نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: آمار واحتمال

تاریخ آزمون: ۱۳۹۸/۱۲/۱۵

فاخران

۱ - یک عدد دو رقمی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که این عدد بر ۵ بخش‌پذیر باشد یا بر ۲ بخش‌پذیر نباشد، کدام است؟

① $\frac{۱}{۱۰}$ ② $\frac{۴}{۱۰}$ ③ $\frac{۶}{۱۰}$ ④ $\frac{۹}{۱۰}$

۲ - برای دو پیشامد ناسازگار A و B اگر $P(A)=\frac{۱}{۳}$ و $P(B')=\frac{۲}{۵}$ باشد، احتمال وقوع حداقل یکی از دو پیشامد A یا B کدام است؟

① $\frac{۷}{۱۵}$ ② $\frac{۱۴}{۱۵}$ ③ $\frac{۱۱}{۱۵}$ ④ $\frac{۱}{۲}$

۳ - عددی به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۲۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه عدد انتخابی نه بر ۳ بخش‌پذیر باشد و نه بر ۵، کدام است؟

① $\frac{۹۳}{۲۰۰}$ ② $\frac{۴۷}{۱۰۰}$ ③ $\frac{۵۳}{۱۰۰}$ ④ $\frac{۱۰۷}{۲۰۰}$

۴ - در فضای نمونه‌ای پرتاب ۳ سکه و ۲ تاس، تعداد x تا ۵تایی مرتب ایجاد می‌شود. x کدام است؟

① ۲۸۳ ② ۲۹۳ ③ ۲۹۰ ④ ۲۸۸

۵ - سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم، اگر رو بیاید، آنگاه یک تاس می‌ریزیم و اگر پشت بیاید، سکه را دو بار دیگر پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش اگر پیشامدهای A که در آن دقیقاً یک بار سکه رو بیاید و B را که در آن حداقل دو بار سکه پشت بیاید در نظر می‌گیریم پیشامد آن‌که فقط A اتفاق بیفتد، چند زیرمجموعه دارد؟

① ۲۵۶ ② ۶۴ ③ ۸ ④ ۳۲

۶ - کیسه‌ای شامل ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه است. سه مهره از این کیسه خارج می‌کنیم، کدام احتمال از بقیه کمتر است؟

① آمدن ۳ مهرهٔ سفید ② آمدن ۲ مهرهٔ سفید و یک مهرهٔ سیاه ③ آمدن یک مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه ④ آمدن ۳ مهرهٔ سیاه

۷ - یک تاس را حداقل چند بار باید پرتاب کنیم تا احتمال نیامدن ۶ در پرتاب‌ها، کمتر از $\frac{۱۲۵}{۲۱۶}$ باشد؟

① ۳ ② ۴ ③ ۵ ④ ۶

۸ - در یک جعبه ۲۰ مهره وجود دارد که از ۱ تا ۲۰ شماره‌گذاری شده‌اند. ۷ مهره از این جعبه بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه کوچک‌ترین شمارهٔ باقی‌مانده در جعبه برابر ۵ باشد؛ کدام است؟

① $\frac{\binom{۱۶}{۱۳}}{\binom{۲۰}{۷}}$ ② $\frac{\binom{۱۵}{۱۳}}{\binom{۲۰}{۷}}$ ③ $\frac{\binom{۱۶}{۱۲}}{\binom{۲۰}{۷}}$ ④ $\frac{\binom{۱۵}{۱۲}}{\binom{۲۰}{۷}}$

۹ - در پرتاب سه تاس باهم، چقدر احتمال دارد سه رقم رو شده، زوج یا مجموع بیشتر از ۶ داشته باشند؟

① $\frac{۲۰۰}{۲۱۶}$ ② $\frac{۱۹۹}{۲۱۶}$ ③ $\frac{۱۹۸}{۲۱۶}$ ④ $\frac{۱۹۷}{۲۱۶}$

۱۰ - دو تیرانداز به یک هدف شلیک می‌کنند. اگر احتمال آن‌که تیرانداز اول به هدف بزند ۸۰ درصد و احتمال آن‌که تیرانداز دوم به هدف بزند ۵۰ درصد باشد، احتمال آن‌که هیچ تیری به هدف برخورد نکند، کدام است؟

① ۰٫۱ ② ۰٫۲ ③ ۰٫۳ ④ ۰٫۴

۱۱ - همهٔ دانش‌آموزان یک کلاس، حداقل در یکی از دروس ریاضی و فیزیک مردود شده‌اند. ۱۵٪ این کلاس در ریاضی قبول و ۷۰٪ آن در فیزیک مردود شده‌اند. چند درصد کلاس فقط در یک درس مردود شده‌اند؟

① ۵۵ ② ۳۰ ③ ۴۵ ④ ۱۵

۱۲ – سه تاس را باهم می‌اندازیم، احتمال این‌که حاصل ضرب اعداد رو شده مضرب ۵ باشد، چند برابر احتمال آن است که حاصل ضرب اعداد رو شده فرد باشد؟

① $\frac{۹۱}{۲۷}$ ② $\frac{۲۵}{۲۷}$ ③ $\frac{۲۷}{۲۵}$ ④ $\frac{۲۷}{۹۱}$

۱۳ – تاسی را سه بار پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد سه عدد متمایز ظاهر شوند و عدد بزرگ‌تر در پرتاب دوم ظاهر شود؟

① $\frac{۱}{۱۲}$ ② $\frac{۱}{۸}$ ③ $\frac{۷}{۷۲}$ ④ $\frac{۵}{۲۷}$

۱۴ – اگر $P(A \cup B') = ۰/۶$ و $P(A) = ۰/۵$ حاصل $P(A \cup B)$ کدام است؟

① ۰/۹ ② ۰/۵ ③ ۰/۶ ④ ۰/۷

۱۵ – از مجموعهٔ اعداد $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۳۰۰\}$، عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد انتخابی نه بر ۵ و نه بر ۶ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

① $\frac{۵}{۶}$ ② $\frac{۴}{۵}$ ③ $\frac{۲}{۳}$ ④ $\frac{۱}{۲}$

۱۶ – عددی به‌تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال عدد انتخابی مضرب فردی از ۳ است ولی مضرب ۵ نیست؟

① ۰/۱۱ ② ۰/۱۴ ③ ۰/۱۷ ④ ۰/۲۷

۱۷ – اگر $P(A) = \frac{۱}{۳}$، $P(A|B) = \frac{۱}{۴}$ و $P(B|A') = \frac{۱}{۲}$ باشد، $P(B)$ کدام است؟

① $\frac{۴}{۹}$ ② $\frac{۱}{۴}$ ③ $\frac{۲}{۳}$ ④ $\frac{۳}{۴}$

۱۸ – حسن و حسین به همراه ۴ نفر دیگر در یک صف پشت سر هم ایستاده‌اند. با چه احتمالی بین حسن و حسین فقط یک نفر قرار دارد؟

① $\frac{۱}{۱۵}$ ② $\frac{۲}{۱۵}$ ③ $\frac{۸}{۱۵}$ ④ $\frac{۴}{۱۵}$

۱۹ – چقدر احتمال دارد یک سال شمسی کبیسه ۵۳ جمعه داشته باشد؟

① $\frac{۲}{۷}$ ② $\frac{۱}{۷}$ ③ $\frac{۳}{۸}$ ④ $\frac{۵}{۹}$

۲۰ – اگر $P(A) = ۳P(B) = ۴P(A \cap B)$ بوده و $P(A \cup B) = ۰/۸$ باشد، حاصل $P(A - B)$ کدام است؟

① $\frac{۲۴}{۶۵}$ ② $\frac{۲۸}{۶۵}$ ③ $\frac{۳۲}{۶۵}$ ④ $\frac{۳۶}{۶۵}$

۲۱ – در یک تاس ناهمگن، احتمال وقوع هر عدد کم‌تر از ۶، دو برابر احتمال وقوع عدد بعدی آن است (یعنی به‌طور مثال، احتمال آمدن ۵، دو برابر احتمال آمدن ۶ و احتمال آمدن ۴ دو برابر احتمال آمدن ۵ است). احتمال آن‌که عددی فرد ظاهر شود، کدام است؟

① $\frac{۴۱}{۶۳}$ ② $\frac{۵}{۷}$ ③ $\frac{۱۷}{۲۱}$ ④ $\frac{۲}{۳}$

۲۲ – فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی غیرهم‌شانس، برابر $S = \{a, b, c, d\}$ است. اگر $P(\{a, b\}) = \frac{۲}{۵}$ و $P(\{a, c, d\}) = \frac{۲}{۳}$، آن‌گاه $P(\{a\})$ برابر کدام است؟

① $\frac{۱}{۱۵}$ ② $\frac{۲}{۱۵}$ ③ $\frac{۴}{۱۵}$ ④ $\frac{۱}{۵}$

۲۳ – یک تاس به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال ظاهر شدن هر عدد متناسب با معکوس همان عدد است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال اینکه عدد ظاهرشده ۲ یا ۵ باشد، کدام است؟

① $\frac{۱}{۳}$ ② $\frac{۲}{۷}$ ③ $\frac{۸}{۲۱}$ ④ $\frac{۱۵}{۴۹}$

۲۴- تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال آمدن هر یک از اعداد ۱ تا ۶ روی آن، متناسب با عکس آن عدد است. احتمال آمدن عدد زوج در پرتاب این تاس چقدر است؟

① $\frac{۹۲}{۱۴۷}$ ② $\frac{۵۵}{۱۴۷}$ ③ $\frac{۱۷}{۴۹}$ ④ $\frac{۱۵}{۴۹}$

۲۵- در یک دورهٔ مسابقات چهارجانبه، تیم‌های a، b، c و d حضور دارند. اگر احتمال قهرمانی تیم‌های a، b و c باهم برابر و احتمال قهرمانی تیم d دو برابر هریک از تیم‌های دیگر باشد، احتمال قهرمانی تیم d یا تیم a چقدر است؟

① $\frac{۳}{۵}$ ② $\frac{۱}{۵}$ ③ $\frac{۲}{۵}$ ④ $\frac{۴}{۵}$

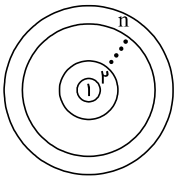
۲۶- سه شناگر a, b و c با هم مسابقه می‌دهند. شانس برنده شدن a و b مساوی یکدیگر و شانس برنده شدن هر کدام از آن‌ها دو برابر c است. احتمال برد b یا c کدام است؟

① $\frac{۳}{۵}$ ② $\frac{۲}{۵}$ ③ $\frac{۱}{۵}$ ④ $\frac{۴}{۵}$

۲۷- یک تاس طوری ساخته شده است که احتمال آمدن عدد ۲، برابر با $\frac{۱}{۳}$ احتمال آمدن هرکدام از اعداد دیگر است. اگر این تاس را پرتاب کنیم، با چه احتمالی عددی غیراول ظاهر می‌شود؟

