نام و نام خانوادگی: دبیر: آقای حدادی

نام آزمون: ریاضی ۱ بخش: مثلثات

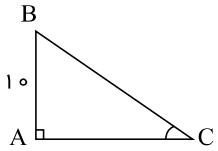
پایه: دهم

فاخران

۱ - شش ضلعی منتظمی در داخل دایره‌ای به شعاع ۳ محاط شده است. مساحت بین شش ضلعی و دایره‌ی محیطی کدام است؟ $(\pi = ۳)$

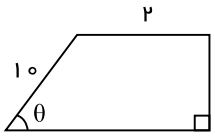
① $۲۷\left(\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}\right)$ ② $۲۷\left(\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}\right)$ ③ $۲۷\left(\frac{۳-\sqrt{۳}}{۲}\right)$ ④ $۲۷\left(\frac{\sqrt{۳}-۱}{۴}\right)$

۲ - مساحت مثلث ABC کدام است؟ $\left(\cos C = \frac{\sqrt{۴۶}}{۷}\right)$



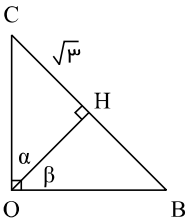
① $۱۰۰\sqrt{\frac{۴۶}{۳}}$ ② $۵۰\sqrt{\frac{۴۶}{۳}}$ ③ $۱۰۰\sqrt{\frac{۳}{۴۶}}$ ④ $۵۰\sqrt{\frac{۳}{۴۶}}$

۳ - اگر $\sin\theta = \frac{۳}{۵}$ باشد ،آنگاه مساحت ذوزنقه‌ی روبرو کدام است؟



① ۱۲ ② ۲۴ ③ ۳۶ ④ ۱۸

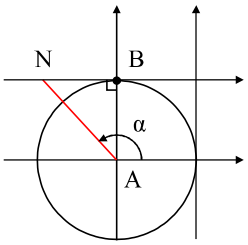
۴ - اگر $BC = ۳$ باشد، $(OC^۲)$ کدام است؟



① $\sqrt{۳}$ ② ۳

③ $۳\sqrt{۳}$ ④ $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۵ - اگر $\sin\alpha = \frac{۲}{۳}$ باشد، طول پاره‌خط AN کدام است؟



① $\frac{۲}{۳}$ ② $\frac{۳}{۲}$

③ $\frac{۴}{۳}$ ④ $\frac{-۳}{۴}$

۶ - اگر $۲۷۰ < \alpha < ۳۶۰$ باشد و $\cot\alpha = ۳m - ۲$ باشد، حدود m کدام است؟

① $m > \frac{۲}{۳}$ ② $m > \frac{۳}{۲}$ ③ $m < \frac{۳}{۲}$ ④ $m < \frac{۲}{۳}$

۷ - اگر $۹۰ \le \alpha \le ۴۵$ باشد، محدوده‌ی عبارت $A = ۱ + \sin^۲\alpha$ کدام است؟

① $\frac{۲}{۳} \le A \le \frac{۳}{۲}$ ② $\frac{۳}{۲} \le A \le ۲$ ③ $\frac{-\sqrt{۲}}{۲} \le \sin\alpha \le \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ④ $-۱ \le \alpha \le ۱$

۸ - اگر داشته باشیم $|\sin\alpha| > |\cot\alpha| > |\cos\alpha|$؛ α کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

① ۲۴۰ ② ۳۰ ③ ۱۷۰ ④ ۳۴۰

۹ - اگر $tan\alpha = ۳$ باشد، حاصل $۱ + \frac{\sin^۲\alpha}{۱ - \sin^۲\alpha}$ کدام است؟

① ۳ ② ۶ ③ ۹ ④ ۱۰

۱۰ - مثلث قائم‌الزاویه ABC در $\widehat{C}$ قائمه است; حاصل $\sin^۲A + \cos^۲B$ کدام است؟

① $۲\sin^۲A$ ② $۳\sin^۲B$ ③ $\frac{\sin^۲A}{۲}$ ④ $\frac{\cos B + \sin A}{۲}$

۱۱- اگر α زاویه‌ای در دایره‌ی مثلثاتی، $\cot\alpha = \sqrt{\frac{m}{n} - ۱}$ و $\cos\alpha = \sqrt{۱ - m^۲}$ باشد، رابطه‌ی بین m و n کدام است؟ (عبارت‌ها تعریف شده‌اند.)

