸۰}{۲۷}$$

۱۲۲ - گزینه ۳

$$x=۴\xrightarrow{\text{تابع}} y=۰\to A\Big|^{۴}_{۰}\quad,\quad x=۸\xrightarrow{\text{تابع}} y=\sqrt{۴۸}=۴\sqrt{۳}\ \to\ B\Big|^{۸}_{۴\sqrt{۳}}$$

شیب خط گذرنده از دو نقطه‌ی A و B را بدست می‌آوریم.

$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{۰-۴\sqrt{۳}}{۴-۸}=\sqrt{۳}$$

چون خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی C با خط AB موازی است یعنی شیب خط مماس، همان شیب خط AB می‌باشد. بنابراین کافی است از تابع، مشتق گرفته و برابر با $\sqrt{۳}$ قرار دهیم.

$$y'=\frac{x}{\sqrt{x^۲-۱۶}}\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{x^۲-۱۶}}=\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{x^۲}{x^۲-۱۶}=۳$$

$$\Rightarrow ۲x^۲=۴۸\Rightarrow x^۲=۲۴\Rightarrow x=\pm ۲\sqrt{۶}$$

۱۲۳ - گزینه ۱

مشخص است که $f'(۲)=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ می‌باشد. بنابراین، کافی است از تابع مشتق گرفته و به جای x آن عدد ۲ را قرار دهیم.

$$f(x)=\left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)^۳ \to f'(x)=۳\left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)^۲\left(\frac{\frac{۱(۲x-۳)-۲(x+۲)}{(۲x-۳)^۲}}{۲\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}}\right)$$

$$=\frac{۳}{۲}\left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)\left(\frac{-۷}{(۲x-۳)^۲}\right)\to f'(۲)=\frac{۳}{۲}(۲)(-۷)=-۲۱$$

۱۲۴ – گزینه ۳ برای پیدا کردن محل تقاطع دو تابع، کافی است که دو تابع را تلاقی دهیم.

$$\begin{cases} y=(\frac{\sqrt{۳}}{۳})^{۲x} \\ y=۳^x+\frac{۸}{۳}\end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} (\frac{\sqrt{۳}}{۳})^{۲x}=۳^x+\frac{۸}{۳}\to(\frac{۳^{\frac{۱}{۲}}}{۳})^{۲x}=۳^x+\frac{۸}{۳}\to(۳^{-\frac{۱}{۲}})^{۲x}=۳^x+\frac{۸}{۳}$$

$$\to ۳^{-x}=۳^x+\frac{۸}{۳}\to ۳^x-\frac{۱}{۳^x}+\frac{۸}{۳}=۰\xrightarrow{۳^x=A} A-\frac{۱}{A}+\frac{۸}{۳}=۰$$

$$\xrightarrow{\times ۳A} ۳A^۲-۳+۸A=۰\to ۳A^۲+۸A-۳=۰\xrightarrow{\Delta=b^۲-۴ac}\Delta=۶۴+۳۶=۱۰۰$$

$$\to\begin{cases} A=\frac{-۸+۱۰}{۶}=\frac{۱}{۳}\to ۳^x=\frac{۱}{۳}=۳^{-۱}\to x=-۱\xrightarrow{y=(\frac{\sqrt{۳}}{۳})^{۲x}} y=(\frac{\sqrt{۳}}{۳})^{-۲}=(\frac{۳}{\sqrt{۳}})^۲=\frac{۹}{۳}=۳ \\ A=\frac{-۸-۱۰}{۶}=-۳\to ۳^x=-۳:\ \text{امکان ندارد}\end{cases}$$

نقطه‌ی تلاقی این دو تابع $A\begin{vmatrix}-۱\\۳\end{vmatrix}$ می‌باشد.

$$A\begin{vmatrix}-۱\\۳\end{vmatrix}\ ,\ B\begin{vmatrix}-۱\\۱\end{vmatrix}\to AB=|۳-۱|=۲$$

۱۲۵ – گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{y=f(u)\to y'=u'f'(u)}$

ابتدا حد عبارت داده شده را محاسبه کرده و اطلاعات مورد نظر را بدست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to۴}\frac{f(x)+۷}{x-۴}=\frac{f(۴)+۷}{۰}\xrightarrow[\text{کسر }\frac{۰}{۰}\text{ بوده که پس از رفع ابهام جوابش عدد شده است}]{\text{چون جواب حد، عدد شده است پس این}} f(۴)+۷=۰\to f(۴)=-۷$$

$$\text{پس}:\lim_{x\to۴}\frac{f(x)+۷}{x-۴}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۴}\frac{f'(x)}{۱}=f'(۴)=-\frac{۳}{۲}$$

اکنون مشتق $y=\frac{f(۲x)}{x}$ را حساب می‌کنیم.

$$y=\frac{f(۲x)}{x}\to y'=\frac{۲f'(۲x)\cdot x-۱f(۲x)}{x^۲}$$

$$\to y'(۲)=\frac{۴f'(۴)-f(۴)}{۴}=\frac{۴(-\frac{۳}{۲})-(-۷)}{۴}=\frac{-۶+۷}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

۱۲۶ – گزینه ۲ شرط اینکه دو تابع برهم مماس باشند آن است که معادله‌ی تلاقی آن‌ها دارای ریشه‌ی مضاعف باشد.

$$\begin{cases} y=۲x^۲-۳x+۶ \\ y=۵x+a\end{cases}\xrightarrow{\text{تلاقی}} ۲x^۲-۳x+۶=۵x+a\to ۲x^۲-۸x+۶-a=۰:\ \text{معادله‌ی تلاقی}$$

$$\text{شرط ریشه‌ی مضاعف}:\ \Delta=۰\to b^۲-۴ac=۰\to ۶۴-۸(۶-a)=۰$$

$$\to ۸-(۶-a)=۰\to ۸-۶+a=۰\to a=-۲$$

۱۲۷ – گزینه ۲ شرط اینکه تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن است که تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع f در $x=a$ با هم برابر باشند.

$$\text{پیوستگی}:\begin{cases}\lim_{x\to۲^+}f(x)=\lim_{x\to۲^+}\frac{۱}{x-۱}=۱\\ \lim_{x\to۲^-}f(x)=\lim_{x\to۲^-}(-x^۲+ax+b)=-۴+۲a+b\\ f(۲)=۱\end{cases}$$

پس $-۴+۲a+b=۱$ و درنتیجه $۲a+b=۵$ است.

$$f'(۲^+)=f'(۲^-)\to\frac{-۱}{(x-۱)^۲}=-۲x+a\to -۱=-۴+a\to a=۳$$

$$\xrightarrow{۲a+b=۵} ۶+b=۵\to b=-۱$$

۱۲۸ – گزینه ۳ می دانیم که $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)\ ,\ (fog)'(x)=g'(x)\cdot f'(g(x))$ است.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow f'(۲)=\frac{۴}{۳}$$

$$(fog)'(۱)=g'(۱)\cdot f'(g(۱))\to\begin{cases}g(۱)=۱+۱=۲\\ g'(x)=۱+\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}\to g'(۱)=۱+\dfrac{۱}{۲}=\dfrac{۳}{۲}\end{cases}$$

پس: $g'(۱)\cdot f'(g(۱))=\frac{۳}{۲}\times f'(۲)=\frac{۳}{۲}\times\frac{۴}{۳}=۲$

۱۲۹ - گزینه ۴

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{f(۲)-f(\circ)}{۲-\circ}=\frac{۱۲-۲}{۲}=\frac{۱\circ}{۲}=۵$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای}=f'(x)=\sqrt{۴x+۱}+\frac{۴}{۲\sqrt{۴x+۱}}(x+۲)\to f'(\frac{۳}{۴})=۲+\frac{۱۱}{۴}=\frac{۱۹}{۴}=۴/۷۵$$

پس $۵-۴/۷۵=\circ/۲۵$ است.