① $\frac{۹}{۱۶}$ ② $\frac{۷}{۱۶}$ ③ $\frac{۵}{۸}$ ④ $\frac{۱}{۲}$

۲۸- در پرتاب یک دارت به یک صفحهٔ دایره‌ای‌شکل که به n ناحیهٔ مجزا تقسیم شده است، احتمال اصابت دارت به ناحیهٔ kام $(۱ \leq k \leq n)$, $(۲k-۱)x$ است. اگر احتمال اصابت دارت به ناحیهٔ دوم $\frac{۱}{۱۲}$ باشد، دایره به چند ناحیه تقسیم شده است؟



① ۴ ② ۵
③ ۶ ④ ۷

۲۹- اگر $S=\{a,b,c,d,e\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $A=\{a,b\}$، $B=\{b,c\}$ و $C=\{b,d,e\}$ سه پیشامد از این فضای نمونه‌ای باشند به‌طوری که $P(A)=\frac{۱}{۲}$، $P(B)=\frac{۱}{۴}$ و $P(C)=\frac{۱}{۳}$، حاصل $P(\{a,b,c\})$ کدام است؟

① $\frac{۱۷}{۲۴}$ ② $\frac{۵}{۱۲}$ ③ $\frac{۷}{۱۲}$ ④ $\frac{۵}{۲۴}$

۳۰- در پرتاب یک چهاروجهی که اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ روی آن حک شده است، احتمال رو شدن هر وجه متناسب با عکس مجذور عدد روی آن وجه است. احتمال رو شدن عدد زوج در یک بار پرتاب این چهاروجهی کدام است؟

① $\frac{۹}{۴۱}$ ② $\frac{۳}{۴۱}$ ③ $\frac{۲۳}{۴۱}$ ④ $\frac{۳۲}{۴۱}$

۳۱- در یک تجربهٔ تصادفی، فضای نمونه $S=\{a,b,c,d\}$ است. اگر $P(a)$، $P(b)$، $P(c)$ و $P(d)$ جملات متوالی یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت مثبت باشند و $P(\{c,d\})=\frac{۵}{۷}$ باشد، آنگاه $P(a)$ کدام است؟

① $\frac{۵}{۵۶}$ ② $\frac{۵}{۲۸}$ ③ $\frac{۳}{۲۸}$ ④ $\frac{۳}{۵۶}$

۳۲- اگر $S=\{a,b,c,d,e\}$ فضای نمونهٔ یک آزمایش تصادفی، $A=\{a,b\}$، $B=\{a,c\}$، $C=\{a,d,e\}$ پیشامدهایی از این فضای نمونه و $P(A)=\frac{۱}{۳}$، $P(B)=\frac{۲}{۵}$ و $P(C)=\frac{۳}{۵}$ باشد، آنگاه $P(A'\cap B')$ کدام است؟

① $\frac{۱۳}{۳۰}$ ② $\frac{۴}{۱۵}$ ③ $\frac{۱۱}{۳۰}$ ④ $\frac{۱}{۳}$

۳۳- در یک تجربهٔ تصادفی $S=\{x,y,\cdots,z\}$ فضای نمونه است. اگر $P(x),P(y),\cdots,P(z)$ یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند $(P(x)<P(z))$ به طوری که $P(x)=\frac{۱}{۱۲}$ و قدرنسبت $\frac{۱}{۳۰}$ باشد، تعداد پیشامدهای متمایزی که روی این فضای نمونه تعریف می‌شود کدام است؟

① ۶۴ ② ۱۲۸ ③ ۲۵۶ ④ ۵۱۲

۳۴- در پرتاب یک تاس، احتمال رو شدن عدد ۶ , $\frac{۱}{۳}$ احتمال رو نشدن آن است و احتمال رو شدن هریک از اعداد ۱ تا ۵ ، برابر یکدیگر می‌باشد. در یک بار پرتاب این تاس، احتمال اینکه عددی زوج ظاهر شود، کدام است؟

① $\frac{۱۳}{۲۰}$ ② $\frac{۷}{۲۰}$ ③ $\frac{۹}{۲۰}$ ④ $\frac{۱۱}{۲۰}$

۳۵- در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهدهٔ هر عدد متناسب با همان عدد است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال مشاهدهٔ کدام عدد ۴۰ درصد احتمال مشاهده نشدن آن است؟

① ۲ ② ۳ ③ ۵ ④ ۶

۳۶- دسته‌ای کارت داریم که شامل ۴ کارت دو رو زرد و ۵ کارت دو رو سبز و ۶ کارت یک رو زرد و یک رو سبز است. کارتی را به تصادف بیرون می‌آوریم و مشاهده می‌کنیم. احتمال آن که روی مشاهده شده، زرد باشد، چند برابر احتمال آن است که روی مشاهده شده سبز باشد؟

① $\frac{۸}{۷}$ ② $\frac{۷}{۱۵}$ ③ $\frac{۷}{۸}$ ④ $\frac{۸}{۱۵}$

۳۷- یک بازیکن فوتبال ۶۰ درصد پنالتی‌های خود را به سمت راست دروازه و بقیه را به سمت چپ می‌زند، درصد موفقیت او در پنالتی‌هایی که به راست و چپ دروازه می‌زند، به ترتیب ۸۰ و ۶۰ می‌باشد. اگر پنالتی آخر او گُل شده باشد، با کدام احتمال آن را به سمت راست دروازه زده است؟

① $\frac{۳}{۷}$ ② $\frac{۴}{۷}$ ③ $\frac{۱}{۳}$ ④ $\frac{۲}{۳}$

۳۸- کدام گزارهٔ زیر در مورد ۲ پیشامد دلخواه A و B صحیح است؟

① $P(A|\overline{B})=۱-P(A|B)$ ② $P(\overline{A}|B)=۱-P(A|B)$ ③ $P(\overline{A}|\overline{B})=۱-P(A|B)$ ④ $P(\overline{A}|\overline{B})=P(A|B)$

۳۹- یک سیستم مخابراتی در مخابرهٔ خط و نقطه $\frac{۱}{۴}$ نقاط را به خط و $\frac{۱}{۳}$ خطوط را به نقطه تبدیل می‌کند. اگر ۴۰ درصد علائم مخابره شده نقطه و بقیه خط باشد. در این صورت احتمال اینکه نقطهٔ دریافت شده در اصل به صورت نقطه مخابره شده باشد، چقدر است؟

① $\frac{۲}{۵}$ ② $\frac{۳}{۵}$ ③ $\frac{۱}{۳}$ ④ $\frac{۲}{۳}$

۴۰- فردی که به ۸۰ درصد مطالب یک درس مسلط است، به یک تست ۵ گزینه‌ای در درس مورد نظر پاسخ صحیح داده است. احتمال آنکه جواب صحیح را بلد بوده باشد، برابر کدام گزینه است؟ (اگر این فرد، مطلب درسی را بلد نباشد، پاسخ تست را به تصادف انتخاب می‌کند.)

① $\frac{۱۸}{۱۹}$ ② $\frac{۲۰}{۲۱}$ ③ $\frac{۱۳}{۱۹}$ ④ $\frac{۱۷}{۱۹}$

۴۱- یک سکه را پرتاب می‌کنیم. اگر رو بیاید، دو سکهٔ دیگر و در صورتی که پشت بیاید، سه سکهٔ دیگر پرتاب می‌کنیم. اگر در پایان این آزمایش تصادفی، سه سکه رو آمده باشد، با کدام احتمال سکهٔ اول نیز رو آمده است؟

① $\frac{۱}{۲}$ ② $\frac{۲}{۳}$ ③ $\frac{۳}{۴}$ ④ $\frac{۷}{۸}$

۴۲- با ارقام ۱ , ۲ , ۰۰۰ و ۹، عددی سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌سازیم. اگر بدانیم که رقم دهگان این عدد زوج است، احتمال آن‌که عدد سه رقمی فرد باشد، کدام است؟

① $\frac{۳}{۷}$ ② $\frac{۳}{۷}$ ③ $\frac{۹}{۱۷}$ ④ $\frac{۵}{۸}$

۴۳ - در پرتاب دو تاس، اگر بدانیم ضرب دو عدد رو شده، عددی دو رقمی است، با چه احتمالی جمع دو عدد رو شده، عددی یک رقمی و فرد است؟

① $\frac{۶}{۱۹}$ ② $\frac{۷}{۱۹}$ ③ $\frac{۸}{۱۹}$ ④ $\frac{۱۰}{۱۹}$

۴۴ - جعبهٔ A دارای ۳ مهرهٔ قرمز و ۱ مهرهٔ سفید و جعبهٔ B دارای ۱ مهرهٔ سفید و ۱ مهرهٔ قرمز است. از جعبهٔ A سه مهره به تصادف انتخاب کرده و در جعبهٔ B می‌ریزیم و سپس از جعبهٔ B، دو مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال این دو مهره قرمز هستند؟

① $\frac{۱}{۴}$ ② $\frac{۳}{۸}$ ③ $\frac{۱}{۲}$ ④ $\frac{۵}{۸}$

۴۵ - در پرتاب ۳ تاس می‌دانیم که جمع اعداد رو شده ۷ است. احتمال این‌که هر سه عدد روشده فرد باشند، کدام است؟

① $\frac{۳}{۵}$ ② $\frac{۴}{۵}$ ③ $\frac{۲}{۵}$ ④ $\frac{۱}{۵}$

۴۶ - تیم فوتسال یک کلاس، ۸ بازیکن با قدهای مختلف دارد. دو بازیکن از این تیم به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر بازیکن اول بلندتر از بازیکن دوم باشد، احتمال این‌که بازیکن اول بلندقدترین بازیکن تیم باشد، چقدر است؟

① $\frac{۱}{۲}$ ② $\frac{۱}{۴}$ ③ $\frac{۱}{۷}$ ④ $\frac{۱}{۸}$

۴۷ - در کیسهٔ A، ۳ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه و در کیسهٔ B، ۶ مهرهٔ سفید و ۱ مهرهٔ سیاه وجود دارد. یک کیسه را به‌تصادف انتخاب کرده و از آن دو مهره به تصادف برمی‌داریم. احتمال آن‌که دو مهره هم‌رنگ باشند، کدام است؟

① $\frac{۱۵}{۲۸}$ ② $\frac{۳۱}{۵۶}$ ③ $\frac{۱۷}{۲۸}$ ④ $\frac{۳۳}{۵۶}$

۴۸ - دو سبد داریم. در سبد اول، ۵ مهرهٔ قرمز و ۴ مهرهٔ آبی و در سبد دوم، ۷ مهرهٔ قرمز و ۵ مهرهٔ آبی قرار دارد. سبدی را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم و مهره‌ای از آن بیرون می‌کشیم. اگر این مهره قرمز باشد، احتمال این‌که سبد اول انتخاب شده باشد، کدام است؟

