



۱- اگر $0 < a < 1$ باشد، مجموعه‌ی $(-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}) \cap (-\frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^2})$ کدام است؟

- ① $(-\frac{1}{a}, \frac{1}{a})$ ② $(-\frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^2})$ ③ $(-2, 2)$ ④ $(-\frac{1}{a^2}, \frac{1}{a})$

۲- $3n(A) = 2n(B) = 5n(A \cap B)$ باشد، حاصل $\frac{n(A) - n(A \cap B)}{n(A \cup B)}$ کدام است؟

- ① $\frac{19}{4}$ ② $\frac{4}{19}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$

۳- اگر A نامتناهی و B متناهی باشد، کدام مجموعه نامتناهی است؟ (U مجموعه‌ی مرجع است.)

- ① $B - A$ ② $A - B$ ③ $A \cap B$ ④ $U - B'$

۴- کدام گزینه درست نیست؟

- ① هر عدد طبیعی، یک عدد حسابی است. ② هر عدد صحیح، یک عدد گویا است.
③ عددی حسابی وجود دارد که عدد صحیح نیست. ④ عدد گنگی وجود ندارد که بتوان آن را به صورت نسبت دو عدد صحیح نوشت.

۵- A یک مجموعه‌ی متناهی است. اگر $A \subseteq B$ ، کدام گزینه درست است؟

- ① B یک مجموعه‌ی متناهی است. ② B یک مجموعه‌ی نامتناهی است.
③ B ممکن است یک مجموعه‌ی متناهی باشد. ④ $B - A$ یک مجموعه‌ی متناهی است.

۶- اگر $A = \{x \in U \mid x \geq 7\}$ ؛ مجموعه‌ی مرجع U کدام یک از گزینه‌های زیر باشد تا مجموعه‌ی A و A' هر دو نامتناهی باشند؟

- ① $U = W$ ② $U = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$
③ $U = [-6, 7]$ ④ $U = (-6, 7)$

۷- اگر A و B دو مجموعه باشند، حاصل $\frac{n(A \cap B)}{n(A) + n(B)}$ برابر کدام یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟ ($A, B \neq \emptyset$)

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$

۸- در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال هستند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان کلاس عضو هیچ‌کدام از تیم‌ها نباشند، چند نفر در این کلاس فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

- ① ۵ ② ۹ ③ ۶ ④ ۱۴

۹- اگر $U = \{1, 2, \dots, 20\}$ مجموعه‌ی مرجع، $n(A) = 8$ و $A \cup B = U$ و $(A \cap B) = \emptyset$ باشند، مقدار $n(B')$ کدام است؟

- ① ۸ ② ۱۲ ③ ۲۰ ④ صفر

۱۰- اگر بازه $[2n - 1, 3n + 14]$ شامل عدد ۵ باشد، حداقل مقداری که n می‌تواند اختیار کند، کدام است؟ ($n > -15$)

- ① ۳ ② -۲ ③ -۳ ④ ۲

۱۱- اگر $A = \{n \in X \mid 0 < n < 2\}$ یک مجموعه‌ی متناهی باشد، مجموعه‌ی x مجموعه‌ی می‌باشد.

- ① R ② Q ③ Z ④ Q'

۱۲- متمم مجموعه $(A - (A - B)) \cup (A \cap B)'$ کدام است؟

- ① A ② B' ③ $A' \cup B'$ ④ $\{\}$

۱۳- اگر $A = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$ باشند، حاصل $(A \cap B)'$ کدام است؟

- ① $\{0\}$ ② $(-\infty, 0)$ ③ $(-\infty, 0]$ ④ $[0, +\infty)$

۱۴- اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، مجموعه $(A \cap B) \cap ((A \cap B) \cap B')$ با کدام مجموعه برابر است؟