۱۳۰ - گزینه ۳ ابتدا شیب پاره‌خطی که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل می‌کند را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}A\left|\begin{matrix}\circ\\-۵\end{matrix}\right.\\ B\left|\begin{matrix}۸\\۳\end{matrix}\right.\end{cases}\to m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{-۵-۳}{\circ-۸}=\frac{-۸}{-۸}=۱\xrightarrow{\text{موازی}}m_{\text{مماس}}=۱$$

کافی است از تابع، مشتق گرفته و برابر یک قرار دهیم.

$$y'=\frac{۴(x+۱)-۱(۴x-۵)}{(x+۱)^۲}\to ۱=\frac{۹}{(x+۱)^۲}\to(x+۱)^۲=۹\to\begin{cases}x+۱=۳\to x=۲\xrightarrow{\text{تابع}}y=۱\to C\left|\begin{matrix}۲\\۱\end{matrix}\right.\\ x+۱=-۳\to x=-۴\ (\text{در بازه نیست})\ \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

اکنون باید معادلهٔ خط مماس را در نقطهٔ C و با شیب یک بنویسیم.

$$y-y_C=m(x-x_C)\to y-۱=۱(x-۲)\xrightarrow{x=\circ}y=-۱$$

۱۳۱ - گزینه ۳ باتوجه به این که $x=\circ$ ریشه‌ی ساده عبارت داخل قدرمطلق است، لذا تابع در $x=\circ$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد پس $\alpha=\circ$ است. تابع f را در اطراف نقطه‌ی $x=\circ$ تعیین علامت کرده و سپس از ضابطه‌ی بدون قدرمطلق مشتق گیری می کنیم. پس داریم:

$$\begin{cases}x>\circ\ :f(x)=\sqrt{۱+|x|}=\sqrt{۱+x}\\ \Rightarrow f'(x)=\dfrac{۱}{۲\sqrt{۱+x}}\Rightarrow f'_+(\circ)=\dfrac{۱}{۲\sqrt{۱+\circ}}=\dfrac{۱}{۲}\\ x<\circ\ :f(x)=\sqrt{۱+|x|}=\sqrt{۱-x}\\ \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-۱}{۲\sqrt{۱-x}}\Rightarrow f'_-(\circ)=\dfrac{-۱}{۲\sqrt{۱-\circ}}=-\dfrac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow f'_+(\circ)-f'_-(\circ)=\frac{۱}{۲}-(-\frac{۱}{۲})=۱$$

۱۳۲ - گزینه ۳

$$x=۱\xrightarrow{\text{داخل قدر مطلق مثبت است}}f(x)=۵-x\sqrt{x}\to f'(x)=(-۱)\sqrt{x}+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(-x)$$

$$\to f'(۱)=-۱-\frac{۱}{۲}=-\frac{۳}{۲}$$

$$x=۴\xrightarrow{\text{داخل قدر مطلق منفی است}}f(x)=-۵+x\sqrt{x}\to f'(x)=(۱)\sqrt{x}+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(x)$$

$$\to f'(۴)=۲+\frac{۱}{۴}(۴)=۳$$

پس: $f'(۱)+f'(۴)=-\frac{۳}{۲}+۳=\frac{۳}{۲}$

۱۳۳ - گزینه ۲ عبارت $\lim_{\Delta x\to\circ^-}\frac{f(۲+\Delta x)-f(۲)}{\Delta x}$ بیانگر مشتق چپ تابع در $x=۲$ می باشد. بنابراین کافی است تابع $f(x)$ را در همسایگی $x=۲$ تعیین علامت کرده و سپس مشتق گیری نمائیم. در نتیجه داریم:

$x < 2 : f(x) = |x^2 - 4| + \sqrt{3x^2}$
$= -(x^2 - 4) + \sqrt{3x^2} = -x^2 + 4 + \sqrt{3}\,|x| = -x^2 + \sqrt{3}x + 4$
$\Rightarrow f'(x) = -2x + \sqrt{3} \Rightarrow f'(2) = -2(2) + \sqrt{3} = -4 + \sqrt{3}$

۱۳۴ - گزینه ۳ آهنگ متوسط تغییر حجم آب در بازه ی زمانی $[0, 100]$ برابر است با:

$$V \text{ آهنگ متوسط} = \frac{V(100) - V(0)}{100 - 0} = \frac{[40(1 - \frac{100}{100})^2] - [40(1 - \frac{0}{100})^2]}{100} = \frac{0 - 40}{100} = -\frac{40}{100}$$

از طرفی آهنگ آنی تغییر حجم (V) برابر با مشتق V در زمان t می‌باشد. لذا داریم:

$$V(t) = 40(1 - \frac{t}{100})^2 \Rightarrow V'(t) = 2 \times 40 \times (\frac{-1}{100})(1 - \frac{t}{100}) = -\frac{4}{100}$$
$$\Rightarrow 2(1 - \frac{t}{100}) = 1 \Rightarrow 1 - \frac{t}{100} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{t}{100} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 50s$$

۱۳۵ - گزینه ۲

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1) - f(1 - h^2)}{h^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{h\to 0} \frac{2hf'(1 - h^2)}{2h} = \lim_{h\to 0} f'(1 - h^2)$$

دقت کنید وقتی $h \to 0^{\pm}$ آن گاه $h^2 \to 0^{+}$ پس:

$$\lim_{h\to 0} f'(1 - h^2) = f'(1 - 0^{+}) = f'(1^{-})$$
$$x < 1 \to f(x) = x^2 - 3x + 6 \to f'(x) = 2x - 3 \to f'(1^{-}) = 2 - 3 = -1$$

۱۳۶ - گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{y = f(u) \to y' = u'f'(u)}$

چون جواب حد، عدد شده است و مخرج، صفر شده است پس صورت هم باید صفر باشد. حال به کمک روش هوپیتال، رفع ابهام می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 2} \frac{f'(x)}{1} = f'(2) = \frac{1}{2} \to f'(2) = \frac{1}{2}$$
$$y = xf(\sqrt{x}) \Rightarrow y' = 1(f\sqrt{x}) + x(\frac{1}{2\sqrt{x}}f'(\sqrt{x})) \xrightarrow{x=4} y'(4) = f(2) + \frac{4}{2\sqrt{4}}f'(2) = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

همچنین داریم $y(4) = 4f(\sqrt{4}) = 4f(2) = -8$ ، لذا خواهیم داشت:

$$y - (-8) = -\frac{3}{2}(x - 4) \Rightarrow 2y + 16 = -3x + 12 \Rightarrow 2y + 3x + 4 = 0$$

۱۳۷ - گزینه ۱ اگر دو تابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ برهم مماس باشند معادله‌ی تلاقی آن‌ها ریشه‌ی مضاعف دارد.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x - 3 \\ g(x) = 2x^2 + x + a \end{cases}$$
$$\xrightarrow{\text{تلاقی}} \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x - 3 = 2x^2 + x + a \to x^3 + 3x^2 + 6x - 9 = 6x^2 + 3x + 3a$$
$$\to \boxed{x^3 - 3x^2 + 3x - 9 - 3a = 0} : \text{معادله‌ی تلاقی}$$

دقت کنید که ریشه‌ی مضاعف در مشتق معادله هم صدق می‌کند.

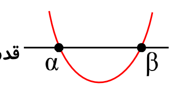
$$3x^2 - 6x + 3 = 0 \to x^2 - 2x + 1 = 0 \to (x - 1)^2 = 0 \to \underbrace{x = 1}_{\text{طول نقطه‌ی تماس}} \to f(1) = \frac{1}{3} + 1 + 2 - 3 = \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{عرض نقطه‌ی تماس}}$$

۱۳۸ - گزینه ۱ ابتدا معادله‌ی خط مماس را می‌نویسیم.

$$1)\ x = 1 \xrightarrow{\text{تابع}} y = 1 - 5 + 7 + 1 = 4 \to A\left|\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\right.$$
$$2)\ y' = 3x^2 - 10x + 7 \to m_{\text{مماس}} = 3 - 10 + 7 = 0$$
$$3)\ y - 4 = 0(x - 1) \to y = 4 : \text{معادله‌ی خط مماس}$$

اکنون برای محاسبه‌ی طول وتری که خط $y = 4$ روی سهمی داده شده ایجاد می‌کند باید معادله‌ی تلاقی را تشکیل دهیم.

$$x^2 - 5x + 6 = 4 \to x^2 - 5x + 2 = 0 : \text{معادله‌ی تلاقی}$$

دقت کنید که طول وتر ایجاد شده  قدر مطلق تفاضل ریشه‌های معادله‌ی تلاقی است.

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|1|} = \sqrt{25 - 8} = \sqrt{17}$$

۱۳۹ - گزینه ۱ طبق صورت سؤال $f(2 + h) - f(2) = 3h - h^2$ است پس:

$$f(2 + h) - f(2) = h(3 - h) \to \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = 3 - h$$

شیب خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ در $x = ۲$ برابر $f'(۲)$ است و می‌دانیم که $f'(x) = \lim\limits_{h\to ۰} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ است.

پس: $\lim\limits_{h\to ۰} \dfrac{f(۲+h)-f(۲)}{h} = f'(۲) = \lim\limits_{h\to ۰}(۳-h) = ۳$

۱۴۰ - گزینه ۲ تابع f یک تابع خطی است و می‌توان آن را به‌صورت $f(x) = ax+b$ نشان داد.

$$f(x) = ax+b \to \begin{cases} f(۲x) = ۲ax+b \\ f(۲) = ۲a+b \end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{f(۲x)-f(۲)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{۲ax+b-۲a-b}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{۲a(x-۱)}{(x-۱)} = ۲a = ۴ \to a = ۲$$

دقت کنید چون تابع f از نقطهٔ $\left|\begin{matrix}۰\\۱\end{matrix}\right.$ می‌گذرد بنابراین معادلهٔ آن به‌صورت $f(x) = ۲x+۱$ است پس $f(۱) = ۳$ است و چون دو تابع f و g در $x = ۲$ برهم مماس هستند پس $f'(۲) = g'(۲)$ است و از طرفی $f'(x) = ۲$ پس $f'(۲) = ۲$ است درنتیجه $f(۱) + g'(۲) = ۳ + ۲ = ۵$ است.