① $m = n^۲$ ② $m = n^۳$ ③ $n = m^۳$ ④ $n = m^۲$

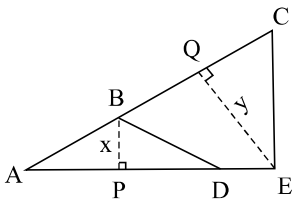
۱۲- حاصل عبارت $A = \frac{۱ + \tan^۲ ۶۰^\circ + \sin^۲ ۶۰^\circ}{\cot ۴۵^\circ + \cos^۲ ۳۰^\circ}$ کدام است؟

① $\frac{۱۹}{۷}$ ② $\frac{۱ + ۲\sqrt{۳}}{۳}$ ③ $\frac{۳ + ۲\sqrt{۳}}{۴}$ ④ $\frac{۷}{۴}$

۱۳- اگر $\frac{\sqrt{\sin^۲\alpha - \sin^۴\alpha}}{|\sin\alpha|} = -\cos\alpha$ و $\frac{\sqrt{\sin^۲\alpha - \sin^۴\alpha}}{|\cos\alpha|} = \sin\alpha$ باشد زاویه‌ی α متعلق به کدام ربع است؟

① چهارم ② سوم ③ دوم ④ اول

۱۴- اگر در شکل مقابل $AD = ۸$ ، $DE = ۴$ ، $AB = ۶$ و $BC = ۱۰$ باشد ،نسبت $\frac{x}{y}$ کدام است؟

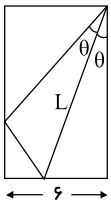


① $\frac{۱}{۴}$ ② $\frac{۵}{۹}$ ③ $\frac{۲}{۳}$ ④ $\frac{۴}{۵}$

۱۵- در مثلث قائم الزاویه‌ای، سینوس یکی از زاویه‌ها $\frac{۵}{۷}$ ، و اندازه‌ی وتر ۱۴ واحد است. کوچکترین ضلع مثلث کدام است؟

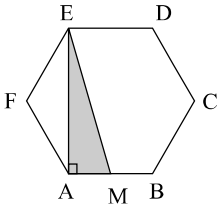
① $۲\sqrt{۳}$ ② $۳\sqrt{۷}$ ③ $۴\sqrt{۶}$ ④ $۵\sqrt{۲}$

۱۶- یک برگ کاغذ مستطیل شکل به پهنای $۶cm$ را به مطابق شکل تا کرده‌ایم به طوری که یکی از گوشه‌ها بر ضلع مقابل منطبق شده است. طول خط تای کاغذ (L) بر حسب زاویه θ کدامست؟



① $\frac{۶}{\sin\theta(۱ + \cos ۲\theta)}$ ② $۶\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ③ $۳\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ④ $\frac{۶}{\cos\theta \times \sin ۲\theta}$

۱۷- در شکل مقابل، طول هر ضلع شش ضلعی منتظم، ۲۰ و M وسط AB است مساحت مثلث AME کدام است؟



① $۴۰۰\sqrt{۳}$ ② $۲۰۰\sqrt{۳}$ ③ $۳۰۰\sqrt{۳}$ ④ $۱۰۰\sqrt{۳}$

۱۸- مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع $\overset{\Delta}{ABC}$ به طول ضلع a کدام می‌تواند باشد؟$(a \in \mathbb{N})$

① $\sqrt{۳}$ ② $\sqrt{۲}$ ③ ۲ ④ $\sqrt{۵}$

۱۹- در بازه‌ی $۳۰^\circ < x < ۴۵^\circ$ کدام نامساوی نادرست است؟

① $\sin x < \cos x$ ② $\sqrt{\sin x} < \sqrt{\cos x}$ ③ $\frac{۱}{۲} < \sin x + \cos x < \sqrt{۲}$ ④ $\cos x - \sin x > ۰$