- ① $(A \cup A') \cup (B \cap B')$ ② $(A \cup A') \cup ((A \cap B) \cap B')$ ③ $(A \cup A') \cap ((A \cap B) \cap B')$ ④ $(B \cup B') \cup ((A \cap B) \cap B')$

۱۵- در یک کلاس ۳۵ نفری، ۲۰ نفر به موسیقی و ۱۷ نفر به نقاشی علاقه‌مند هستند. اگر ۳ نفر به هیچ‌کدام از این دو هنر علاقه نداشته باشند، کدام گزینه صحیح نیست؟

- ① ۵ نفر به هر دو رشته علاقه‌مند هستند. ② ۱۵ نفر به نقاشی علاقه‌مند نیستند.
 ③ ۱۲ نفر فقط به نقاشی علاقه‌مند هستند. ④ ۲۷ نفر فقط به یکی از دو رشته نقاشی و موسیقی علاقه‌مند هستند.

۱۶- اگر $A = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} | x < -1\}$ باشند، اشتراک مجموعه A یا B با $C = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1\}$ چند عضو صحیح دارد؟

- ① صفر ② ۱ ③ ۲ ④ بی‌شمار

۱۷- اگر U مجموعه مرجع باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر با $(B \cup \emptyset) \cup (B \cup U)'$ برابر است؟

- ① U ② B' ③ B ④ \emptyset

۱۸- اگر A و B دو مجموعه ناتهی از مجموعه مرجع U باشند، به طوری که $n(U) = 65$ ، $n(A') = 25$ ، $n(A \cap B) = 20$ ، $n(A' \cap B) = 10$ تعداد اعضای مجموعه $A \cup B$ کدام است؟

- ① ۴۵ ② ۵۰ ③ ۵۵ ④ ۶۰

۱۹- اگر بازه A_n به صورت $A_n = \left(\frac{n-1}{n}, \frac{n+1}{n}\right)$ تعریف می‌شود، حاصل $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ کدام است؟

- ① $(0, 1)$ ② $(1, 2)$ ③ $\left(\frac{9}{10}, \frac{11}{10}\right)$ ④ $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

۲۰- چه تعداد تا از مجموعه‌های زیر متناهی هستند؟

$A = \mathbb{Z} \cap \mathbb{W}$, $B = \mathbb{Q} \cap (0, 1]$, $C = \mathbb{R} \cap (0, 1)$, $D = \mathbb{Z} \cap (-\infty, 2)$, $E = \mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}$, $F = \mathbb{N} \cap (-\infty, 50)$

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱

می‌دانیم: اگر طرفین یک نامساوی هم‌علامت باشند، با معکوس کردن طرفین، جهت نامساوی عوض می‌شود.

می‌دانیم: اعداد بازه‌ی $(0, 1)$ هر چه به توان بیشتری می‌رسند، کوچکتر می‌شوند.

$$0 < a < 1 \Rightarrow a^r < a \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{a^r} > \frac{1}{a} \xrightarrow{\times(-1)} -\frac{1}{a^r} < -\frac{1}{a}$$

حال هر دو بازه‌ی $(-\frac{1}{a^p}, \frac{1}{a^p})$ و $(-\frac{1}{a}, \frac{1}{a})$ را روی محور نمایش می‌دهیم:

پس اشتراک این دو بازه برابر است با: $(-\frac{1}{a}, \frac{1}{a})$

۲ - گزینه ۲ می‌دانیم: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$$3n(A) = 2n(B) = 5n(A \cap B) \Rightarrow \begin{cases} n(A) = \frac{5}{3}n(A \cap B) \\ n(B) = \frac{5}{2}n(A \cap B) \end{cases}$$

$$\frac{n(A) - n(A \cap B)}{n(A) + n(B) - n(A \cap B)} = \frac{\frac{5}{3}n(A \cap B) - n(A \cap B)}{\frac{5}{3}n(A \cap B) + \frac{5}{2}n(A \cap B) - n(A \cap B)}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}n(A \cap B)}{\frac{19}{6}n(A \cap B)} = \frac{4}{19}$$

متمم یک مجموعه‌ی منتهای، حتماً نامتناهی است.