① $\frac{۲۰}{۴۱}$ ② $\frac{۲۸}{۴۱}$ ③ $\frac{۱۲}{۴۱}$ ④ $\frac{۹}{۴۱}$

۴۹ - جعبهٔ A شامل ۳ گوی سفید، ۴ گوی سیاه و ۲ گوی قرمز و جعبهٔ B شامل ۲ گوی سفید و ۵ گوی سیاه است. یکی از این دو جعبه را به‌تصادف انتخاب کرده و یک گوی از آن خارج می‌کنیم. احتمال این‌که گوی خارج شده سیاه نباشد، چقدر است؟

① $\frac{۵۳}{۱۲۶}$ ② $\frac{۷۳}{۱۲۶}$ ③ $\frac{۵۳}{۶۳}$ ④ $\frac{۱}{۲}$

۵۰ - دسته‌ای کارت شامل ۵ کارت دو رو قرمز، ۶ کارت دو رو سبز و ۴ کارت یک رو قرمز و یک رو سبز است. کارتی را به‌تصادف از این دسته انتخاب می‌کنیم و یک روی آن را می‌بینیم. با کدام احتمال روی مشاهده شده از کارت، سبز رنگ است؟

① $\frac{۱}{۳}$ ② $\frac{۲}{۵}$ ③ $\frac{۷}{۱۵}$ ④ $\frac{۸}{۱۵}$

۵۱ - در یک مدرسه، ۶۰ درصد دانش‌آموزان کلاس A و ۷۰ درصد دانش‌آموزان کلاس B در مسابقات ورزشی شرکت کرده‌اند و نسبت تعداد کل دانش‌آموزان کلاس A به تعداد کل دانش‌آموزان کلاس B، ۲ به ۳ است. دانش‌آموزی به‌تصادف از دانش‌آموزان این دو کلاس انتخاب می‌کنیم. اگر این دانش‌آموز در مسابقات ورزشی شرکت کرده باشد، با چه احتمالی این دانش‌آموز از کلاس A بوده است؟

① $\frac{۴}{۱۱}$ ② $\frac{۵}{۱۱}$ ③ $\frac{۶}{۱۱}$ ④ $\frac{۷}{۱۱}$

۵۲ - خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. یک فرزند را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که این فرزند، فقط یک برادر کوچک‌تر داشته باشد، کدام است؟

① $\frac{۱۱}{۳۲}$ ② $\frac{۵}{۱۶}$ ③ $\frac{۳}{۸}$ ④ $\frac{۱۳}{۳۲}$

۵۳ - اگر A و B دو پیشامد ناتهی از فضای نمونه‌ای S باشند، کدام رابطه صحیح <u>نیست</u>؟ (اشتراک A و B ناتهی است.)

① $\frac{P(A|B)}{P(B|A)}=\frac{P(A)}{P(B)}$ ② $\frac{P(A\cap B)}{P(A|B)}=P(A)$ ③ $P(A|A)=۱$ ④ $P(A|S)=P(A)$

۵۴- جعبهٔ A دارای ۵ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و جعبهٔ B دارای ۲ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه می‌باشد. تاسی داریم که روی وجه‌های آن تنها دو عدد X و Y نوشته شده است. این تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر عدد ظاهرشده X باشد از ظرف A و اگر عدد ظاهرشده Y باشد از ظرف B مهره‌ای را انتخاب می کنیم. اگر احتمال انتخاب شدن مهره‌های سفید و سیاه با یکدیگر برابر باشد، روی چند وجه تاس عدد X نوشته شده است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۵۵- تاسی داریم که احتمال آمدن هر عدد، متناسب با مربع آن عدد است. این تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم عدد روشده زوج است، با کدام احتمال عدد ۴ رو شده است؟

۱) $\frac{۱}{۱۴}$ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۱۴}$ ۴) $\frac{۲}{۷}$

۵۶- احتمال اینکه دانش‌آموزی در یک آزمون به سؤالات اختصاصی و عمومی به‌صورت صحیح جواب دهد به‌ترتیب ۰٫۵ و ۰٫۸ است. اگر سؤالی از بین ۱۰ سؤال اختصاصی و n سؤال عمومی انتخاب شود و احتمال آنکه دانش‌آموز به این سؤال پاسخ صحیح دهد برابر ۶۸ درصد باشد، آنگاه مقدار n کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۰ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۵۷- یک تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر عددی کوچک‌تر از ۴ رو شود، سه سکه و در غیر این‌صورت یک سکه پرتاب می‌کنیم. اگر در این آزمایش تصادفی حداقل یک‌بار سکه رو آمده باشد، با کدام احتمال نتیجهٔ پرتاب تاس عدد ۲ بوده است؟

۱) $\frac{۷}{۳۳}$ ۲) $\frac{۵}{۱۹}$ ۳) $\frac{۶}{۳۱}$ ۴) $\frac{۴}{۱۷}$

۵۸- از جعبه‌ای که ۶ مهرهٔ سفید و ۱۰ مهرهٔ سیاه دارد، مهره‌ای خارج می‌کنیم و بعد از رؤیت رنگ مهره، آن را به همراه دو مهره از رنگ مخالف به جعبه برمی‌گردانیم و سپس مهره‌ای دیگر از جعبه خارج می‌کنیم. احتمال آنکه رنگ هر دو مهرهٔ خارج شده از جعبه سفید باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۵۹- برای دو پیشامد A و B، اگر $P(A) = P(B) = ۰٫۶$ و $P(A|B) = ۰٫۸$ باشد، $P(A|B')$ کدام است؟

۱) ۰٫۲ ۲) ۰٫۳ ۳) ۰٫۴ ۴) ۰٫۵

۶۰- جعبه‌ای محتوی ۶ مهره با شماره‌های ۱ تا ۶ است. یک مهره به تصادف از جعبه خارج می‌کنیم و پس از رؤیت شمارهٔ آن، مهره‌های با شمارهٔ کوچکتر از آن را نیز از جعبه خارج کرده و سپس مهرهٔ دیگری در صورت امکان از جعبه انتخاب می‌کنیم. اگر شمارهٔ دومین مهرهٔ خارج شدهٔ تصادفی ۴ باشد، با کدام احتمال شمارهٔ اولین مهرهٔ خارج شده ۲ بوده است؟

۱) $\frac{۱۲}{۴۷}$ ۲) $\frac{۱۵}{۴۷}$ ۳) $\frac{۱۸}{۴۷}$ ۴) $\frac{۲۱}{۴۷}$

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۳

تعداد اعداد صحیح در بازهٔ $(m,n]$ که مضرب k می‌باشند از دستور $\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{m}{k}\right]$ حاصل می‌شود.

پیشامد بخش‌پذیر بودن بر ۲ : B و پیشامد بخش‌پذیر بودن بر ۵ : A

$$P(\text{بر ۵ بخش‌پذیر باشد یا بر ۲ بخش‌پذیر نباشد})=P(A\cup B')=P((A'\cap B)')$$

$$=۱-P(A'\cap B)=۱-P(B\cap A')$$

$$=۱-P(B-A)=۱-(P(B)-P(A\cap B))$$

$$n(S)=۹۰$$

$$n(B)=[\frac{۹۹}{۲}]-[\frac{۹}{۲}]=۴۹-۴=۴۵$$

$$n(A\cap B)=[\frac{۹۹}{۱۰}]-[\frac{۹}{۱۰}]=۹-۰=۹$$

$$\Rightarrow P(A\cup B')=۱-(P(B)-P(A\cap B))=۱-(\frac{۴۵}{۹۰}-\frac{۹}{۹۰})=۱-\frac{۳۶}{۹۰}=\frac{۵۴}{۹۰}=\frac{۶}{۱۰}$$

روش دوم: از هر ۵ عدد متوالی یکی بر ۵ بخش‌پذیر است و از هر ۲ عدد متوالی یکی بر ۲ بخش‌پذیر نیست:

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۶}{۱۰}$$

۲ ـ گزینه ۲

می‌دانیم اگر دو پیشامد A و B ناسازگار باشند (وقوع یا عدم وقوع یکی تأثیری بر دیگری نداشته باشد) آنگاه $A\cap B=\varnothing$ پس:

$$P(A\cap B)=۰$$

$$P(B')=\frac{۲}{۵}\Rightarrow P(B)=۱-\frac{۲}{۵}=\frac{۳}{۵}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)$$

$$P(A\cup B)=\frac{۱}{۳}+\frac{۳}{۵}=\frac{۵+۹}{۱۵}=\frac{۱۴}{۱۵}$$

۳ ـ گزینه ۴ نکته: تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی n مضرب عدد k از دستور $\left[\frac{n}{k}\right]$ حاصل شود.

نکته: عددی که هم مضرب a و هم مضرب b باشد مضرب کوچک‌ترین مضرب مشترک a و b خواهد بود.

پیشامد A را انتخاب عددی که بر ۳ بخش‌پذیر باشد و پیشامد B را انتخاب عددی که بر ۵ بخش‌پذیر باشد، در نظر می‌گیریم. به دنبال محاسبهٔ $P(A'\cap B')$ هستیم. پس داریم:

$$n(S)=۲۰۰$$

$$n(A)=\left[\frac{۲۰۰}{۳}\right]=۶۶\Rightarrow P(A)=\frac{۶۶}{۲۰۰}$$

$$n(B)=\left[\frac{۲۰۰}{۵}\right]=۴۰\Rightarrow P(B)=\frac{۴۰}{۲۰۰}$$

$$n(A\cap B)=\left[\frac{۲۰۰}{۱۵}\right]=۱۳\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱۳}{۲۰۰}$$

$$P(A'\cap B')=P((A\cup B)')=۱-P(A\cup B)$$

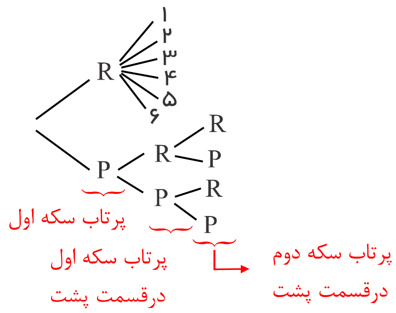
$$=۱-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))=۱-(\frac{۶۶}{۲۰۰}+\frac{۴۰}{۲۰۰}-\frac{۱۳}{۲۰۰})=۱-\frac{۹۳}{۲۰۰}=\frac{۱۰۷}{۲۰۰}$$

۴ ـ گزینه ۴ این آزمایش تصادفی یک فضای نمونه‌ای مرکب می‌سازد که ۵تایی‌های مرتبی را تشکیل می‌دهند:

$$(\underset{\text{سکه اول}}{\underset{\downarrow}{-}}\ ,\ \overset{\text{سکه دوم}}{\overset{\uparrow}{-}}\ ,\ \overset{\text{سکه سوم}}{\overset{\uparrow}{-}}\ ,\ \underset{\text{تاس اول}}{\underset{\downarrow}{-}}\ ,\ \underset{\text{تاس دوم}}{\underset{\downarrow}{-}})$$

$$\text{تعداد}=۲\times۲\times۲\times۶\times۶=۲۸۸$$

۵ - گزینه ۲ با استفاده از نمودار درختی سوال را حل می‌کنیم:



$R =$ رو و $P =$ پشت

$\Rightarrow A = \{(R,۱),(R,۲),\cdots,(R,۶),(P,R,P),(P,P,R)\}$

$B = \underbrace{\{(P,R,P),(P,P,R),(P,P,P)\}}_{\text{زیرا از لفظ حداقل استفاده کرده است.}}$

$\underbrace{A-B}_{\text{فقط } A \text{ اتفاق بیفتند.}} = \{(R,۱),(R,۲),\cdots,(R,۶)\}$

$\rightarrow$ تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ x عضوی $= ۲^x \xrightarrow[\text{دارای } (A-B) \text{ ۶ عضو است}]{x=۶} ۲^۶ = ۶۴$

۶ - گزینه ۱

باید احتمال هر یک از گزینه‌ها را بررسی کنیم:

گزینه ۱ : $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$, $n(A) = \binom{۴}{۳} = ۴$, $\underbrace{n(S) = \binom{۹}{۳} = \frac{\cancel{۹}^{۳} \times \cancel{۸}^{۴} \times ۷}{\cancel{۳}_{۱} \times \cancel{۲}_{۱}} = ۸۴}_{\text{ثابت}}$

$\Rightarrow P(A) = \frac{۴}{۴ \times ۲۱} = \frac{۴}{۸۴}$

گزینه ۲ : $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$, $n(A) = \binom{۴}{۲} \times \binom{۵}{۱} = ۶ \times ۵ = ۳۰ \rightarrow P(A) = \frac{۳۰}{۸۴}$

گزینه ۳ : $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$, $n(A) = \binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲} = ۴ \times ۱۰ = ۴۰ \rightarrow P(A) = \frac{۴۰}{۸۴}$

گزینه ۴ : $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$, $n(A) = \binom{۵}{۳} = \binom{۵}{۲} = ۱۰ \rightarrow P(A) = \frac{۱۰}{۸۴}$

بنابر مقایسهٔ اعداد بدست آمده گزینهٔ ۱ درست است.

۷ - گزینه ۲ احتمال اینکه در پرتاب یک تاس ۶ نیاید را می‌توان اینگونه یافت:

$\begin{cases} n(S) = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \\ n(A) = \{۱,۲,۳,۴,۵\} \quad (\text{۶ نیاید}) \end{cases}$

$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵}{۶} \xrightarrow[\text{کنیم}]{\text{اگر } n \text{ بار پرتاب}} (\frac{۵}{۶})^n$

حال باید ببینیم که به‌ازای کدام مقدار n این کسر کمتر از $\frac{۱۲۵}{۲۱۶}$ است:

$(\frac{۵}{۶})^n < \frac{۱۲۵}{۲۱۶} \rightarrow (\frac{۵}{۶})^n < (\frac{۵}{۶})^۳ \rightarrow n > ۳$

کمترین مقدار n، $n = ۴$ می‌باشد.

۸ - گزینه ۴ برای آنکه کوچکترین مهرهٔ باقی‌مانده ۵ شود باید مهره‌های ۱، ۲، ۳، ۴ را برداریم و ۵ را برداریم و از ۱۵ عدد مهرهٔ دیگر ۳ عدد را برمی‌داریم ⇐ طبق فرمول احتمال داریم:

$P(A) = \frac{n(A)}{n(A)} = \frac{\binom{۲۰ - \overset{\text{۵ نمی‌تواند باشد}}{۱} - \overset{\text{۴ عدد بالا را باید از قبل برداریم.}}{۴}}{۳}}{\underbrace{\binom{۲۰}{۷}}_{\text{تعداد کل حالات}}} = \frac{\binom{۱۵}{۳}}{\binom{۲۰}{۷}}$

تذکر: ($\binom{۱۵}{۱۲}$ و $\binom{۱۵}{۳}$ برابر هستند)

۹ - گزینه ۴ A پیشامد حالات مطلوب است.

مسئله را به روش غیرمستقیم حل می‌کنیم. حالاتی موردنظر نیست که حداقل یکی از سه رقم روشده زوج نباشد و مجموع کمتر یا مساوی ۶ باشد بنابراین:

$$\left.\begin{array}{ll} ۱,۱,۱ \Rightarrow \frac{۳!}{۳!}=۱ & ۱,۱,۳ \Rightarrow \frac{۳!}{۲!}=۳ \\ ۱,۲,۲ \Rightarrow \frac{۳!}{۲!}=۳ & ۱,۱,۴ \Rightarrow \frac{۳!}{۲!}=۳ \\ ۱,۲,۳ \Rightarrow ۳!=۶ & ۱,۱,۲ \Rightarrow \frac{۳!}{۲!}=۳ \end{array}\right\} \Rightarrow n(A')=۱+۳+۳+۳+۳+۶=۱۹ \rightarrow P(A')=\frac{۱۹}{۲۱۶}$$

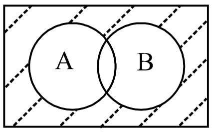
$$P(A)=۱-P(A')=\frac{۲۱۶-۱۹}{۲۱۶}=\frac{۱۹۷}{۲۱۶}$$

۱۰ - گزینه ۱ نکته: دو پیشامد A و B را مستقل نامند هرگاه وقوع یا عدم وقوع یکی تأثیری بر دیگری نداشته باشد.

نکته: شرط لازم و کافی برای آنکه دو پیشامد A و B مستقل باشند آن است که $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

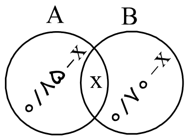
نکته: اگر A و B مستقل باشند متمم‌های آن‌ها نیز مستقل هستند.

A پیشامد آن است که تیرانداز اول به هدف بزند و B پیشامد آن است که تیرانداز دوم به هدف بزند. قسمت هاشورخورده همان قسمت موردنظر سوال است که برابر است با $(A\cup B)'$. چون دو پیشامد A و B، مستقل از یکدیگر هستند، داریم:



$$P[(A\cup B)']=P(A'\cap B')=P(A')\cdot P(B')=(۱-۰/۸)(۱-۰/۵)=۰/۲\times ۰/۵=۰/۱$$

۱۱ - گزینه ۳ فرض می‌کنیم A دانش‌آموزانی باشند که در درس ریاضی و B دانش‌آموزانی باشند که در درس فیزیک مردود شده‌اند. توجه نمایید که $P(A\cup B)=۱$ می‌باشد. هم‌چنین فرض می‌کنیم x احتمال آن است که دانش‌آموزی در هردو درس مردود شده باشد.



$$P(A\cup B)=۱$$
$$\Rightarrow ۰/۸۵-x+x+۰/۷۰-x=۱\Rightarrow x=۰/۵۵$$

درصد دانش‌آموزانی که فقط در یک درس مردود شده‌اند $=(۰/۸۵-x)+(۰/۷۰-x)$

$$\xlongequal{x=۰/۵۵} ۰/۳۰+۰/۱۵=۰/۴۵$$

۱۲ - گزینه ۱

$A:$ پیشامد حاصل‌ضرب اعداد رو شده در پرتاب ۳ تاس مضرب ۵ باشد.

$B:$ پیشامد حاصل‌ضرب اعداد رو شده در پرتاب ۳ تاس عدد فرد باشد.

برای آن‌که حاصل‌ضرب اعداد رو شده در پرتاب ۳ تاس مضرب ۵ باشد بایستی حداقل یکی از تاس‌ها مضرب ۵ باشد که متمم پیشامد آن است که هیچکدام از تاس‌ها ۵ نیاید.

$$P(A)=۱-P(A')=۱-P(\text{هیچکدام از تاس‌ها ۵ نیاید})=۱-\frac{۵\times ۵\times ۵}{۶^۳}=۱-\frac{۱۲۵}{۲۱۶}=\frac{۹۱}{۲۱۶}$$

$$P(B)=P(\text{حاصل‌ضرب ارقام ۳ تاس فرد باشد.})=P(\text{هیچکدام از تاس‌ها زوج نیاید.})=\frac{۳\times ۳\times ۳}{۶^۳}=\frac{۲۷}{۲۱۶}$$

$$\Rightarrow \frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\frac{۹۱}{۲۱۶}}{\frac{۲۷}{۲۱۶}}=\frac{۹۱}{۲۷}$$

۱۳ - گزینه ۴ پرتاب دوم نمی‌تواند ۲ یا ۱ باشد، زیرا اعداد متمایز هستند.

پرتاب دوم ۳ بیاید ← در پرتاب اول و سوم باید از $\{۱,۲\}$ و متمایز بیاید که می‌شود: $۲\times ۱=۲$

پرتاب دوم ۴ بیاید ← در پرتاب اول و سوم باید از $\{۱,۲,۳\}$ و متمایز بیاید که می‌شود: $۳\times ۲=۶$

پرتاب دوم ۵ بیاید ← در پرتاب اول و سوم باید از $\{۱,۲,۳,۴\}$ و متمایز بیاید که می‌شود: $۴\times ۳=۱۲$

پرتاب دوم ۶ بیاید ← در پرتاب اول و سوم باید از $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و متمایز بیاید که می‌شود: $۵\times ۴=۲۰$

بنابراین:

$$P(A)=\frac{۲+۶+۱۲+۲۰}{۶^۳}=\frac{۵}{۲۷}$$

راه‌حل دوم: ۳ عدد از ۶ عدد انتخاب می‌کنیم. عدد بزرگ‌تر را وسط قرار داده و برای دو عدد دیگر دو حالت داریم. بنابراین:

$$P(A)=\frac{۲\times \binom{۶}{۳}}{۶^۳}=\frac{۵}{۲۷}$$

۱۴ - گزینه ۱

$$P(B\cap A')=(P(A\cup B')')=۱-P(A\cup B')=۱-۰/۶=۰/۴$$
$$\Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(B\cap A)=۰/۴$$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(B\cap A)=0/5+0/4=0/9$

۱۵ - گزینه ۳

> نکته: اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند احتمال آن‌که نه A اتفاق بیافتد نه B، از دستور زیر حل می‌شود:
>
> $P(A'\cap B')=1-P(A\cup B)$

$A=$ پیشامد بخش‌پذیر بر ۵ , $B=$ پیشامد بخش‌پذیر بر ۶ , $n(S)=300$

$P(A'\cap B')=P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)=1-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))$

$$=1-\left(\frac{\left[\frac{300}{5}\right]}{300}+\frac{\left[\frac{300}{6}\right]}{300}-\frac{\left[\frac{300}{30}\right]}{300}\right)=1-\left(\frac{60+50-10}{300}\right)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

روش دوم: از هر ۵ عدد طبیعی متوالی یکی بر ۱۰ بخش‌پذیر است و از هر ۶ عدد طبیعی متوالی یکی از ۶ بخش‌پذیر است پس داریم:

$$P(A'\cap B')=\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

۱۶ - گزینه ۲ عددی که مضرب فرد ۳ بوده ولی مضرب ۵ نباشد عددی است که مضرب ۳ بوده و بر هیچ‌کدام از اعداد ۲ و ۵ بخش پذیر نباشد.