۲۰- حدود k برای آنکه معادله‌ی $\sin x = k$ در فاصله‌ی $۶۰^\circ \leq x \leq ۱۲۰^\circ$ دارای جواب باشد، کدام است؟

① $\frac{۱}{۲} \leq k \leq \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ② $-۱ \leq k \leq ۱$ ③ $\frac{\sqrt{۳}}{۲} \leq k \leq ۱$ ④ $k > \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

ریاضی ۱

۲۱- اگر $۱۰۸ < x < ۴۵$ و $\sin x = \frac{m}{۲}$، حدود m کدام است؟

۱) $m \le \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $m > \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۲} < m \le ۲$ ۴) $۱ \le m < \sqrt{۲}$

۲۲- اگر $a \in \mathbb{R} - \{۰\}$ و $\cos x = \sqrt{\frac{\cot x}{\cot x - a^۲}}$ باشد، x در کدام ربع است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

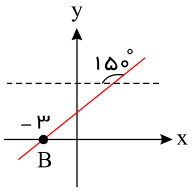
۲۳- ساده شده‌ی عبارت $(۱ - \sin^۲\theta)(۱ + \frac{۱}{\cos^۲\theta}) - (۱ - \cos\theta)^۲$ کدام است؟

۱) $\sin^۲\theta$ ۲) $\cos^۲\theta$ ۳) $-\cos^۲\theta$ ۴) $۲\cos\theta$

۲۴- به ازای کدام مقدار A، تساوی $\frac{۱}{\cos^۴x} + \frac{A}{\cos^۲x} = \tan^۴x - ۱$ یک اتحاد است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۲۵- اگر نمایش معادله‌ی خط $ax - \sqrt{۳}y + c = ۰$ به صورت زیر باشد، حاصل $a.c$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۳ ۴) $۲\sqrt{۳}$

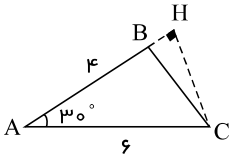
۲۶- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، $\widehat{C} = ۹۰^\circ$ و $\cos\widehat{A} = \frac{۱۲}{۱۳}$ و $BC = ۱۰$ می‌باشد. محیط مثلث ABC کدام است؟

۱) ۴۸ ۲) ۶۰ ۳) ۷۰ ۴) ۷۲

۲۷- اگر قطر کوچک یک شش ضلعی منتظم برابر با $۲\sqrt{۳}$ باشد، مساحت شش ضلعی منتظم کدام است؟

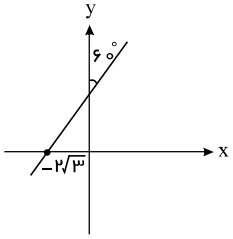
۱) ۶ ۲) $۶\sqrt{۳}$ ۳) ۱۲ ۴) $۱۲\sqrt{۳}$

۲۸- در مثلث ABC، $\widehat{A} = ۳۰^\circ$ و $AC = ۶$ و $AB = ۴$ است. در این صورت طول ارتفاع CH کدام است؟



۱) ۳ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) ۴ ۴) $۳\sqrt{۳}$

۲۹- معادلهٔ خط زیر کدام است؟

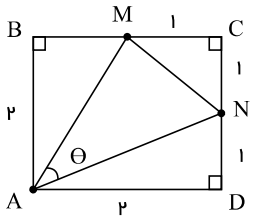


۱) $x = \sqrt{۳}(y - ۲)$ ۲) $۳y + \sqrt{۳}x = -۶$
۳) $y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x - ۲$ ۴) $x = \frac{\sqrt{۳}}{۳}y + ۲$

۳۰- اگر $\tan\alpha = \frac{۳}{۴}$ و $\sin\alpha + \cos\alpha < ۰$ باشد، در این صورت $(\sin\alpha + \cos\alpha)^۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۵}{۴۹}$ ۲) $\frac{۴۹}{۲۵}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۷}{۵}$