۱۴۱ - گزینه ۴ از عبارت $g'(x)f(x) - f'(x)g(x)$ باید متوجه شویم که این عبارت، صورت کسر مشتق $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ است زیرا:

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' = \frac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{(g(x))^۲}$$

پس عبارت $g(x)$ را بر $f(x)$ تقسیم می‌کنیم؛ داریم:

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^۸-۱}{(x^۲+۱)(x^۴+۱)} = \frac{(x^۴+۱)(x^۴-۱)}{(x^۲+۱)(x^۴+۱)} = \frac{(x^۲+۱)(x^۲-۱)}{(x^۲+۱)} = x^۲-۱$$

حال از دو طرف مشتق می‌گیریم:

$$\frac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{(f(x))^۲} = ۲x$$

و در نهایت x را مساوی یک قرار می‌دهیم:

$$\frac{g'(۱)f(۱)-f'(۱)g(۱)}{(f(۱))^۲} = ۲ \xrightarrow{f(۱)=۴} g'(۱)f(۱)-f'(۱)g(۱) = ۲\times ۴^۲ = ۳۲$$

۱۴۲ - گزینه ۳

با توجه به مشتق کسر داریم:

$$\left(\frac{g(x)}{f'(x)}\right)' = \frac{g'(x)f'(x)-g(x)f''(x)}{(f'(x))^۲}$$

حال $\dfrac{g(x)}{f'(x)}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = \frac{۳x+۱}{۲x+۱} \Rightarrow f'(x) = \frac{۳(۲x+۱)-۲(۳x+۱)}{(۲x+۱)^۲} = \frac{۱}{(۲x+۱)^۲}$$

$$y = \frac{g(x)}{f'(x)} = \frac{\dfrac{x+\sqrt{x}}{(۲x+۱)^۲}}{\dfrac{۱}{(۲x+۱)^۲}} = x+\sqrt{x} \Rightarrow y' = ۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow y'(۹) = ۱+\frac{۱}{۶} = \frac{۷}{۶}$$

۱۴۳ - گزینه ۲ از مشتق حاصل‌ضرب کمک می‌گیریم.

$$f(x) = (\sqrt{۵x+۱})(۳x-۲)^۳ \Rightarrow f'(x) = \frac{۵}{۲\sqrt{۵x+۱}}(۳x-۲)^۳ + ۹(۳x-۲)^۲(\sqrt{۵x+۱})$$

$$f'(۰) = \frac{۵}{۲}\times(-۸) + ۹(-۲)^۲(۱) = -۲۰+۳۶ = ۱۶$$

۱۴۴ - گزینه ۳ ابتدا دامنهٔ تابع را می‌یابیم.

$$۲-x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۲ \quad (۱)$$

$$\sqrt{۲}-\sqrt{۲-x} \geq ۰ \Rightarrow \sqrt{۲} \geq \sqrt{۲-x} \Rightarrow ۲ \geq ۲-x \Rightarrow x \geq ۰ \quad (۲)$$

$$(۱)\cap(۲): ۰ \leq x \leq ۲ \Rightarrow D_f = [۰,۲]$$

با توجه به دامنه، تنها مشتق راست در نقطهٔ $x = ۰$ قابل محاسبه است.

$$f'_+(۰) = \lim_{x\to ۰^+} \frac{f(x)-f(۰)}{x-۰} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{\sqrt{\sqrt{۲}-\sqrt{۲-x}}-۰}{x} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{\sqrt{\sqrt{۲}-\sqrt{۲-x}}}{x} \times \frac{\sqrt{\sqrt{۲}+\sqrt{۲-x}}}{\sqrt{\sqrt{۲}+\sqrt{۲-x}}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2-2+x}}{x\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{2-x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{2-x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}\times\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{2-x}}}$$

$$= \frac{1}{0^+\times\sqrt{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

۱۴۵ -

الف) $f(x) = 2x^3+3x^2-12x \to f'(x) = 6x^2+6x-12 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{c}{a}=-2 \end{cases}$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	20 Max	$\searrow$	-7 Min	$\nearrow$	$+\infty$

ب) $f'(x) = 6x^2+6x-12 = 0 \to \begin{cases} x=1 \text{ قق } \to \left|\begin{matrix}1\\-7\end{matrix}\right. \text{ نقطهٔ بحرانی} \\ x=-2 \text{ غقق (در بازه نیست)} \end{cases}$

پس : $\begin{cases} f(-1) = -2+3+12 = 13 \\ f(3) = 54+27-36 = 45 \to \text{مطلق}Max \to \left|\begin{matrix}3\\45\end{matrix}\right. \\ f(1) = 2+3-12 = -7 \to \text{مطلق}Min \to \left|\begin{matrix}1\\-7\end{matrix}\right. \end{cases}$

۱۴۶ - الف)

$f(x) = x^3-3x+4 \to f'(x) = 3x^2-3 = 0 \to x = \pm 1$

$\to$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	6 Max	$\searrow$	2 Min	$\nearrow$	$+\infty$

ب)

$g'(x) = 3x^2+2 = 0 \to x^2 = -\frac{2}{3}$ ریشهٔ حقیقی ندارد.

$\to \begin{cases} g(-2) = -8-4-5 = -17 : \text{مطلق}Min \\ g(1) = 1+2-5 = -2 : \text{مطلق}Max \end{cases}$

۱۴۷ -

$2a+b = 60 \to b = 60-2a$

$ab = a(60-2a) = 60a-2a^2 \xrightarrow{\text{مشتق}=0} 60-4a = 0 \to a = 15 \ , \ b = 30$

۱۴۸ - نقاط اکسترمم نسبی پیوسته و مشتق‌پذیر دارای دو خاصیت هستند:

۱) در تابع صدق می‌کنند.

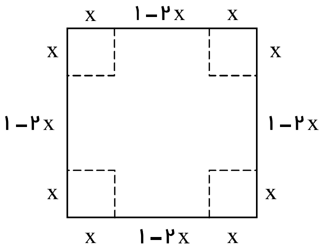
۲) طولشان مشتق را صفر می‌کند.

$\left|\begin{matrix}1\\7\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} 7 = a+b$

$\left|\begin{matrix}1\\7\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{طولش مشتق را صفر می‌کند.}} f'(x) = 2ax+b \to 0 = 2a+b$

پس: $\begin{cases} a+b=7 \\ 2a+b=0 \end{cases} \to a=-7 \ , \ b=14$

۱۴۹ -



$\rightarrow V_{\text{جعبه}} = \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}$

$$V = (۱ - ۲x)^۲ \cdot x = (۱ + ۴x^۲ - ۴x)x = ۴x^۳ - ۴x^۲ + x$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}=۰} ۱۲x^۲ - ۸x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\Delta = b^۲ - ۴ac = ۶۴ - ۴۸ = ۱۶} \begin{cases} x = \dfrac{۸ + ۴}{۲۴} = \dfrac{۱}{۲} \text{ غ ق ق} \\ x = \dfrac{۸ - ۴}{۲۴} = \dfrac{۱}{۶} \end{cases}$$

۱۵۰ –

$$x - y = ۱۰ \rightarrow y = x - ۱۰$$

$$xy = x(x - ۱۰) = x^۲ - ۱۰x \xrightarrow{\text{مشتق}=۰} ۲x - ۱۰ = ۰ \rightarrow x = ۵ \ , \ y = -۵$$

۱۵۱ – گزینه ۴ فاصلهٔ دو نقطهٔ $A\begin{vmatrix} x_۱ \\ y_۱ \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} x_۲ \\ y_۲ \end{vmatrix}$ برابر $d = \sqrt{(x_۱ - x_۲)^۲ + (y_۱ - y_۲)^۲}$ می‌باشد.