تفاضل یک مجموعه‌ی منتهای از یک مجموعه‌ی نامتناهی حتماً نامتناهی است.
تفاضل یک مجموعه‌ی نامتناهی از یک مجموعه‌ی منتهای حتماً منتهای است.
اشتراک یک مجموعه‌ی منتهای با هر مجموعه‌ای حتماً منتهای است.

۳ - گزینه ۲ می‌دانیم:

- متناهی = نامتناهی - منتهای $B - A =$ (گزینه ۱)
نامتناهی = منتهای - نامتناهی $A - B =$ (گزینه ۲)
متناهی = منتهای \cap نامتناهی $A \cap B =$ (گزینه ۳)
متناهی $U - B' = B' =$ متمم $B =$ (گزینه ۴)

۴ - گزینه ۳ می‌دانیم: اگر \mathbb{N} مجموعه‌ی اعداد طبیعی، \mathbb{W} مجموعه‌ی اعداد حسابی، \mathbb{Z} مجموعه‌ی اعداد صحیح، Q مجموعه‌ی اعداد گویا و \mathbb{R} مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشند، داریم: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq Q \subseteq \mathbb{R}$

با معلومات فوق، گزینه ۳ نادرست است چون همه‌ی اعداد حسابی، صحیح نیز هستند.

۵ - گزینه ۳ یک مجموعه‌ی منتهای می‌تواند زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی منتهای یا نامتناهی باشد، بنابراین B ممکن است منتهای یا نامتناهی باشد.

۶ - گزینه ۲ می‌دانیم: متمم مجموعه‌ی A ، مجموعه‌ی اعضای از مجموعه‌ی مرجع که در A نیستند.

تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

- ۱ - گزینه ۱: $U = \mathbb{W} \Rightarrow A = \{7, 8, 9, \dots\}$ و $A' = \{0, 1, 2, \dots, 6\} \Rightarrow$ متناهی و A نامتناهی است.
۲ - گزینه ۲: $U = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$ و $A = \{7, 9, 11, \dots\} \Rightarrow$ هر دو نامتناهی هستند.
۳ - گزینه ۳: $U = [-6, 7] \Rightarrow A = \{7\}$ و $A' = [-6, 7) \Rightarrow$ متناهی و A' نامتناهی است.
۴ - گزینه ۴: $U = (-6, 7) \Rightarrow A = \emptyset$ و $A' = (-6, 7) \Rightarrow$ متناهی و A' نامتناهی است.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

تعداد اعضای اشتراک دو مجموعه، همیشه از تعداد اجتماع آن‌ها کوچکتر یا حداکثر با آن مساوی است؛ یعنی:

$$n(A \cap B) \leq n(A \cup B)$$

۷ - گزینه ۱ می‌دانیم:



$$n(A \cap B) \leq n(A \cup B) \Rightarrow n(A \cap B) \leq n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

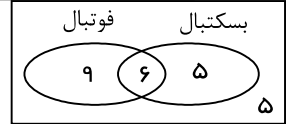
$$\Rightarrow 2n(A \cap B) \leq n(A) + n(B) \Rightarrow \frac{2n(A \cap B)}{n(A) + n(B)} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{n(A \cap B)}{n(A) + n(B)} \leq \frac{1}{2}$$

از میان گزینه‌ها فقط $\frac{1}{3}$ کوچک‌تر از $\frac{1}{2}$ است.