۳۱- باتوجه به مربع بودن شکل زیر، حاصل $\sin\theta$ کدام است؟

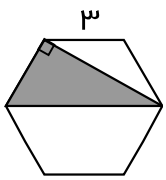


۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

۳۲- حاصل عبارت تعریف شدهٔ $(\cos^۴\alpha - \sin^۴\alpha)(۱ + \tan^۲\alpha) + \tan^۲\alpha$ کدام است؟

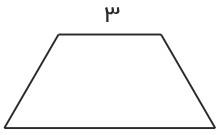
① صفر ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

۳۳- مساحت قسمت هاشورخورده در شش‌ضلعی منتظم مقابل چقدر است؟



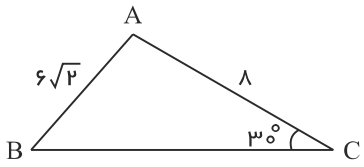
① $\frac{۹}{۲}$ ② $\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$
③ ۳ ④ $۳\sqrt{۳}$

۳۴- اگر ذوزنقهٔ مقابل از نصف نمودن یک شش ضلعی منتظم به وجود آمده باشد، در این صورت مساحت آن کدام است؟



① $۲۷\sqrt{۳}$ ② $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$ ③ $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$ ④ $۲۷\sqrt{۲}$

۳۵- در شکل زیر، مساحت مثلث ABC کدام است؟



① $۸\sqrt{۳}$ ② $۲(\sqrt{۱۴} + ۲\sqrt{۳})$
③ $۴(\sqrt{۱۴} + ۲\sqrt{۳})$ ④ $۴\sqrt{۳}$

۳۶- اگر α در ناحیهٔ دوم و $\sin\alpha = \frac{۱۲}{۱۳}$ باشد، معادلهٔ خطی که محور xها را در نقطه‌ای به طول $\frac{۱}{۲}$ قطع کند و با جهت مثبت آن زاویهٔ α بسازد، کدام است؟

① $۴y = ۶x - ۳$ ② $۵y = ۶ - ۱۲x$ ③ $۵y = ۱۲x - ۶$ ④ $۴y = ۳ - ۶x$

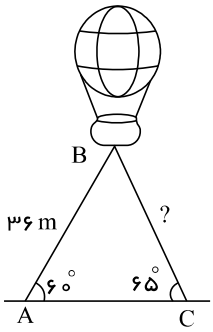
۳۷- اگر برای زاویهٔ α داشته باشیم، $tan\alpha \cdot sin\alpha > ۰$ و $\sin\alpha - \cos\alpha > ۰$ حدود α برابر با کدام گزینهٔ زیر می‌تواند باشد؟

① $۱۸۰^\circ < \alpha < ۲۷۰^\circ$ ② $۴۵^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ$ ③ $۴۵^\circ < \alpha < ۹۰^\circ$ ④ $۰ < \alpha < ۴۵^\circ$

۳۸- مساحت یک ۶ ضلعی منتظم برابر با $۱۲\sqrt{۳}$ است. محیط آن برابر است با:

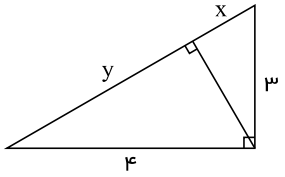
① ۱۲ ② $۱۲\sqrt{۲}$ ③ $۱۲\sqrt{۳}$ ④ ۲۴

۳۹- یک بالن مطابق شکل زیر با دو طناب به زمین بسته شده است. طول طناب اول ۳۶ متر است. طول طناب دوم چقدر است؟ ($\sin ۶۵^\circ \simeq ۰/۹$)