نقطهٔ $M(x, y)$ را در نظر می‌گیریم؛ داریم: $d = AM - BM = \sqrt{(x - ۱)^۲ + ۲۵} - \sqrt{(x - ۷)^۲ + ۴}$

می‌خواهیم d ماکسیمم شود، بنابراین:

$$d' = \frac{۲(x - ۱)}{۲\sqrt{(x - ۱)^۲ + ۲۵}} - \frac{۲(x - ۷)}{۲\sqrt{(x - ۷)^۲ + ۴}} = ۰ \Rightarrow \frac{x - ۱}{\sqrt{(x - ۱)^۲ + ۲۵}} = \frac{x - ۷}{\sqrt{(x - ۷)^۲ + ۴}}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{(x - ۱)^۲}{(x - ۱)^۲ + ۲۵} = \frac{(x - ۷)^۲}{(x - ۷)^۲ + ۴}$$

$$\Rightarrow (x - ۱)^۲(x - ۷)^۲ + ۴(x - ۱)^۲ = (x - ۷)^۲(x - ۱)^۲ + ۲۵(x - ۷)^۲ \rightarrow ۴(x - ۱)^۲ = ۲۵(x - ۷)^۲$$

$$\Rightarrow ۲|x - ۱| = ۵|x - ۷| \xrightarrow{x > ۷} ۲x - ۲ = ۵x - ۳۵ \Rightarrow x = ۱۱$$

۱۵۲ – گزینه ۲ چون بازه‌ای داده نشده‌است دامنه‌ی تعریف این تابع را به‌عنوان بازه در نظر می‌گیریم $D_f = (-\infty, +\infty)$

$$y = \frac{۱}{۴}x^۴ - x^۳ - ۲x^۲ \Rightarrow y' = x^۳ - ۳x^۲ - ۴x = x(x^۲ - ۳x - ۴) = x(x - ۴)(x + ۱) = ۰ \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۴ \\ x = -۱ \end{cases}$$

حال مقادیر تابع را به ازای طول‌های نقاط بحرانی و ابتدا و انتهای بازه بدست می‌آوریم.

$$f(\pm\infty) = \frac{۱}{۴}(\pm\infty)^۴ = +\infty \ , \ f(۰) = ۰ \ , \ f(۴) = -۳۲ \ , \ f(-۱) = -\frac{۳}{۴}$$

کمترین مقدار تابع برابر -۳۲ می‌باشد.

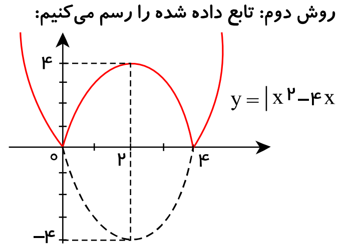
۱۵۳ – گزینه ۳ روش اول: در توابع $y = |u|$ از حل معادلات $u = ۰ \ , \ u' = ۰$ طول نقاط بحرانی بدست می‌آید.

$$u = ۰ \rightarrow x^۲ - ۴x = ۰ \rightarrow x(x - ۴) = ۰ \rightarrow x = ۰, ۴$$
$$u' = ۰ \rightarrow ۲x - ۴ = ۰ \rightarrow x = ۲$$

پس مجموعه‌ی طول‌های نقاط بحرانی تابع عبارتند از: $\{۰, ۲, ۴\}$

روش دوم: تابع داده شده را رسم می‌کنیم:

$$y = |x^۲ - ۴x| \rightarrow y = |(x - ۲)^۲ - ۴|$$



در $x = ۰$ و $x = ۴$ مشتق وجود ندارد (نقاط زاویه‌دار) و در $x = ۲$ مشتق برابر صفر است.

۱۵۴ – گزینه ۱ اکسترمم‌های نسبی پیوسته و مشتق‌پذیر دارای دو خاصیت هستند: در تابع صدق می‌کنند و طولشان، مشتق را صفر می‌کند.

$\left| \begin{matrix} ۲ \\ ۳ \end{matrix} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۳ = ۸ + ۴a + b \;\rightarrow\; ۴a + b = -۵$

$\left| \begin{matrix} ۲ \\ ۳ \end{matrix} \right. \xrightarrow{\text{طولش } y' \text{ را صفر می کند}} y' = ۳x^۲ + ۲ax \rightarrow ۰ = ۱۲ + ۴a \rightarrow a = -۳ \;,\; b = ۷$

۱۵۵ - گزینه ۲

کافی است مقادیر تابع را به ازای طول‌های منفی نقاط بحرانی بدست آورده و با هم مقایسه کنیم.

$$y = x + \frac{۹}{x} \rightarrow y' = ۱ - \frac{۹}{x^۲} = \frac{x^۲ - ۹}{x^۲} = ۰$$

$$\text{صورت} = ۰ \rightarrow x^۲ - ۹ = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۳ \; (x < ۰) \; (\text{غ ق ق}) \\ x = -۳ \;\; \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\text{مخرج} = ۰ \rightarrow x^۲ = ۰ \rightarrow x = ۰ \; (x < ۰) \; \text{غ ق ق}$$

$$x = -۳ \xrightarrow{\text{تابع}} y = -۳ - ۳ \rightarrow y_{Max} = -۶$$

۱۵۶ - گزینه ۴

نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آنها مشتق برابر صفر است یا وجود ندارد.

دامنه‌ی تعریف این تابع، مجموعه اعداد حقیقی است، یعنی $D_f = (-\infty + \infty)$ است.

$$y = x^{\frac{۸}{۳}} - ۴x^{\frac{۲}{۳}}$$

$$y' = \frac{۸}{۳}x^{\frac{۵}{۳}} - \frac{۸}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}} \;\rightarrow\; y' = \frac{۸}{۳}(x^{\frac{۵}{۳}} - x^{-\frac{۱}{۳}}) \rightarrow y' = \frac{۸}{۳}(\sqrt[۳]{x^۵} - \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}) \Rightarrow y' = \frac{۸}{۳}(\frac{x^۲ - ۱}{\sqrt[۳]{x}})$$

$$\text{صورت} = ۰ \rightarrow x^۲ = ۱ \rightarrow x \pm ۱ \quad , \quad \text{مخرج} = ۰ \rightarrow x = ۰$$

در $x = \pm ۱$ مشتق صفر است در $x = ۰$ مشتق وجود ندارد پس طول‌های نقاط بحرانی تابع عبارتند از : $\{-۱, ۰, ۱\}$

۱۵۷ - گزینه ۲

$$f(x) = \frac{۱}{۳}x^۳ - x^۲ - ۱۵x \rightarrow f'(x) = x^۲ - ۲x - ۱۵ = (x - ۵)(x + ۳) = ۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = ۵ \rightarrow (\text{در بازه قرار ندارد}) \; \text{غ ق ق} \\ x = -۳ \end{cases}$$

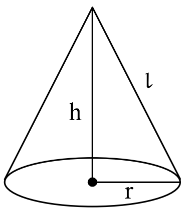
اکنون باید مقدار تابع را به ازای طول نقطه‌ی بحرانی و ابتدا و انتهای بازه، بدست آوریم.

$$f(-۴) = -\frac{۶۴}{۳} - ۱۶ + ۶۰ = \frac{۶۸}{۳} \sim ۲۲/۶$$

$$f(۳) = ۹ - ۹ - ۴۵ = -۴۵ \rightarrow \text{مطلق } Min$$

$$f(-۳) = -۹ - ۹ + ۴۵ = ۲۷ \rightarrow \text{مطلق } Max$$

۱۵۸ - گزینه ۳



$$\text{حجم استوانه} = \frac{۱}{۳} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} \rightarrow \frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h \rightarrow r^۲ h = ۱ \rightarrow r^۲ = \frac{۱}{h}$$

$$\text{مساحت جانبی}: S = \pi r \ell = \pi r\sqrt{r^۲ + h^۲} = \pi\sqrt{\frac{۱}{h}}\sqrt{\frac{۱}{h} + h^۲} \rightarrow S = \pi\sqrt{h + \frac{۱}{h^۲}} \;:\text{یک‌متغیره}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق} = ۰} \pi \times \frac{۱ - \frac{۲h}{h^۴}}{۲\sqrt{h + \frac{۱}{h^۲}}} = ۰ \rightarrow ۱ = \frac{۲}{h^۳} \rightarrow h^۳ = ۲ \rightarrow h = \sqrt[۳]{۲}$$

۱۵۹ - گزینه ۴ روش اول:

$x = ۴$ ریشهٔ سادهٔ داخل قدرمطلق است (نقطهٔ گوشه) بنابراین در $x = ۴$ مشتق وجود ندارد (بحرانی).

$$f(x) = \begin{cases} x(x - ۴) & x \geq ۴ \\ -x(x - ۴) & x < ۴ \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۴x & x \geq ۴ \\ -x^۲ + ۴x & x < ۴ \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۲x - ۴ & x > ۴ \\ -۲x + ۴ & x < ۴ \end{cases}$$

اگر مشتق را مساوی صفر قرار دهیم $x = ۲$ به‌دست می‌آید.

x	$-\infty$		۲		۴		$+\infty$
y'		+	۰	−	وجود ندارد	+	
y		↗	۴ Max	↘	۰ Min	↗	

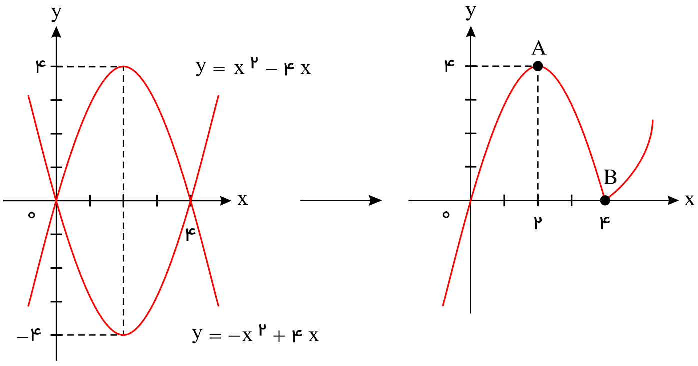
$$\begin{cases} A \Big| \begin{matrix} ۲ \\ ۴ \end{matrix} \\ B \Big| \begin{matrix} ۴ \\ ۰ \end{matrix} \end{cases} \rightarrow AB = \sqrt{(۲-۴)^۲ + (۴-۰)^۲} = \sqrt{۴+۱۶} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

روش دوم:

می توانیم نمودار تابع داده‌شده را رسم کنیم.