پیشامدهای A، B و C را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم:

پیشامد اینکه عدد انتخابی مضرب ۳ باشد: A

پیشامد اینکه عدد انتخابی مضرب ۲ باشد: B

پیشامد اینکه عدد انتخابی مضرب ۵ باشد: C

$$P(A\cap B'\cap C')=P[A\cap(B\cup C)']=P[A-(B\cup C)]$$

$$=P(A)-P[A\cap(B\cup C)]=P(A)-P[(A\cap B)\cup(A\cap C)]$$

$$=P(A)-[P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)]$$

$$=\frac{\left[\frac{100}{3}\right]}{100}-\frac{\left[\frac{100}{6}\right]}{100}-\frac{\left[\frac{100}{15}\right]}{100}+\frac{\left[\frac{100}{30}\right]}{100}=\frac{33-16-6+3}{100}=0/14$$

۱۷ - گزینه ۱

$$P(A)=\frac{1}{3}\Rightarrow P(A')=1-P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

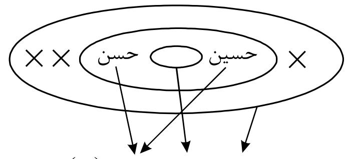
$$P(B|A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{P(B\cap A')}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}\Rightarrow P(B\cap A')=\frac{1}{3}$$

$$P(A|B)=\frac{1}{4}\Rightarrow 1-P(A|B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\Rightarrow P(A'|B)=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{P(A'\cap B)}{P(B)}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{\frac{1}{3}}{P(B)}=\frac{3}{4}\Rightarrow P(B)=\frac{4}{9}$$

۱۸ - گزینه ۴

$n(S)=6!$



$n(A)=2!\times 4\times 4!$

حالت حالت حالت

درواقع حسن و حسین و فرد بین آنها را یک نفر در نظر می‌گیریم که با سه نفر دیگر تشکیل مجموعه‌ای ۴عضوی می‌دهند و به !۴ حالت باهم جابه‌جا می‌شوند.

$$P(A)=\frac{4\times 4!\times 2!}{6!}=\frac{4}{15}$$

۱۹ - گزینه ۱ سال کبیسه‌دار ۳۶۶ روز است چون $2+7\times 52=366$، هر روز هفته ۵۲ بار تکرار می‌شود. و دو روز اضافه می‌آید احتمال آنکه روز جمعه ۵۳ بار تکرار شود $\frac{2}{7}$ می‌باشد.

۲۰ - گزینه ۴

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۰/۸ \Rightarrow ۴P(A \cap B) + \frac{۴}{۳}P(A \cap B) - P(A \cap B) = ۰/۸ \Rightarrow \frac{۱۳}{۳}P(A \cap B) = \frac{۸}{۱۰} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{۱۲}{۶۵}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = ۴P(A \cap B) - P(A \cap B) = ۳P(A \cap B) = ۳ \times \frac{۱۲}{۶۵} = \frac{۳۶}{۶۵}$$

۲۱ - گزینه ۴ می‌دانیم در پرتاب تاس $S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ طبق فرض:

$$P(۶) = a\,,\ P(۵) = ۲a\,,\ P(۴) = ۴a\,,\ P(۳) = ۸a\,,\ P(۲) = ۱۶a\,,\ P(۱) = ۳۲a$$

از طرفی:

$$P(۱) + P(۲) + \ldots + P(۶) = ۱ \Rightarrow ۳۲a + ۱۶a + ۸a + ۴a + ۲a + a = ۱$$

$$\Rightarrow a \times \frac{(۲^۶ - ۱)}{(۲ - ۱)} = ۱ \Rightarrow a = \frac{۱}{۶۳}$$

$$P(\text{ظاهر شدن عددی فرد}) = P(۱) + P(۳) + P(۵) = ۳۲a + ۸a + ۲a = ۴۲a = \frac{۴۲}{۶۳} = \frac{۲}{۳}$$

۲۲ - گزینه ۱

می‌دانیم چون $S = \{a,b,c,d\}$ پس $P(\{a\}) + P(\{b\}) + P(\{c\}) + P(\{d\}) = ۱$

$$P(\{a,c,d\}) = \frac{۲}{۳} \Rightarrow P(b) = \frac{۱}{۳}$$

$$P(\{a,b\}) = P(a) + P(b) \Rightarrow \frac{۲}{۵} = P(a) + \frac{۱}{۳} \Rightarrow P(a) = \frac{۱}{۱۵}$$

۲۳ - گزینه ۲ با توجه به این‌که احتمال ظاهر شدن هر عدد، متناسب با معکوس همان عدد است، داریم:

$$P(۱) = x \quad , \quad P(۲) = \frac{۱}{۲}x \quad , \quad P(۳) = \frac{۱}{۳}x$$
$$P(۴) = \frac{۱}{۴}x \quad , \quad P(۵) = \frac{۱}{۵}x \quad , \quad P(۶) = \frac{۱}{۶}x$$

با توجه به آن‌که $S = ۱,۲,۳,۴,۵,۶$ $P(S) = ۱$ است، داریم:

$$P(۱) + P(۲) + \cdots + P(۶) = ۱ \Rightarrow x + \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۳}x + \frac{۱}{۴}x + \frac{۱}{۵}x + \frac{۱}{۶}x = ۱$$
$$\Rightarrow \frac{۶۰ + ۳۰ + ۲۰ + ۱۵ + ۱۲ + ۱۰}{۶۰}x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۶۰}{۱۴۷}$$
$$P(\{۲,۵\}) = P(۲) + P(۵) = \frac{۳۰}{۱۴۷} + \frac{۱۲}{۱۴۷} = \frac{۴۲}{۱۴۷} = \frac{۲}{۷}$$

۲۴ - گزینه ۲ نکته: در فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال شانس اگر $S = \{S_۱, S_۲, \cdots, S_n\}$ فضای نمونه‌ای و $A = \{a_۱, a_۲, \cdots, a_k\}$ یک زیرمجموعه K عضوی از S باشد، همواره داریم:

۱) $۰ \leq P(A) \leq ۱$

۲) $P(S) = P(S_۱) + P(S_۲) + \cdots + P(S_n) = ۱$

۳) $P(A) = P(a_۱) + P(a_۲) + \cdots + P(a_k)$

اگر $P(۱) = x$، آن‌گاه $P(۲) = \frac{x}{۲}\ ,\ P(۳) = \frac{x}{۳}\ ,\ P(۴) = \frac{x}{۴}\ ,\ P(۵) = \frac{x}{۵}$ و $P(۶) = \frac{x}{۶}$ است و داریم:

$$S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$
$$P(۱) + P(۲) + P(۳) + P(۴) + P(۵) + P(۶) = ۱$$
$$\Rightarrow \frac{x}{۱} + \frac{x}{۲} + \frac{x}{۳} + \frac{x}{۴} + \frac{x}{۵} + \frac{x}{۶} = ۱$$
$$\Rightarrow \frac{۶۰x + ۳۰x + ۲۰x + ۱۵x + ۱۲x + ۱۰x}{۶۰} = ۱ \Rightarrow x = \frac{۶۰}{۱۴۷}$$
$$\Rightarrow P(\text{دربع}) = P(\{۲,۴,۶\}) = P(۲) + P(۴) + P(۶) = \frac{۳۰}{۱۴۷} + \frac{۱۵}{۱۴۷} + \frac{۱۰}{۱۴۷} = \frac{۵۵}{۱۴۷}$$

۲۵ - گزینه ۱

طبق فرض: $P(a) = P(b) = P(c) = x\ ,\ P(d) = ۲x$

بدیهی است $P(S) = ۱$ بنابراین داریم:

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = ۱ \Rightarrow x + x + x + ۲x = ۱ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۵}$$
$$P(a) = P(b) = P(c) = \frac{۱}{۵} \quad , \quad P(d) = \frac{۲}{۵}$$
$$P(\{a,d\}) = P(a) + P(d) = \frac{۱}{۵} + \frac{۲}{۵} = \frac{۳}{۵}$$

۲۶ - گزینه ۱ طبق فرض $S=\{a,b,c\}$، بنابراین $P(a)+P(b)+P(c)=۱$ از طرفی:

$$\left.\begin{array}{l}P(a)=P(b)=۲x\\P(c)=x\end{array}\right\}\Rightarrow P(a)+P(b)+P(c)=۱\Rightarrow ۲x+۲x+x=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۵}$$

$$P(\{b,c\})=P(b)+P(c)=\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۵}=\frac{۳}{۵}$$

۲۷ - گزینه ۱ اگر احتمال آمدن عدد ۲ را برابر x درنظر بگیریم، احتمال آمدن بقیهٔ اعداد برابر $۳x$ است. چون $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ پس داریم:

$$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱\Rightarrow ۵(۳x)+x=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۱۶}$$

$$P(\text{غیراول بودن})=P(\{۱,۴,۶\})=۳x+۳x+۳x=\frac{۹}{۱۶}$$

۲۸ - گزینه ۳

نکته: مجموع اعداد طبیعی فرد برابر است با: $۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=n^۲$

با فرض این‌که دارت حتماً به یکی از نواحی برخورد می‌کند، احتمال اصابت دارت به نواحی اول، دوم، سوم و ... به‌ترتیب x، $۳x$، $۵x$ و ... است. بنابراین داریم:

$$\text{ناحیهٔ دوم}: ۳x=\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow x=\frac{۱}{۳۶}$$

$$P(S)=۱\Rightarrow \frac{۱}{۳۶}+\frac{۳}{۳۶}+\frac{۵}{۳۶}+\cdots+\frac{۲n-۱}{۳۶}=۱\Rightarrow \frac{۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)}{۳۶}=۱$$

$$\Rightarrow \frac{n^۲}{۳۶}=۱\Rightarrow n=۶$$

۲۹ - گزینه ۱

$$S=\{a,b,c,d,e\}\xrightarrow{P(S)=۱}P(a)+P(b)+P(c)+P(d)+P(e)=۱$$

$$\begin{array}{lll}A=\{a,b\} & \Rightarrow & P(A)=P(a)+P(b)=\frac{۱}{۲}\\ B=\{b,c\} & \Rightarrow & P(B)=P(b)+P(c)=\frac{۱}{۴}\\ C=\{b,d,e\} & \Rightarrow & P(C)=P(b)+P(d)+P(e)=\frac{۱}{۳}\\ \hline & \overset{+}{\Rightarrow} & (P(a)+P(b))+(P(b)+P(c))+(P(b)+P(d)+P(e))=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳}=\frac{۱۳}{۱۲}\end{array}$$

$$\Rightarrow \underbrace{P(a)+P(b)+P(c)+P(d)+P(e)}_{P(S)=۱}+۲P(b)=\frac{۱۳}{۱۲}\Rightarrow ۲P(b)=\frac{۱۳}{۱۲}-۱=\frac{۱}{۱۲}$$

$$\Rightarrow P(b)=\frac{۱}{۲۴}$$

$$P(\{a,b,c\})=P(A)+P(B)-P(b)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲۴}=\frac{۱۷}{۲۴}$$