① $\frac{۴۰\sqrt{۳}}{۳}$
② $۲۰\sqrt{۳}$
③ $۱۸\sqrt{۳}$
④ $\frac{۵۰\sqrt{۳}}{۳}$

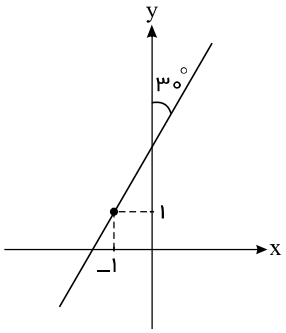
۴۰- در شکل زیر، نسبت x به y کدام است؟



① $\frac{۱۶}{۹}$ ② $\frac{۹}{۵}$
③ $\frac{۹}{۱۶}$ ④ $\frac{۵}{۹}$

ریاضی ۱

۴۱ - مطابق شکل زیر، عرض از مبدأ خطی که با جهت مثبت محور yها زاویهٔ ۳۰° بسازد و از نقطهٔ $(-۱, ۱)$ بگذرد، کدام است؟



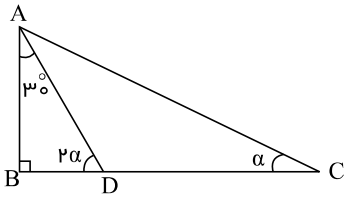
۱) $y = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳} + ۱$

۲) $y = ۲\sqrt{۳} + ۱$

۳) $y = ۲\sqrt{۳} - ۱$

۴) $y = \sqrt{۳} + ۱$

۴۲ - در شکل زیر، اگر $AD = DC$ باشد، حاصل $\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABD}}$ کدام است؟



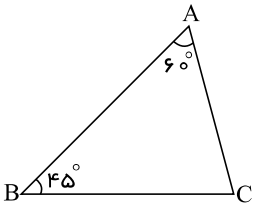
۱) ۲

۲) $۲\sqrt{۳}$

۳) ۳

۴) $۴\sqrt{۳}$

۴۳ - در شکل زیر، اگر $AC = ۱۰\sqrt{۳}$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ ضلع BC کدام است؟



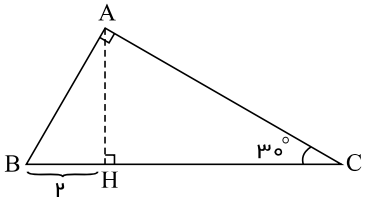
۱) ۱۵

۲) $۱۵\sqrt{۲}$

۳) $۱۵\sqrt{۳}$

۴) ۲۰

۴۴ - در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC شکل زیر، مساحت مثلث AHC کدام است؟



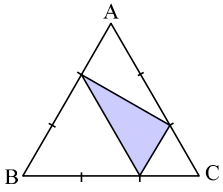
۱) $۲\sqrt{۳}$

۲) $۴\sqrt{۳}$

۳) $۶\sqrt{۳}$

۴) $۸\sqrt{۳}$

۴۵ - در شکل زیر، هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم. مساحت ناحیهٔ سایه‌زده چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



۱) $\frac{۵}{۱۲}$

۲) $\frac{۲}{۹}$

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) $\frac{۴}{۹}$

۴۶ - اگر $\tan\alpha = -\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ و انتهای کمان α روی دایرهٔ مثلثاتی نقطهٔ P باشد که در ناحیهٔ دوم محورهای مختصات واقع است، مجموع مؤلفه‌های اول و دوم مختصات نقطهٔ P کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵} - ۲}{۳}$

۲) $\frac{۲ - \sqrt{۵}}{۳}$

۳) $\frac{\sqrt{۵} + ۲}{۳}$

۴) $\frac{-۲ - \sqrt{۵}}{۳}$

۴۷ - اگر x در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی و $\cos x = \frac{۲}{۳}$ باشد، مقدار $۲\tan x - ۵\cot x$ برابر کدام است؟

۱) $-\sqrt{۵}$

۲) $\sqrt{۵}$

۳) ۰

۴) $۲\sqrt{۵}$

۴۸ - حاصل عبارت تعریف‌شدهٔ $\frac{۱}{۱+\sin\theta} + \frac{۱}{۱-\sin\theta} - ۲\tan^۲\theta$ کدام است؟