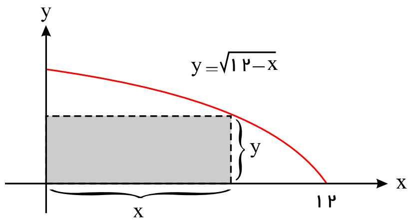
$x \geq ۴ \rightarrow y = x^۲ - ۴x \rightarrow S \Big| \begin{matrix} ۲ \\ -۴ \end{matrix}$ و $x = ۰, ۴$: محل برخورد تابع با محور xها

$x < ۴ \rightarrow y = -x^۲ + ۴x \rightarrow S \Big| \begin{matrix} ۲ \\ ۴ \end{matrix}$ و $x = ۰, ۴$: محل برخورد تابع با محور xها



$$\begin{cases} A \Big| \begin{matrix} ۲ \\ ۴ \end{matrix} \\ B \Big| \begin{matrix} ۴ \\ ۰ \end{matrix} \end{cases} \rightarrow AB = \sqrt{۴+۱۶} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

۱۶۰ ـ گزینه ۳



$$S = x \cdot y = x \cdot \sqrt{۱۲ - x} \xrightarrow{S' = ۰} \sqrt{۱۲ - x} + \frac{-۱}{۲\sqrt{۱۲ - x}} x = ۰$$

$$\rightarrow \sqrt{۱۲ - x} = \frac{x}{۲\sqrt{۱۲ - x}} \rightarrow ۲(۱۲ - x) = x \rightarrow ۲۴ - ۲x = x$$

$$\rightarrow ۳x = ۲۴ \rightarrow x = ۸ \rightarrow S_{Max} = ۸\sqrt{۱۲ - ۸} = ۸ \times ۲ = ۱۶$$

۱۶۱ ـ گزینه ۱ روش اول:

$$x \geq ۰ \rightarrow f(x) = x^۲ - ۲x \rightarrow f'(x) = ۲x - ۲ = ۰ \rightarrow x = ۱$$

$$x < ۰ \rightarrow f(x) = -x^۲ - ۲x \rightarrow f'(x) = -۲x - ۲ = ۰ \rightarrow x = -۱$$

→

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
y'		+	۰	−	۰	+	
y		↗	۱ Max	↘	-۱ Min	↗	

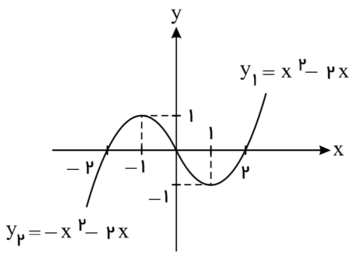
$$\begin{cases} A\left|\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right. \\ B\left|\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right.\end{cases} \quad AB=\sqrt{(-1-1)^2+(1+1)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

روش دوم:

می‌توانیم نمودار تابع داده‌شده را رسم کنیم.

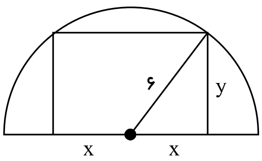
$x\geq 0 \to y=x^2-2x \to S\left|\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right.$, $x=0,2$: محل برخورد تابع با محور xها

$x<0 \to y=-x^2-2x \to S\left|\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right.$, $x=0,-2$: محل برخورد تابع با محور xها



$$\begin{cases} A\left|\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right. \\ B\left|\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right.\end{cases} \quad AB=\sqrt{(-1-1)^2+(1+1)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

۱۶۲ - گزینه ۴ روش اول:



$\Rightarrow S=2xy$: دومتغیره

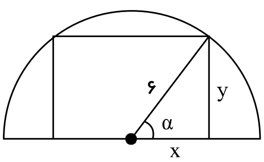
$$x^2+y^2=36 \to y^2=36-x^2 \to y=\sqrt{36-x^2}$$

پس : $S=2x\cdot\sqrt{36-x^2}$: یک‌متغیره $\xrightarrow{S'=0} 2\sqrt{36-x^2}+\dfrac{1(-2x)}{2\sqrt{36-x^2}}(2x)=0$

$$\to 2\sqrt{36-x^2}=\frac{2x^2}{\sqrt{36-x^2}} \to 36-x^2=x^2 \to 2x^2=36$$

$$\to x^2=18 \to x=3\sqrt{2}\ ,\ y=3\sqrt{2} \to S_{Max}=2(3\sqrt{2})(3\sqrt{2})=36$$

روش دوم:



$$\sin\alpha=\frac{y}{6} \to y=6\sin\alpha\ ,\ \cos\alpha=\frac{x}{6} \to x=6\cos\alpha$$

$$S=2xy=2(6\cos\alpha)(6\sin\alpha)=72\sin\alpha\cos\alpha=72(\frac{1}{2}\sin 2\alpha)=36\sin 2\alpha$$

این عبارت وقتی Max است که $\sin 2\alpha=1$ باشد پس $S_{Max}=36$ است.

۱۶۳ - گزینه ۴

$$y=-x^3+3x+1 \Rightarrow y'=-3x^2+3=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \to \begin{cases} x=1 \to y=3 \to A\left|\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right. \\ x=-1 \to y=-1 \to B\left|\begin{matrix}-1\\-1\end{matrix}\right.\end{cases}$$

$$AB=\sqrt{(1+1)^2+(3+1)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

۱۶۴ - گزینه ۳

کافی است از تابع، مشتق گرفته و بزرگتر از صفر قرار دهیم.

$$\Rightarrow y'=\frac{x-a-x-۲}{(x-a)^۲}\Rightarrow y'=\frac{-a-۲}{\underbrace{(x-a)^۲}_{+}}<۰\to -a-۲<۰\to a>-۲$$

۱۶۵ - گزینه ۱

$$y=x^۲-ax+۱\to y'=۲x-a=۰\to x=\frac{a}{۲}\xrightarrow{\text{تابع}}y=\frac{a^۲}{۴}-\frac{a^۲}{۲}+۱\to y=\frac{۴-a^۲}{۴}$$

$$\left|\begin{matrix}\frac{a}{۲}\\ \frac{۴-a^۲}{۴}\end{matrix}\right.\xrightarrow[\text{صدق}]{y=-x}\frac{۴-a^۲}{۴}=-\frac{a}{۲}\to -۴a=۸-۲a^۲\to ۲a^۲-۴a-۸=۰\to a^۲-۲a-۴=۰$$

$$\to \Delta=۴+۱۶=۲۰\to\begin{cases}a=\frac{۲+\sqrt{۲۰}}{۲}=۱+\sqrt{۵}\\ a=\frac{۲-\sqrt{۲۰}}{۲}=۱-\sqrt{۵}\end{cases}$$

۱۶۶ - گزینه ۱ نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آنها مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد.

توجه کنید دامنه‌ی تعریف تابع، مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. $D_f=(-\infty,\infty)$.

$$f(x)=(x^۳-۳x^۲+۴)^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{x^۳-۳x^۲+۴}\Rightarrow f'(x)=\frac{۳x^۲-۶x}{۳\sqrt[۳]{(x^۳-۳x^۲+۴)^۲}}$$

$$\text{صورت}=۰\Rightarrow ۳x^۲-۶x=۰\Rightarrow x^۲-۲x=۰\Rightarrow x(x-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x_۱=۰\\ x_۲=۲\end{cases}$$

$$\text{مخرج}=۰\Rightarrow x^۳-۳x^۲+۴=۰\Rightarrow (x+۱)(x-۲)^۲=۰\Rightarrow\begin{cases}x_۳=-۱\\ x_۴=۲\end{cases}$$

بنابراین مجموع طول‌های نقاط بحرانی تابع برابر $۱=۲+۱-۰$ می‌باشد.