۳۰ - گزینه ۱

$$S=\{۱,۲,۳,۴\}\Rightarrow P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)=۱\quad(\star)$$

$$\text{طبق فرض}:\left\{\begin{array}{l}P(۱)=\frac{k}{۱^۲}\\P(۲)=\frac{k}{۲^۲}\\P(۳)=\frac{k}{۳^۲}\\P(۴)=\frac{k}{۴^۲}\end{array}\right\}\xrightarrow{\star}\frac{k}{۱}+\frac{k}{۴}+\frac{k}{۹}+\frac{k}{۱۶}=۱\Rightarrow\frac{(۱۴۴+۳۶+۱۶+۹)k}{۱۴۴}=۱\Rightarrow k=\frac{۱۴۴}{۲۰۵}$$

$$P(\{\text{زوج}\})=P(\{۲,۴\})=P(۲)+P(۴)=\frac{k}{۴}+\frac{k}{۱۶}=\frac{۵k}{۱۶}=\frac{۵}{۱۶}\times\frac{۱۴۴}{۲۰۵}=\frac{۴۵}{۲۰۵}=\frac{۹}{۴۱}$$

۳۱ - گزینه ۱ فرض می‌کنیم قدرنسبت مورد نظر d و $P(a)=x$ می‌باشد.

$$S=\{a,b,c,d\} \xrightarrow{P(S)=۱} P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=۱ \Rightarrow x+(x+d)+(x+۲d)+(x+۳d)=۱$$

$$\Rightarrow ۴x+۶d=۱ \Rightarrow ۲x+۳d=\frac{۱}{۲} \quad (۱)$$

از طرفی $P(\{c,d\})=\frac{۵}{۷}$ می‌باشد پس:

$$P(c)+P(d)=\frac{۵}{۷} \Rightarrow x+۲d+x+۳d=\frac{۵}{۷} \Rightarrow ۲x+۵d=\frac{۵}{۷} \quad (۲)$$

$$(۱),(۲):\begin{cases} ۲x+۳d=\frac{۱}{۲} \\ ۲x+۵d=\frac{۵}{۷} \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} d=\frac{۳}{۲۸} \\ x=\frac{۵}{۵۶} \end{cases} \Rightarrow P(a)=x=\frac{۵}{۵۶}$$

۳۲ - گزینه ۱

$$S=\{a,b,c,d,e\} \Rightarrow P(S)=۱ \Rightarrow P(a)+P(b)+P(c)+P(d)+P(e)=۱ \quad (۱)$$

$$P(A)+P(B)+P(C)=\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۵}+\frac{۳}{۵}=\frac{۴}{۳}$$

$$\overbrace{P(a)+P(b)}^{P(A)}+\overbrace{P(a)+P(c)}^{P(B)}+\overbrace{P(a)+P(d)+P(e)}^{P(A)}=\frac{۴}{۳} \Rightarrow ۳P(a)+P(b)+P(c)+P(d)+P(e)=\frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow \underbrace{P(a)+P(b)+P(c)+P(d)+P(e)}_{۱}+۲P(a)=\frac{۴}{۳} \Rightarrow ۲P(a)=\frac{۴}{۳}-۱ \Rightarrow P(a)=\frac{۱}{۶}$$

$$P(\{d,e\})=P(\{a,d,e\})-P(a)=\frac{۳}{۵}-\frac{۱}{۶}=\frac{۱۳}{۳۰} \Rightarrow P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=P(\{d,e\})=\frac{۱۳}{۳۰}$$

۳۳ - گزینه ۱ مجموع احتمال تمام پیشامدها باید برابر یک باشد. با فرض $a_۱=\frac{۱}{۱۲}$ و $d=\frac{۱}{۳۰}$ برای مجموع جملات این دنبالهٔ حسابی داریم:

$$S_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]=\frac{n}{۲}[۲\frac{۱}{۲}+(n-۱)\frac{۱}{۳۰}]=۱ \Rightarrow \frac{n}{۲}[\frac{۱}{۶}+(\frac{n}{۳۰}-\frac{۱}{۳۰})]=۱$$

$$\Rightarrow \frac{n}{۲}(\frac{۴}{۳۰}+\frac{n}{۳۰})=۱ \Rightarrow \frac{n}{۲}(\frac{۴+n}{۳۰})=۱$$

$$\Rightarrow n(۴+n)=۶۰ \xrightarrow{n>۰} n=۶$$

تعداد اعضای فضای نمونه برابر ۶ و تعداد زیرمجموعه‌های تعریف شده روی این فضای نمونه برابر $۲^۶=۶۴$ است. از طرفی هر زیرمجموعه از فضای نمونه معادل یک پیشامد است، پس ۶۴ پیشامد روی این فضای نمونه قابل تعریف است.

۳۴ - گزینه ۴ فرض می‌کنیم احتمال رو شدن هریک از ارقام ۱ تا ۵ برابر x باشد طبق فرض سؤال داریم:

$$P(۶)=\frac{۱}{۳}(P(۶))'=\frac{۱}{۳}(۱-P(۶)) \quad (۱)$$

از طرفی می‌دانیم $P(۱)+P(۲)+\cdots+P(۶)=۱$ پس $P(۱)+P(۲)+P(۳)+\cdots+P(۵)=۱-P(۶)$

بنابراین با توجه به رابطهٔ (۱) داریم:

$$P(۶)=\frac{۱}{۳}(P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵))$$

$$\Rightarrow P(۶)=\frac{۱}{۳}(x+x+x+x+x) \Rightarrow P(۶)=\frac{۵x}{۳}$$

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \Rightarrow P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱$$

$$\Rightarrow x+x+x+x+x+\frac{۵x}{۳}=۱ \Rightarrow ۵x+\frac{۵x}{۳}=۱ \Rightarrow \frac{۲۰x}{۳}=۱ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲۰}$$

$$P(\text{زوج بودن})=P(\{۲,۴,۶\})=P(۲)+P(۴)+P(۶)=x+x+\frac{۵x}{۳}=۲x+\frac{۵x}{۳}=\frac{۱۱x}{۳}=۱۱\times\frac{\frac{۳}{۲۰}}{۳}=\frac{۱۱}{۲۰}$$

۳۵ ـ گزینه ۴ طبق فرض مسئله داریم:

$$\left.\begin{array}{l}P(۱)=k\\ P(۲)=۲k\\ \vdots\\ P(۶)=۶k\end{array}\right\}\xrightarrow{S=\{۱,۲,\cdots,۶\}}P(S)=۱\Rightarrow P(۱)+P(۲)+\cdots+P(۶)=۱\Rightarrow k+۲k+\cdots+۶k=۱۰\Rightarrow ۲۱k=۱\Rightarrow k=\frac{۱}{۲۱}$$

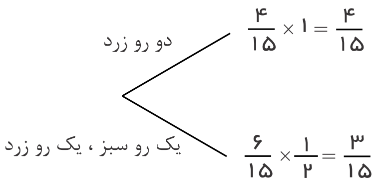
وجه موردنظر را x می‌نامیم؛ طبق فرض:

$$P(x)=\frac{۴۰}{۱۰۰}P(\bar{x})\Rightarrow P(x)=\frac{۴۰}{۱۰۰}(۱-P(x))\Rightarrow\frac{۱۴۰}{۱۰۰}P(x)=\frac{۴۰}{۱۰۰}\Rightarrow P(x)=\frac{۴}{۱۴}=\frac{۲}{۷}$$

از آنجا که $P(۶)=۶k$ با فرض $k=\frac{۱}{۲۱}$ احتمال وقوع وجه ۶ برابر $\frac{۲}{۷}$ می‌باشد.

۳۶ ـ گزینه ۳

احتمال زرد بودن روی مشاهده شده برابر است با:



$$\Rightarrow\frac{۴}{۱۵}+\frac{۳}{۱۵}=\frac{۷}{۱۵}$$

احتمال سبز بودن روی مشاهده شده، متمم زرد بودن، یعنی برابر $\frac{۸}{۱۵}$ است، پس نسبت مورد نظر برابر است با:

$$\frac{\frac{۷}{۱۵}}{\frac{۸}{۱۵}}=\frac{۷}{۸}$$

روش دوم: اگر هر وجه کارت را یک عضو فضای نمونه‌ای در نظر بگیریم در نتیجه فضای نمونه‌ای ۱۵ کارت دارای ۳۰ عضو است که در میان آن‌ها $۱۴=۶+۲\times۴$ حالت شانس ظاهر شدن کارت زرد و $۱۶=۶+۲\times۵$ حالت شانس رو آمدن سبز است. پس:

$$\frac{P(\text{ زرد })}{P(\text{ سبز })}=\frac{\frac{۱۴}{۳۰}}{\frac{۱۶}{۳۰}}=\frac{۱۴}{۱۶}=\frac{۷}{۸}$$

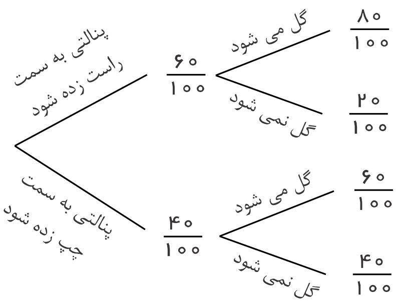
۳۷ ـ گزینه ۴ روش اول:

A: پیشامد گُل شدن پنالتی

B: پیشامد زدن پنالتی به سمت راست دروازه

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')}$$
$$\Rightarrow P(B|A)=\frac{۰/۶\times۰/۸}{۰/۶\times۰/۸+۰/۴\times۰/۶}=\frac{۰/۴۸}{۰/۴۸+۰/۲۴}=\frac{۲}{۳}$$

روش دوم: به کمک نمودار درختی:



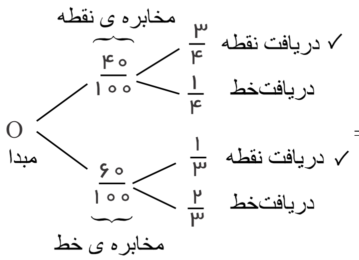
$$P(\text{ توپ به سمت راست زده باشد }\mid\text{ توپ گل شده باشد })=\frac{\frac{۶۰}{۱۰۰}\times\frac{۸۰}{۱۰۰}}{\frac{۶۰}{۱۰۰}\times\frac{۸۰}{۱۰۰}+\frac{۴۰}{۱۰۰}\times\frac{۶۰}{۱۰۰}}=\frac{۲}{۳}$$

۳۸ ـ گزینه ۲ اثبات درستی گزینهٔ ۲:

$$P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=۱-\underbrace{\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}_{P(A|B)}=۱-P(A|B)$$

۳۹ - گزینه ۲ با استفاده از قاعدهٔ بیز احتمال شرطی سوال را ساده می‌کنیم:

$$P(\text{مخابرهٔ نقطه}\mid\text{دریافت نقطه}) = \frac{P(\text{دریافت نقطه}\cap\text{مخابره نقطه})\times P(\text{مخابره نقطه})}{P(\text{دریافت نقطه})}$$



$$\Rightarrow P(\text{مخابرهٔ نقطه}\mid\text{دریافت نقطه}) = \frac{\frac{۳}{۴}\times\frac{۴۰}{۱۰۰}}{\frac{۴۰}{۱۰۰}\times\frac{۳}{۴}+\frac{۶۰}{۱۰۰}\times\frac{۱}{۳}} = \frac{۳}{۵}$$