۸ - گزینه ۲

$$n(A \cup B) - n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad \text{می‌دانیم:}$$



$$n(F) = 15$$

$$n(B) = 11$$

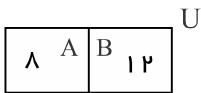
$$n(F \cup B) = 25 - 5 = 20 \quad \text{هیچکدام از رشته‌ها کل کلاس}$$

$$n(F \cup B) = n(F) + n(B) - n(F \cap B)$$

$$20 = 15 + 11 - n(F \cap B) \Rightarrow n(F \cap B) = 6 \quad \text{تعداد افرادی که در هر دو تیم هستند}$$

$$n(F) - n(F \cap B) = 15 - 6 = 9$$

تعداد افرادی که فقط فوتبال بازی می‌کنند



$$n(B') = n(A) = 8$$

۱۰ - گزینه ۳ از آنجاییکه بازه $[2n - 1, 3n + 14]$ شامل عدد ۵ می‌باشد بنابراین باید $\begin{cases} 2n - 1 < 5 \\ 5 \leq 3n + 14 \end{cases}$ باشد چرا که بازه بالا حداقل باید به صورت $\{5\}$ باشد تا شامل عدد ۵ شود.

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} 2n - 1 < 5 \Rightarrow 2n < 6 \Rightarrow n < 3 \\ 3n + 14 \geq 5 \Rightarrow 3n \geq -9 \Rightarrow n \geq -3 \end{cases} \Rightarrow -3 \leq n < 3$$

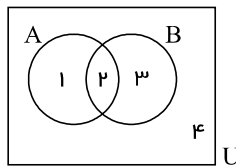
حداقل مقدار برابر با $n = -3$ است.

۱۱ - گزینه ۳ تنها حالتی که مجموعه A متناهی می‌شود گزینه ۳ است:

$$A = \{n \in \mathbb{Z} \mid 0 < n < 2\} \Rightarrow A = \{1\} \quad \text{متناهی}$$

۱۲ - گزینه ۴

با توجه به نمودار ون داریم:



$$\begin{aligned} (A - (A - B)) \cup (A \cap B)' &\rightarrow (1, 2 - (1, 2 - 2, 3)) \cup (1, 2 \cap 2, 3)' \\ &\rightarrow (1, 2 - 1) \cup (2)' \rightarrow (2) \cup (2) = 1, 2, 3, 4 \xrightarrow{\text{متتم}} \{ \} \end{aligned}$$

۱۳ - گزینه ۳

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = (0, +\infty) \Rightarrow A' = \mathbb{R} - (0, +\infty) = (-\infty, 0]$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} = (-\infty, 0)$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B = (-\infty, 0] \cup (-\infty, 0) = (-\infty, 0]$$

$$\begin{aligned} A \cap A' &= \emptyset \\ A \cup A' &= U \end{aligned}$$

۱۴ - گزینه ۳ می‌دانیم:

$$(A \cap A') \cap ((A \cap B) \cap B') = \emptyset \cap (A \cap B \cap B') = \emptyset \cap (A \cap \emptyset) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

بررسی گزینه‌ها:

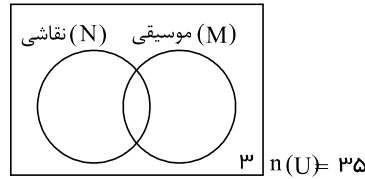
$$۱) (A \cup A') \cup (B \cap B') = U \cup \emptyset = U$$

$$۲) (A \cup A') \cup ((A \cap B) \cap B') = U \cup (A \cap B \cap B') = U \cup (A \cap \emptyset) = U \cup \emptyset = U$$

$$۳) (A \cup A') \cap ((A \cap B) \cap B') = U \cap (A \cap B \cap B') = U \cap (A \cap \emptyset) = U \cap \emptyset = \emptyset$$

$$۴) (B \cup B') \cup ((A \cap B) \cap B') = U \cup (A \cap B \cap B') = U \cup (A \cap \emptyset) = U \cup \emptyset = U$$

با توجه به نمودار ون داریم:



$$n(U) = 35, n(M) = 20, n(N) = 17$$

$$n(M \cup N) = 35 - 3 = 32$$

$$n(M \cup N) = n(M) + n(N) - n(M \cap N)$$

$$32 = 20 + 17 - n(M \cap N) \Rightarrow n(M \cap N) = 5$$

۵ نفر به هر دو رشته علاقه‌مند هستند.

$$n(N') = n(U) - n(N) = 35 - 17 = 18$$

۱۸ نفر به نقاشی علاقه‌مند نیستند.