توجه کنید اگر $x=\alpha$ یک عبارت را صفر کند عبارت بر $x-\alpha$ بخش‌پذیر است، عبارت $x^۳-۳x^۲+۴$ به ازای $x=۲$ صفر می‌شود پس این عبارت بر $x-۲$ بخش‌پذیر است.

$$\begin{array}{l|l} x^۳-۳x^۲+۴ & x-۲\\ \underline{-x^۳+۲x^۲} & x^۲-x-۲\\ -x^۲+۴ & \\ \underline{x^۲-۲x} & \\ -۲x+۴ & \\ \underline{۲x-۴} & \\ ۰ & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^۳-۳x^۲+۴=(x-۲)(x^۲-x-۲)=(x-۲)(x-۲)(x+۱)=(x-۲)^۲(x+۱)$$

۱۶۷ - گزینه ۱ دامنه‌ی تعریف تابع $D_f=(-\infty,+\infty)$ است. (Δ مخرج منفی است پس ریشه‌ی حقیقی ندارد)

$$f'(x)=\frac{-۲(۲x-۲)}{(x^۲-۲x+۵)^۲}\xrightarrow{f'(x)=۰}۲x-۲=۰\to x=۱$$

حال مقادیر تابع را به ازای نقطه‌ی بحرانی و دو سر بازه به دست می‌آوریم:

$$f(۱)=\frac{۱}{۲},\ f(-۱)=\frac{۱}{۴},\ f(۲)=\frac{۲}{۵}\Rightarrow Maxf(x)=\frac{۱}{۲},\ Minf(x)=\frac{۱}{۴}$$

پس جواب $\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}$ می‌شود.

۱۶۸ - گزینه ۴ ابتدا نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی را به دست می‌آوریم و سپس شیب خط گذرنده از دو نقطه، را بدست می‌آوریم که نشان‌دهنده‌ی تانژانت زاویه‌ای است که خط، با جهت مثبت محور xها می‌سازد.

$$f'(x)=۶x^۲-۱۸x+۱۲=۰\Rightarrow x^۲-۳x+۲=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱\xrightarrow{\text{تابع}}A(۱,۶):\ \text{نسبی } Max\\ x=۲\xrightarrow{\text{تابع}}B(۲,۵):\ \text{نسبی } Min\end{cases}$$

$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{۶-۵}{۱-۲}=\tan\alpha=-۱\Rightarrow\alpha=۱۳۵^\circ$$

۱۶۹ - گزینه ۲

$$A\left|\begin{matrix}۱\\ \frac{۳}{۲}\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{صدق}}\frac{۳}{۲}=۱-\frac{۹}{۲}+a+b\Rightarrow a+b=۵$$

$$f'(x)=۳x^۲-۹x+a\xrightarrow{f'(۱)=۰}۳-۹+a=۰\Rightarrow a=۶,\ b=-۱$$

$$f'(x)=۳x^{۲}-۹x+۶=\circ \xrightarrow{a+b+c=\circ} x=۱\ ,\ x=\frac{c}{a}=۲$$

x	$-\infty$		۱		۲		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{۳}{۲}$	$\searrow$	۱	$\nearrow$	
					Min		

۱۷۰ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\underbrace{c-\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}_{\text{مطلق } Min}\leq a\sin u+b\cos u+c\leq \underbrace{c+\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}_{\text{مطلق } Max}}$

بنابراین: $۳-\sqrt{۴+۱}\leq ۲\cos x+\sin x+۳\leq ۳+\sqrt{۴+۱}\rightarrow \begin{cases}\text{مطلق } Max=۳+\sqrt{۵}\\ \text{مطلق } Min=۳-\sqrt{۵}\end{cases}$

حاصل‌ضرب اکسترمم‌های مطلق $=(۳+\sqrt{۵})(۳-\sqrt{۵})=۹-۵=۴$

۱۷۱ - گزینه ۲ چون بازه‌ای داده نشده است دامنه‌ی تعریف تابع را به عنوان بازه در نظر می‌گیریم.

$$\begin{array}{l} x-۱\geq\circ\rightarrow x\geq ۱\\ ۵-x\geq\circ\rightarrow x\leq ۵\end{array}\xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f=[۱,۵]$$

$$y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x-۱}}+\frac{-۱}{۲\sqrt{۵-x}}=\frac{\sqrt{۵-x}-\sqrt{x-۱}}{۲\sqrt{x-۱}\ \sqrt{۵-x}}$$

صورت $=\circ\rightarrow\sqrt{۵-x}=\sqrt{x-۱}\xrightarrow{\text{توان ۲}}۵-x=x-۱\rightarrow x=۳$

مخرج $=\circ\rightarrow ۲\sqrt{x-۱}\sqrt{۵-x}=\circ\rightarrow\begin{cases}x=۱\\ x=۵\end{cases}$ دو سر بازه هستند و بحرانی محسوب نمی‌شوند.

حال باید مقدار تابع را به ازای $x=۳$ و دو سر بازه یعنی $x=۱$ و $x=۵$ به‌دست آوریم.

$$f(۱)=۲\ ,\ \ f(۵)=۲\ ,\ \ f(۳)=\sqrt{۲}+\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}$$

بنابراین مجموع Max و Min مطلق تابع برابر $۲+۲\sqrt{۲}$ می‌باشد.

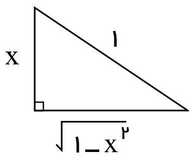
۱۷۲ - گزینه ۲

$$f(x)=\frac{۲}{۱+\cos x}+\frac{۲}{۱-\cos x}=\frac{۲(۱-\cos x)+۲(۱+\cos x)}{(۱+\cos x)(۱-\cos x)}=\frac{۴}{۱-\cos^{۲}x}=\frac{۴}{\sin^{۲}x}$$

می‌دانیم: $-۱\leq\sin x\leq ۱\rightarrow\circ\leq\sin^{۲}x\leq ۱\rightarrow\frac{۱}{\sin^{۲}x}\geq ۱\xrightarrow{\times ۴}\frac{۴}{\sin^{۲}x}\geq ۴$

بنابراین کمترین مقدار تابع برابر ۴ می‌باشد.

۱۷۳ - گزینه ۳ مثلث را به شکل مقابل در نظر می‌گیریم:



بنابراین داریم:

محیط: $P(x)=x+۱+\sqrt{۱-x^{۲}},\ \circ<x<۱$

$$P'(x)=۱+\frac{-۲x}{۲\sqrt{۱-x^{۲}}}=\circ\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}=۱\Rightarrow x^{۲}=۱-x^{۲}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow P_{Max}=P(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}+۱$$

۱۷۴ - گزینه ۱ حجم استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h برابر است با $\pi r^{۲}h$. پس:

$$\pi=\pi r^{۲}h\Rightarrow r^{۲}h=۱\Rightarrow h=\frac{۱}{r^{۲}}$$

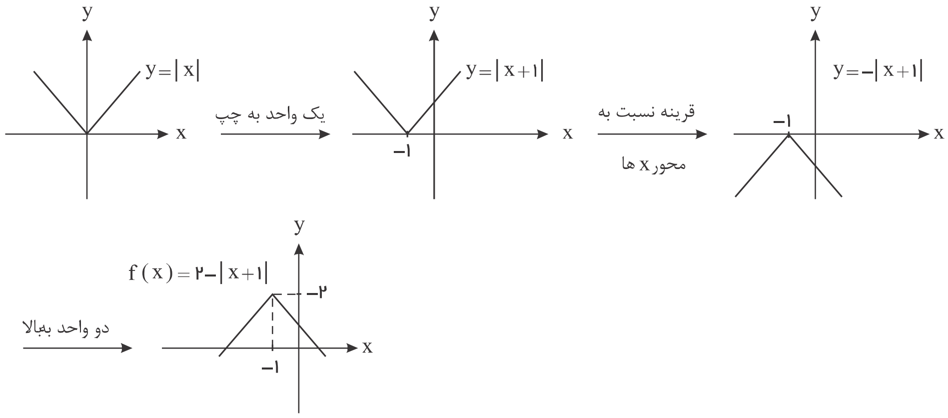
اگر مساحت لیوان کمترین شود مقدار فلز به کار رفته در ساخت آن کم‌ترین می‌شود. چون لیوان استوانه‌ای در باز است، پس مساحت آن برابر است با:

$$S=\underbrace{\pi r^{۲}}_{\text{مساحت قاعده}}+\underbrace{۲\pi rh}_{\text{مساحت جانبی}}=\pi r^{۲}+۲\pi r\frac{۱}{r^{۲}}=\pi r^{۲}+\frac{۲\pi}{r}$$

مقدار h برای کمترین مقدار S را به کمک مشتق پیدا می‌کنیم.

$$S'=\pi(۲r-\frac{۲}{r^{۲}})=\frac{۲\pi(r^{۳}-۱)}{r^{۲}}=\circ\Rightarrow r=۱\Rightarrow h=\frac{۱}{۱^{۲}}=۱$$

۱۷۵ - گزینه ۳ نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



پس تابع f ماکسیمم مطلقی برابر ۲ دارد.