۴۰ - گزینه ۲ اگر پیشامد A، دادن پاسخ صحیح به سوال و پیشامدهای $B_۱$ و $B_۲$ به‌ترتیب بلد بودن و بلد نبودن مطلب درسی مرتبط باشد، آنگاه داریم:

$$P(A) = P(B_۱)P(A|B_۱) + P(B_۲)P(A|B_۲)$$

$$P(A) = \frac{۸۰}{۱۰۰}\times ۱ + \frac{۲۰}{۱۰۰}\times\frac{۱}{۵} = \frac{۸۰}{۱۰۰} + \frac{۴}{۱۰۰} = \frac{۸۴}{۱۰۰}$$

$$P(B_۱|A) = \frac{P(B_۱)P(A|B_۱)}{P(A)} = \frac{\frac{۸۰}{۱۰۰}\times ۱}{\frac{۸۴}{۱۰۰}}$$

$$P(B_۱|A) = \frac{۸۰}{۸۴} = \frac{۲۰}{۲۱}$$

تذکر: از آنجا که در صورت بلد نبودن مطلب درسی، فرد گزینه را به طور تصادفی انتخاب می‌کند و تست‌ها ۵ گزینه‌ای هستند، پس:

$$P(A|B_۲) = \frac{۱}{۵}$$

۴۱ - گزینه ۲ اگر سکهٔ اول رو آمده باشد، دو سکه پرتاب می‌کنیم که احتمال رو آمدن هر دو سکه برابر $\frac{۱}{۸} = \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}$ است. بنابراین اگر پیشامدهای رو آمدن و پشت آمدن سکهٔ اول را به‌ترتیب با $B_۱$ و $B_۲$ و پیشامد رو آمدن سه سکه را با A نمایش دهیم، داریم:

$$P(A) = P(B_۱)P(A|B_۱) + P(B_۲)P(A|B_۲) = \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۸} = \frac{۳}{۱۶}$$

$$P(B_۱|A) = \frac{P(B_۱)P(A|B_۱)}{P(A)} = \frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴}}{\frac{۳}{۱۶}} = \frac{۲}{۳}$$

۴۲ - گزینه ۴

نکته: اگر B پیشامدی غیرتهی باشد ۶ احتمال وقوع A به شرط آن‌که B اتفاق افتاده باشد از دستور $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ حاصل می‌شود.

تذکر: در احتمالات شرطی فضای نمونه‌ای محدود به پیشامد، شرط مسأله می‌باشد.

با توجه به شرط سوال، داریم:

$$B: \frac{۸}{} \times \underset{\text{زوج}}{\frac{۴}{}} \times \frac{۷}{} \Rightarrow n(B) = ۲۲۴$$

اکنون با توجه به شرط، حالت‌هایی را انتخاب می‌کنیم که عدد فرد باشد:

$$A\cap B: \frac{۷}{} \times \underset{\text{زوج}}{\frac{۴}{}} \times \underset{\text{فرد}}{\frac{۵}{}} \Rightarrow n(A\cap B) = ۱۴۰$$

در نتیجه:

$$P(A|B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} = \frac{۱۴۰}{۲۲۴} = \frac{۵}{۸}$$

۴۳ - گزینه ۳ نکته: اگر B پیشامدی غیرتهی باشد، احتمال وقوع A به شرط آن‌که B اتفاق افتاده باشد از دستور $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ حاصل می‌شود.

تذکر: در احتمالات شرطی فضای نمونه‌ای محدود به پیشامد، شرط مسأله می‌باشد.

اگر شرط مسئله را با B نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$B = \left\{\begin{matrix} \underline{(۲,۵)}, (۲,۶), \underline{(۳,۴)}, (۳,۵), \underline{(۳,۶)}, \underline{(۴,۳)}, (۴,۴), \underline{(۴,۵)}, (۴,۶) \\ \underline{(۵,۲)}, (۵,۳), \underline{(۵,۴)}, (۵,۵), (۵,۶), (۶,۲), \underline{(۶,۳)}, (۶,۴), (۶,۵), (۶,۶) \end{matrix}\right\}$$

از مجموعهٔ B، زوج‌هایی را انتخاب می‌کنیم که جمع آن‌ها فرد (یکی زوج و یکی فرد) و یک رقمی باشد که زیر آن‌ها خط کشیده‌ایم. در نتیجه:

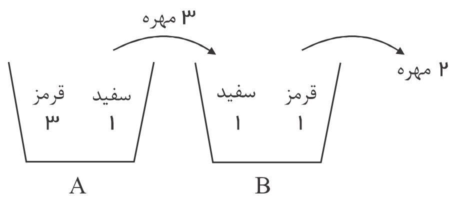
$P(A|B)=\frac{۸}{۱۹}$

۴۴ ـ گزینه ۲

برای انتخاب ۳ مهره از جعبهٔ A دوحالت داریم:

۱) هرسه مهره قرمز باشد.

۲) ۲ مهره قرمز و ۱ مهره سفید باشد.



$P\left(\begin{array}{c}\text{دو مهره خارج شده از}\\ B\ \text{قرمز باشد.}\end{array}\right)$

$=P\left(\begin{array}{c}\text{هر ۳ مهره خارج شده از } A \text{ قرمز و بعد ۲}\\ \text{مهره خارج شده از } B \text{ نیز قرمز باشد.}\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}\text{از } A\text{، ۲ مهره قرمز و ۱ مهره سفید در}\\ B \text{ می‌ریزیم سپس دو مهره خارج‌شده از } B \text{ قرمز باشد.}\end{array}\right)$

$=\frac{\binom{۳}{۳}}{\binom{۴}{۳}}\times\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۵}{۲}}+\frac{\binom{۳}{۲}\binom{۱}{۱}}{\binom{۴}{۳}}\times\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۵}{۲}}=\frac{۶}{۴۰}+\frac{۹}{۴۰}=\frac{۳}{۸}$

۴۵ ـ گزینه ۳ فضای نمونه‌ای همه حالاتی است که جمع اعداد رو شده ۳ تاس برابر ۷ باشد:

$S=\{\underbrace{(۱,۲,۴)}_{\text{۳!=۶ حالت}},\underbrace{(۱,۳,۳)}_{\frac{۳!}{۲!}=\text{۳ حالت}},\underbrace{(۱,۱,۵)}_{\frac{۳!}{۲!}=\text{۳ حالت}},\underbrace{(۲,۲,۳)}_{\frac{۳!}{۲!}=\text{۳ حالت}}\}$

در میان این ۱۵ حالت فقط در ۶ حالت هر ۳ عدد رو شده فرد هستند، پس احتمال مطلوب $\frac{۶}{۱۵}=\frac{۲}{۵}$ است.

۴۶ ـ گزینه ۲

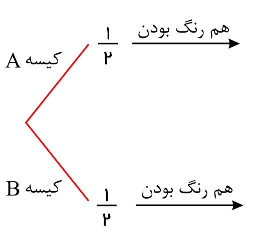
پیشامد این‌که بازیکن اول بلندقدترین بازیکن تیم باشد. $=B$ و پیشامد این‌که بازیکن اول بلندقدتر از بازیکن دوم باشد. $=A$

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{\frac{۱}{۸}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۴}$

تذکر ۱: $P(A)$ یعنی احتمال این‌که بازیکن اول بلندتر از بازیکن دوم باشد برابر $\frac{۱}{۲}$ است زیرا شانس بلندقدتر بودن برای هر دو نفر یکسان است پس $P(A)=\frac{۱}{۲}$ است.

تذکر ۲: واضح است که پیشامد B زیرمجموعهٔ A می‌باشد بنابراین $A\cap B=B$ و $P(A\cap B)=P(B)$ است ازطرفی $P(B)$ یعنی احتمال آن‌که بازیکن اول بلندقدترین بازیکن تیم باشد عدد $\frac{۱}{۸}$ است.

۴۷ ـ گزینه ۴



$\frac{\binom{۳}{۲}+\binom{۵}{۲}}{\binom{۸}{۲}}=\frac{۱۳}{۲۸}$

$\frac{\overbrace{\binom{۶}{۲}}^{\text{هر دو سفید}}}{\binom{۷}{۲}}=\frac{۱۵}{۲۱}=\frac{۵}{۷}$

حال طبق قانون احتمال کل، احتمال هم‌رنگ بودن دو مهرهٔ انتخاب‌شده برابر است با:

$\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۳}{۲۸}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۷}=\frac{۳۳}{۵۶}$

۴۸ ـ گزینه ۱ ابتدا احتمال قرمز بودن مهرهٔ انتخابی را محاسبه می‌کنیم:

A: پیشامد انتخاب سبد اول ، B: پیشامد انتخاب سبد دوم ، R: پیشامد انتخاب مهرهٔ قرمز

$P(R)=P(A\cap B)+P(B\cap R)=P(A)\times P(R|A)+P(B)\times P(R|B)$

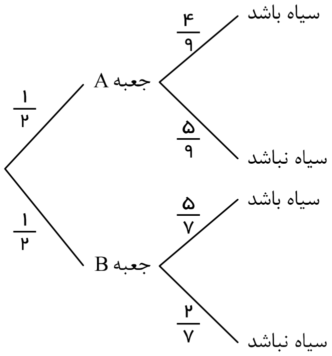
$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۹}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۷}{۱۲}=\frac{۴۱}{۷۲}$

حال طبق قاعدهٔ بیز احتمال این‌که مهرهٔ قرمز انتخابی متعلق به کیسهٔ A بوده باشد را حساب می‌کنیم:

$$P(A|R)=\frac{P(A\cap R)}{P(R)}=\frac{P(A)\times P(R|A)}{P(R)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{9}}{\frac{41}{72}}=\frac{\frac{5}{18}}{\frac{41}{72}}=\frac{20}{41}$$

۴۹ ـ گزینه ۱

به‌کمک نمودار درختی مسئله را حل می‌کنیم.

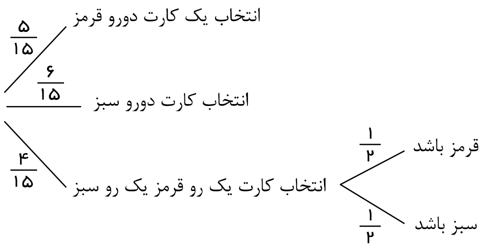


اگر پیشامد سیاه نبودن گوی خارج‌شده را A بنامیم:

$$P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{7}=\frac{35+18}{126}=\frac{53}{126}$$

۵۰ ـ گزینه ۴

به‌کمک نمودار درختی مسئله را حل می‌کنیم.