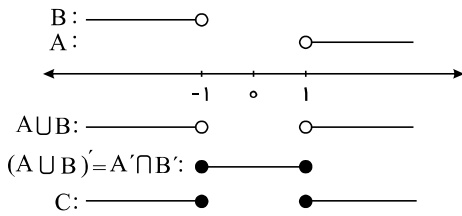
$$n(N - M) = n(N) - n(N \cap M) = 17 - 5 = 12$$

۱۲ نفر فقط به نقاشی علاقه‌مند هستند.

$$n(N - M) \cup n(M - N) = n(N) - n(N \cap M) + n(M) - n(M \cap N) = 12 + 15 = 27$$

۱۶ - گزینه ۳ می‌دانیم: $A' \cap B' = (A \cup B)'$

با رسم مجموعه‌ها روی محور اعداد داریم:



$$(A' \cap B') \cap C = \{-1, 1\} \rightarrow \text{۲ عضو صحیح}$$

می‌دانیم:

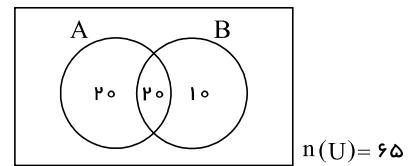
$$\begin{aligned} U' &= \emptyset \\ \emptyset' &= U \\ A' &= U - A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (B \cup U')' &\cup (B \cup \emptyset) \\ (B \cup \emptyset)' &\cup (B \cup U) \\ (B)' \cup (U)' & \\ B' \cup \emptyset &= B' \end{aligned}$$

می‌دانیم:

$$\begin{aligned} n(A') &= n(U) - n(A) \\ A \cap B' &= A - B \end{aligned}$$

با توجه به نمودار ون داریم:



$$n(A') = n(U) - n(A) \Rightarrow 25 = 65 - n(A) \Rightarrow n(A) = 40$$

$$n(A \cap B') = n(B - A) = 10$$

$$n(A \cup B) = 20 + 20 + 10 = 50$$

$$A_1 = (0, 2)$$

$$A_2 = (\frac{1}{2}, \frac{2}{2})$$

$$A_3 = (\frac{2}{3}, \frac{3}{3}) \Rightarrow A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{10} = (\frac{9}{10}, \frac{11}{10})$$

⋮

$$A_{10} = (\frac{9}{10}, \frac{11}{10})$$

$$F = \mathbb{N} \cap (-\infty, 50) = \{1, 2, \dots, 49\}$$

$$A = \mathbb{Z} \cap \mathbb{W} = \mathbb{W}, B = \mathbb{Q} \cap (0, 1] = \{x \in \mathbb{Q} | 0 < x \leq 1\}$$

$$C = \mathbb{R} \cap (0, 1) = (0, 1), D = \mathbb{Z} \cap (-\infty, 2) = \{\dots, -1, 0, 1\}, E = \mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$$

۲۰ - گزینه ۱ فقط F منتزاهی است. زیرا:

بقیه مجموعه‌ها نامتناهی هستند، زیرا:

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱

۴ - ۳

۷ - ۱

۱۰ - ۳

۱۳ - ۳

۱۶ - ۳

۱۹ - ۳

۲ - ۲

۵ - ۳

۸ - ۲

۱۱ - ۳

۱۴ - ۳

۱۷ - ۲

۲۰ - ۱

۳ - ۲

۶ - ۲

۹ - ۱

۱۲ - ۴

۱۵ - ۲

۱۸ - ۲