۱۷۶ – گزینه ۱ به نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف که در آن نقاط مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد نقاط بحرانی گویند.

$$f(x)=۴x^{\frac{۳}{۵}}-x^{\frac{۸}{۵}}\to f'(x)=\frac{۱۲}{۵}x^{-\frac{۲}{۵}}-\frac{۸}{۵}x^{\frac{۳}{۵}}=\frac{۴}{۵}(۳x^{-\frac{۲}{۵}}-۲x^{\frac{۳}{۵}})$$

$$=\frac{۴}{۵}\left(\frac{۳}{\sqrt[۵]{x^۲}}-۲\sqrt[۵]{x^۳}\right)=\frac{۴}{۵}\left(\frac{۳-۲x}{\sqrt[۵]{x^۲}}\right)=۰\to ۳-۲x=۰\to x=\frac{۳}{۲}$$:بحرانی

به ازای $x=۰$، مشتق وجود ندارد بنابراین بحرانی است.

۱۷۷ – گزینه ۳ نقاط بحرانی تابع را در فاصله‌ی داده شده می‌یابیم:

$$f'(x)=۳x^۲-۳=۰\Rightarrow x=\pm ۱\xrightarrow{x\in[۰,۲]}x=۱$$

مقدار تابع را در نقطه‌ی بحرانی و نقاط ابتدا و انتهای بازه محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases}x=۰\to f(۰)=۱\\ x=۱\to f(۱)=-۱\\ x=۲\to f(۲)=۳(\text{مطلق } Max)\end{cases}$$

۱۷۸ – گزینه ۱ از تابع مشتق گرفته و طول نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم.

$$f(x)=x^۴-۴x^۳-۸x^۲+۱\to f'(x)=۴x^۳-۱۲x^۲-۱۶x=۴x(x^۲-۳x-۴)=۰$$

$$\to ۴x(x-۴)(x+۱)=۰\to x=۰, x=۴, x=-۱$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccccccccc} x & -\infty & & -۱ & & ۰ & & ۴ & & +\infty\\ \hline y' & & - & ۰ & + & ۰ & - & ۰ & + & \\ \hline y & & \searrow & Min & \nearrow & Max & \searrow & Min & \nearrow & \end{array}\ \to$$ $x=۰$ طول Max تابع است

۱۷۹ – گزینه ۲

$$۲x+y=۵\to y=۵-۲x$$

پس: $x^۳y^۲=x^۳(۵-۲x)^۲=x^۳(۲۵+۴x^۲-۲۰x)=۲۵x^۳+۴x^۵-۲۰x^۴$: یک‌متغیره

$$\xrightarrow{\text{مشتق}=۰}۷۵x^۲+۲۰x^۴-۸۰x^۳=۰\to ۵x^۲(۴x^۲-۱۶x+۱۵)=۰$$

$$\to\begin{cases}x=۰ \text{ غقق}\\ ۴x^۲-۱۶x+۱۵=۰\xrightarrow{\Delta=b^۲-۴ac=۲۵۶-۲۴۰=۱۶}\begin{cases}x=\frac{۱۶+۴}{۸}=\frac{۵}{۲}\xrightarrow{y=۵-۲x}y=۰ \text{ غقق}\\ x=\frac{۱۶-۴}{۸}=\frac{۳}{۲}\xrightarrow{y=۵-۲x}y=۲\end{cases}\end{cases}$$

بنابراین: $Max\ x^۳y^۲=(\frac{۲۷}{۸})(۴)=\frac{۲۷}{۲}$

۱۸۰ – گزینه ۲ طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم $x^۲+y^۲=۵^۲=۲۵$ در نتیجه $y^۲=۲۵-x^۲$ لذا داریم:

$y^۲=۲۵-x^۲\Rightarrow y=\sqrt{۲۵-x^۲}\Rightarrow A=x+۲y=x+۲\sqrt{۲۵-x^۲}$: یک‌متغیره

$$\xrightarrow{\text{مشتق}=۰}۱+۲\times\frac{-۲x}{۲\sqrt{۲۵-x^۲}}=۱-\frac{۲x}{\sqrt{۲۵-x^۲}}=\frac{\sqrt{۲۵-x^۲}-۲x}{\sqrt{۲۵-x^۲}}=۰$$

$$\Rightarrow ۲x=\sqrt{۲۵-x^{۲}}\Rightarrow ۴x^{۲}=۲۵-x^{۲}\Rightarrow ۵x^{۲}=۲۵\Rightarrow x^{۲}=۵\Rightarrow x=\sqrt{۵}$$

$$\xrightarrow{y=\sqrt{۲۵-x^{۲}}} y=\sqrt{۲۵-۵}=۲\sqrt{۵}\Rightarrow Max\ x+۲y=\sqrt{۵}+۴\sqrt{۵}=۵\sqrt{۵}$$

۱۸۱ - گزینه ۱ ابتدا هزینهٔ ساخت مخزن را به‌صورت تابعی از ابعاد استوانه (شعاع r و ارتفاع h) می‌نویسیم و سپس به‌کمک رابطهٔ حجم استوانه آن را تک متغیره می‌کنیم:

هزینه ساخت مخزن $C=$ (مساحت سطح دیواره $\times$ قیمت ساخت دیواره) $+$ (مساحت سطوح قاعده $\times$ قیمت ساخت قاعده)

مساحت سطح دیواره $=۲\pi r\cdot h$ و مساحت هر سطح قاعده $\pi r^{۲}$ و حجم استوانه $=$ مساحت قاعده $\times$ ارتفاع

$$C=۲\pi rh\times ۱۰+۲(\pi r^{۲})\times ۸ \quad \text{و} \quad V=\pi r^{۲}h=۲۰۰\pi\Rightarrow h=\frac{۲۰۰}{r^{۲}}$$

$$C=C(r)=۲\pi(\frac{۲۰۰۰r}{r^{۲}}+۸r^{۲})=۲\pi(\frac{۲۰۰۰}{r}+۸r^{۲}) : \text{یک‌متغیره}$$

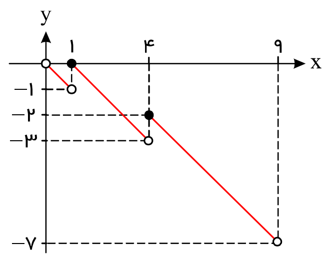
$$C'(r)=۲\pi(\frac{-۲۰۰۰}{r^{۲}}+۱۶r)=۰\Rightarrow ۱۶r=\frac{۲۰۰۰}{r^{۲}}\Rightarrow r^{۳}=\frac{۲۰۰۰}{۱۶}=\frac{۱۰^{۳}}{۸}\Rightarrow r=\frac{۱۰}{۲}=۵$$

با توجه به مقدار به دست آمده برای r می‌توانیم مقدار h را نیز به دست آوریم:

$$V=\pi r^{۲}h=۲۰۰\pi\Rightarrow h=\frac{۲۰۰}{۵^{۲}}=۸$$

۱۸۲ - گزینه ۱ تابع داده‌شده را رسم می‌کنیم و باید آن را به تابع چند ضابطه‌ای تبدیل کنیم.

$$۰<x<۱\to ۰<\sqrt{x}<۱\xrightarrow{[\sqrt{x}]=۰} y=-x$$
$$۱\le x<۴\to ۱\le\sqrt{x}<۲\xrightarrow{[\sqrt{x}]=۱} y=۱-x$$
$$۴\le x<۹\to ۲\le\sqrt{x}<۳\xrightarrow{[\sqrt{x}]=۲} y=۲-x$$



نمودار دارای ۲ ماکسیمم نسبی در $x=۴$ و $x=۱$ بوده و فاقد مینیمم نسبی است.