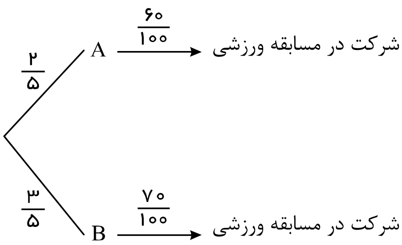


$$P\left(\text{مطلوب}\right)=\frac{5}{15}\times 0+\frac{6}{15}\times 1+\frac{4}{15}\times\frac{1}{2}=\frac{8}{15}$$

۵۱ ـ گزینه ۱

$$\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{2}{3}\to P(A)=\frac{2}{3}P(B)\xrightarrow{P(A)+P(B)=1}\begin{cases}P(A)=\frac{2}{5}\\ P(B)=\frac{3}{5}\end{cases}$$

حال به‌کمک نمودار درختی داریم:



$$P\left(C=\text{شرکت در مسابقهٔ ورزشی}\right)=\frac{2}{5}\times\frac{60}{100}+\frac{3}{5}\times\frac{70}{100}=\frac{33}{50}$$

$$P\left(\text{مطلوب}\right)=P(A|C)=\frac{P(C\cap A)}{P(C)}=\frac{\frac{2}{5}\times\frac{60}{100}}{\frac{33}{50}}=\frac{4}{11}$$

۵۲ ـ گزینه ۱ اگر پیشامد A داشتن فقط یک برادر کوچک‌تر و پیشامدهای B_1، B_2، B_3 و B_4 به‌ترتیب انتخاب فرزندان اول، دوم، سوم و چهارم باشند، آن‌گاه پیشامدهای $(A|B_1)$، $(A|B_2)$ و $(A|B_3)$ به‌ترتیب به‌صورت «فقط یکی از فرزندان دوم تا چهارم پسر باشند»، «فقط یکی از فرزندان سوم و چهارم پسر باشند» و «فرزند چهارم پسر باشد» تعریف می‌شوند. همچنین پیشامدهای A و B_4 ناسازگارند، پس پیشامد $(A|B_4)$ تهی است. درنتیجه داریم:

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)+P(B_4)P(A|B_4)$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{\binom{3}{1}}{2^3}+\frac{1}{4}\times\frac{\binom{2}{1}}{2^2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times 0=\frac{1}{4}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+0=\frac{3}{32}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$$

$$=\frac{3}{32}+\frac{4}{32}+\frac{4}{32}=\frac{11}{32}$$

۵۳ - گزینه ۲ بررسی گزینه‌ها:

$$1)\ \frac{P(A|B)}{P(B|A)}\overset{?}{=}\frac{P(A)}{P(B)}\Rightarrow\frac{\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}{\frac{P(B\cap A)}{P(A)}}=\frac{P(A)}{P(B)}\quad\checkmark$$

$$2)\ \frac{P(A\cap B)}{P(A|B)}=\frac{P(A\cap B)}{\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}=P(B)\quad\times$$

$$3)\ P(A|A)=\frac{P(A\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1\quad\checkmark$$

$$4)\ P(A|S)=\frac{P(A\cap S)}{P(S)}=\frac{P(A)}{1}=P(A)\quad\checkmark$$

۵۴ - گزینه ۳ فرض کنید روی x وجه تاس، عدد X و روی y وجه آن، عدد Y نوشته شده باشد. داریم:

$$x+y=6\Rightarrow y=6-x$$

۱) احتمال انتخاب مهرهٔ سفید: $\frac{x}{6}\times\frac{5}{8}+\frac{6-x}{6}\times\frac{2}{8}$

۲) احتمال انتخاب مهرهٔ سیاه: $\frac{x}{6}\times\frac{3}{8}+\frac{6-x}{6}\times\frac{6}{8}$

$$\Rightarrow\frac{5x+12-2x}{48}=\frac{3x+36-6x}{48}\Rightarrow 3x+12=-3x+36\Rightarrow 6x=24\Rightarrow x=4$$

۵۵ - گزینه ۴

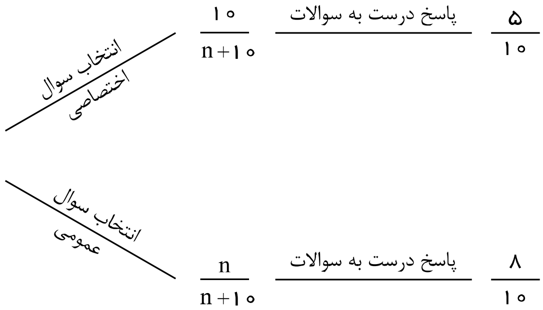
طبق فرض:

$$P(1)=1^2\times k$$
$$P(2)=2^2\times k$$
$$P(3)=3^2\times k$$
$$\vdots$$
$$P(6)=6^2\times k$$

اگر A و B به ترتیب پیشامدهای رو شدن عدد ۴ و رو شدن عدد زوج باشند آنگاه داریم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(4)}{P(2)+P(4)+P(6)}=\frac{4^2\times k}{2^2\times k+4^2\times k+6^2\times k}=\frac{16}{56}=\frac{2}{7}$$

۵۶ - گزینه ۱ با توجه به آنکه از $n+10$ سؤال طراحی‌شده ۱۰ سؤال اختصاصی و n سؤال عمومی است به کمک نمودار درختی داریم:

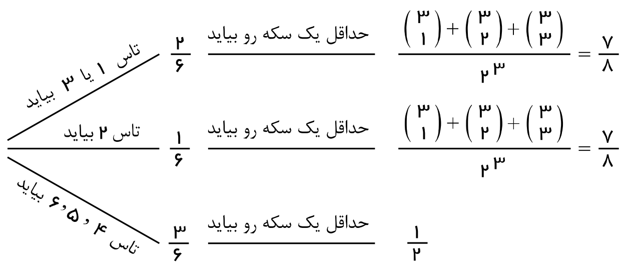


$$P\left(\text{پاسخ‌گویی درست به کل سؤالات}\right)=\frac{10}{n+10}\times\frac{5}{10}+\frac{n}{n+10}\times\frac{8}{10}\overset{\text{طبق فرض}}{=\!=\!=}\frac{68}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{n+۱۰}+\frac{۴n}{۵(n+۱۰)}=\frac{۶۸}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{۲۵+۴n}{۵(n+۱۰)}=\frac{۶۸}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{۲۵+۴n}{n+۱۰}=\frac{۱۷}{۵}$$

$$\Rightarrow ۱۲۵+۲۰n=۱۷n+۱۷۰\Rightarrow ۳n=۴۵\Rightarrow n=۱۵$$

۵۷ - گزینه ۱ ابتدا نمودار درختی آزمایش تصادفی را رسم می‌کنیم.



ابتدا احتمال آمدن حداقل یک سکه رو را تعیین می‌کنیم.

$$P(\text{حداقل یک بار رو بیاید})=\frac{۲}{۶}\times\frac{۷}{۸}+\frac{۱}{۶}\times\frac{۷}{۸}+\frac{۳}{۶}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۷}{۲۴}+\frac{۷}{۴۸}+\frac{۱}{۴}=\frac{۱۴+۷+۱۲}{۴۸}=\frac{۳۳}{۴۸}$$

طبق قاعده بیز، حال احتمال آنکه نتیجه پرتاب تاس عدد ۲ بوده باشد را می‌یابیم:

$$P(\text{حداقل یک سکه رو} \mid \text{عدد تاس ۲ بیاید})=\frac{\frac{۱}{۶}\times\frac{۷}{۸}}{\frac{۳۳}{۴۸}}=\frac{۷}{۳۳}$$

۵۸ - گزینه ۱ احتمال آنکه مهرهٔ خارج شده از جعبه سفید باشد، $\frac{۶}{۱۶}$ است. حال اگر مهرهٔ خارج شده از جعبه سفید باشد، این مهره را به همراه دو مهرهٔ سیاه به جعبه برمی‌گردانیم. در این صورت جعبه شامل ۶ مهرهٔ سفید و ۱۲ مهرهٔ سیاه است که در نتیجه این‌بار احتمال خارج کردن یک مهرهٔ سفید از جعبه برابر $\frac{۶}{۱۸}$ خواهد بود. طبق قانون ضرب احتمال، احتمال آنکه هر دو مهرهٔ خارج شده از جعبهٔ سفید باشد، برابر است با:

$$\frac{۶}{۱۶}\times\frac{۶}{۱۸}=\frac{۳}{۸}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۸}$$

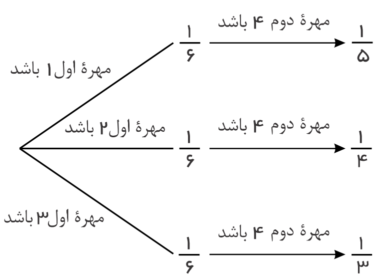
۵۹ - گزینه ۲

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(A\cap B)=P(A|B)P(B)\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۸\times ۰/۶=۰/۴۸$$

$$P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)=۰/۶-۰/۴۸=۰/۱۲$$

$$P(A|B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{۰/۱۲}{۱-۰/۶}=۰/۳$$

۶۰ - گزینه ۲ تنها در صورتی شمارهٔ دومین مهرهٔ خارج شده می‌تواند ۴ باشد که شمارهٔ اولین مهرهٔ خارج شده، ۱، ۲ یا ۳ باشد، اگر A پیشامد ۴ بودن دومین مهره و $B_۱$ و $B_۲$ و $B_۳$ به‌ترتیب پیشامد شمارهٔ ۱، ۲ و ۳ بودن اولین مهره باشند، آنگاه طبق نمودار درختی داریم:



$$P(A)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۶}\left(\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳}\right)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۴۷}{۶۰}$$

$$P(B_۲|A)=\frac{\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۶}\times\frac{۴۷}{۶۰}}=\frac{۱۵}{۴۷}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۱۰ - ۱	۱۹ - ۱	۲۸ - ۳	۳۷ - ۴	۴۶ - ۲	۵۵ - ۴
۲ - ۲	۱۱ - ۳	۲۰ - ۴	۲۹ - ۱	۳۸ - ۲	۴۷ - ۴	۵۶ - ۱
۳ - ۴	۱۲ - ۱	۲۱ - ۴	۳۰ - ۱	۳۹ - ۲	۴۸ - ۱	۵۷ - ۱
۴ - ۴	۱۳ - ۴	۲۲ - ۱	۳۱ - ۱	۴۰ - ۲	۴۹ - ۱	۵۸ - ۱
۵ - ۲	۱۴ - ۱	۲۳ - ۲	۳۲ - ۱	۴۱ - ۲	۵۰ - ۴	۵۹ - ۲
۶ - ۱	۱۵ - ۳	۲۴ - ۲	۳۳ - ۱	۴۲ - ۴	۵۱ - ۱	۶۰ - ۲
۷ - ۲	۱۶ - ۲	۲۵ - ۱	۳۴ - ۴	۴۳ - ۳	۵۲ - ۱	
۸ - ۴	۱۷ - ۱	۲۶ - ۱	۳۵ - ۴	۴۴ - ۲	۵۳ - ۲	
۹ - ۴	۱۸ - ۴	۲۷ - ۱	۳۶ - ۳	۴۵ - ۳	۵۴ - ۳	