۱۸۳ - گزینه ۱

$$y=\frac{ax}{x^{۲}+۱}\to y'=\frac{a(x^{۲}+۱)-۲x(ax)}{(x^{۲}+۱)^{۲}}=\frac{ax^{۲}+a-۲ax^{۲}}{(x^{۲}+۱)^{۲}}$$

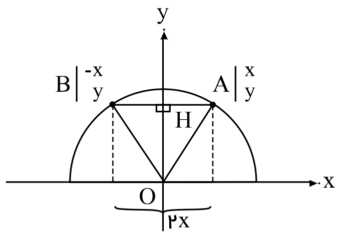
$$\to y'=\frac{-ax^{۲}+a}{(x^{۲}+۱)^{۲}}\to y'=\frac{a(-x^{۲}+۱)}{(x^{۲}+۱)^{۲}}=۰\to\begin{cases} x=۱\xrightarrow{\text{تابع}} y=\dfrac{a}{۲}\\ x=-۱\xrightarrow{\text{تابع}} y=\dfrac{-a}{۲}\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left|\begin{array}{l}۱\\ \dfrac{a}{۲}\end{array}\right.\xrightarrow[\text{صدق}]{y=۴x+b}\dfrac{a}{۲}=۴+b\\ \\ \left|\begin{array}{l}-۱\\ -\dfrac{a}{۲}\end{array}\right.\xrightarrow[\text{صدق}]{y=۴x+b}-\dfrac{a}{۲}=-۴+b\end{array}\right\}\to a=۸\,,\,b=۰$$

۱۸۴ - گزینه ۱ با توجه به ثابت بودن کل مساحت محصور بین منحنی و محور xها، برای آن‌که مساحت قسمت هاشوخورده، کمترین مقدار ممکن شود، لازم است که مساحت مثلث OAB، بیشترین باشد.

اگر مختصات رأس A از مثلث را $\left|\begin{array}{l}x\\ y\end{array}\right.$ درنظر بگیریم، قاعدهٔ مثلث (AB) برابر $۲x$ و ارتفاع مثلث (OH) برابر y خواهد بود. پس مساحت این مثلث متساوی‌الساقین برابر است با:

$S=\frac{1}{2}(AB)(OH)=\frac{1}{2}(2x)(y)=xy$

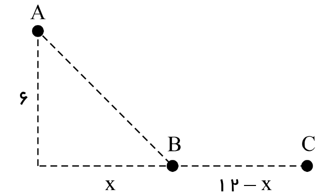


پس: $xy=x\sqrt{2-x^2}$: یک‌متغیره $\xrightarrow{\text{مشتق}=0}\sqrt{2-x^2}+\frac{1(-2x)}{2\sqrt{2-x^2}}x=0\rightarrow\sqrt{2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}=0$

$\rightarrow\frac{2-x^2-x^2}{\sqrt{2-x^2}}=0\rightarrow 2=2x^2\rightarrow x^2=1\xrightarrow{\text{ربع اول}}x=1\xrightarrow{y=\sqrt{2-x^2}}y=\sqrt{1}=1$

از آنجاکه در مثلث متساوی‌الساقین، میانه و ارتفاع وارد بر قاعده برهم منطبق هستند پس میانه نیز برابر یک است.

۱۸۵ - گزینه ۲ ابتدا معادلهٔ انرژی مصرفی را نوشته و سپس نقطهٔ مینیمم نسبی آن را به‌دست می‌آوریم:



انرژی صرف‌شده در مسیر ABC : $f(x)=\sqrt{36+x^2}\times 10\sqrt{5}+(12-x)\times 10$

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{36+x^2}}\times 10\sqrt{5}+(-10)=0$$

$$\rightarrow\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{36+x^2}}=1\Rightarrow 36+x^2=5x^2\Rightarrow 4x^2=36\Rightarrow x=\pm 3$$

درنتیجه:

$\Rightarrow x\in[0,12]\Rightarrow x=3$

پس : $BC=12-3=9$

۱۸۶ - گزینه ۱

با توجه به حجم قوطی، رابطهٔ بین ارتفاع و شعاع استوانه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$V=\pi r^2h\Rightarrow\pi r^2h=3000\xrightarrow{\pi\simeq 3}r^2h=1000\Rightarrow h=\frac{1000}{r^2}$

طبق صورت سؤال، باید مساحت کل استوانهٔ مورد نظر کم‌ترین مقدار ممکن گردد.

$S=$ مساحت کل استوانه $=$ مساحت قاعده $+$ مساحت جانبی $=\pi r^2+2\pi rh$

با جایگذاری ارتفاع برحسب شعاع، داریم:

$S=\pi r^2+\pi(\frac{2000}{r})=\pi(r^2+\frac{2000}{r})$

اگر مشتق مساحت برحسب شعاع را برابر با صفر قرار دهیم، شعاع مطلوب به‌دست می‌آید:

$S'=\pi(2r-\frac{2000}{r^2})=0$

$\Rightarrow 2r=\frac{2000}{r^2}\Rightarrow r^3=1000\Rightarrow r=10\Rightarrow h=10$

۱۸۷ - گزینه ۳ نقطهٔ اکسترمم پیوسته و مشتق‌پذیر، در تابع صدق می‌کند و طولش، مشتق را صفر می‌کند.

$A\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{صدق}}1=8+4b+d\longrightarrow 4b+d=-7$

$A\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{طولش، مشتق را صفر می‌کند.}}f'(x)=3x^2+2bx\longrightarrow 0=12+4b\longrightarrow b=-3\ ,\ d=5$

پس : $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)=0\longrightarrow\begin{cases}x=0\xrightarrow{\text{تابع}}y=5\rightarrow B\left|\begin{matrix}0\\5\end{matrix}\right.\\x=2\longrightarrow y=1\rightarrow A\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right.\end{cases}$

واضح است که خط گذرنده از دو نقطهٔ A و B دارای عرض‌ازمبدأ برابر ۵ است.

پاسخنامه کلیدی

۵	۴	۲۸	۲	۵۵	۴	۸۳	۲	۱۱۶	۱	۱۳۹	۱	۱۶۸	۴
۶	۲	۲۹	۲	۵۶	۳	۸۴	۴	۱۱۷	۳	۱۴۰	۲	۱۶۹	۲
۷	۲	۳۰	۱	۵۷	۴	۸۵	۱	۱۱۸	۱	۱۴۱	۴	۱۷۰	۳
۸	۴	۳۱	۱	۵۸	۲	۸۶	۴	۱۱۹	۱	۱۴۲	۳	۱۷۱	۲
۹	۱	۳۲	۱	۵۹	۱	۸۷	۲	۱۲۰	۳	۱۴۳	۲	۱۷۲	۲
۱۰	۱	۳۳	۳	۶۰	۳	۸۸	۲	۱۲۱	۴	۱۴۴	۳	۱۷۳	۳
۱۱	۲	۳۴	۴	۶۱	۳	۸۹	۲	۱۲۲	۳	۱۵۱	۴	۱۷۴	۱
۱۲	۴	۳۹	۴	۶۲	۱	۹۰	۲	۱۲۳	۱	۱۵۲	۲	۱۷۵	۳
۱۳	۱	۴۰	۲	۶۳	۱	۹۱	۱	۱۲۴	۳	۱۵۳	۳	۱۷۶	۱
۱۴	۲	۴۱	۴	۶۹	۳	۹۲	۱	۱۲۵	۳	۱۵۴	۱	۱۷۷	۳
۱۵	۲	۴۲	۳	۷۰	۱	۹۳	۱	۱۲۶	۲	۱۵۵	۲	۱۷۸	۱
۱۶	۳	۴۳	۴	۷۱	۴	۹۴	۴	۱۲۷	۲	۱۵۶	۴	۱۷۹	۲
۱۷	۳	۴۴	۲	۷۲	۳	۹۵	۳	۱۲۸	۳	۱۵۷	۲	۱۸۰	۲
۱۸	۳	۴۵	۴	۷۳	۴	۹۶	۴	۱۲۹	۴	۱۵۸	۳	۱۸۱	۱
۱۹	۳	۴۶	۳	۷۴	۱	۹۷	۱	۱۳۰	۳	۱۵۹	۴	۱۸۲	۱
۲۰	۱	۴۷	۳	۷۵	۲	۹۸	۱	۱۳۱	۳	۱۶۰	۳	۱۸۳	۱
۲۱	۱	۴۸	۱	۷۶	۲	۹۹	۳	۱۳۲	۳	۱۶۱	۱	۱۸۴	۱
۲۲	۳	۴۹	۳	۷۷	۲	۱۰۰	۴	۱۳۳	۲	۱۶۲	۴	۱۸۵	۲
۲۳	۲	۵۰	۱	۷۸	۱	۱۰۱	۴	۱۳۴	۳	۱۶۳	۴	۱۸۶	۱
۲۴	۳	۵۱	۴	۷۹	۴	۱۱۲	۲	۱۳۵	۲	۱۶۴	۳	۱۸۷	۳
۲۵	۳	۵۲	۴	۸۰	۴	۱۱۳	۴	۱۳۶	۱	۱۶۵	۱		
۲۶	۴	۵۳	۱	۸۱	۳	۱۱۴	۳	۱۳۷	۱	۱۶۶	۱		
۲۷	۴	۵۴	۲	۸۲	۳	۱۱۵	۲	۱۳۸	۱	۱۶۷	۱		