۱) -۱

۲) صفر

۳) ۱

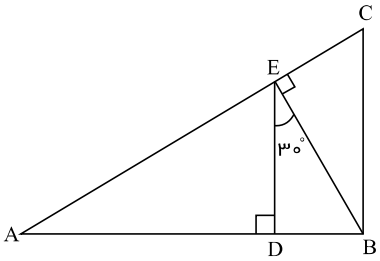
۴) ۲

ریاضی ۱

۴۹ - حاصل عبارت $\frac{۳\tan^۲ x}{\cos^۲ x} - \frac{۱}{\cos^۶ x} = A$، همواره کدام است؟ (عبارت‌ها تعریف‌شده هستند.)

(۱) $۱+\tan^۲ x$ (۲) $۱+\tan^۳ x$ (۳) $۱+\tan^۴ x$ (۴) $۱+\tan^۶ x$

۵۰ - در شکل زیر، اگر $AD = ۲\sqrt{۳}$ و $BC = \frac{۸}{۳}$ باشد، طول ضلع AC از مثلث ABC کدام است؟

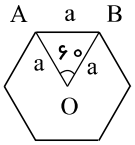


(۱) ۶ (۲) ۷

(۳) $\frac{۱۶}{۳}$ (۴) $\frac{۲۰}{۳}$

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱ هر شش ضلعی منتظم به ضلع a، شامل ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a است.



$$S_{\overset{\triangle}{OAB}} = \frac{۱}{۲} \times a \times a \times \sin ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲} \times a \times a \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۴} a^۲$$

پس مساحت ۶ ضلعی عبارتست از:

$$S_{\text{شش ضلعی}} = ۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۴} a^۲ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} a^۲ \overset{a=۳}{=\!=\!=} \frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$$

از طرفی در دایره، شعاع برابر با OA است داریم:

$$r = OA = a \Rightarrow S_{\text{دایره}} = \pi r^۲ = \pi a^۲ \overset{\pi=۳}{=\!=\!=} ۳a^۲ \overset{a=۳}{=\!=\!=} ۲۷$$

و تفاضل این مساحت عبارتست از:

$$۲۷ - \frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲} = ۲۷\left(۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = ۲۷\left(\frac{۲ - \sqrt{۳}}{۲}\right)$$

۲ - گزینه ۲

$$\sin C = \sqrt{۱ - \cos^۲ C} = \sqrt{۱ - \frac{۴۶}{۴۹}} = \sqrt{\frac{۳}{۴۹}} = \frac{\sqrt{۳}}{۷}$$

$$\sin C = \frac{۱۰}{BC} = \frac{\sqrt{۳}}{۷} \Rightarrow BC = \frac{۷۰}{\sqrt{۳}}$$

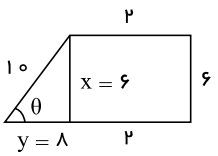
$$S = \frac{۱}{۲} AB \times BC \times \sin B$$

می‌دانیم سینوس و کسینوس دو زاویه متمم با هم برابرند؛ در مثلث ABC:

$$\widehat{A} = ۹۰ \ , \ \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = ۱۸۰ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = ۹۰ \Rightarrow \sin B = \cos C$$

$$S = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times \frac{۷۰}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۴۶}}{۷} = ۵۰\sqrt{\frac{۴۶}{۳}}$$

۳ - گزینه ۳ با تقسیم شکل به یک مثلث و یک مستطیل خواهیم داشت:



$$\sin\theta = \frac{x}{۱۰} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow x = ۶$$

$$x^۲ + y^۲ = ۱۰^۲ \Rightarrow ۳۶ + y^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow y^۲ = ۶۴ \Rightarrow y = ۸$$

$$S_{\text{ذوزنقه}} = S_{\text{مثلث}} + S_{\text{مستطیل}} \Rightarrow S = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۱۰ \times \frac{۳}{۵} + ۲ \times ۶$$

$$S = ۲۴ + ۱۲ = ۳۶$$

۴ - گزینه ۳ $\cos C$ را دو مثلث $\overset{\triangle}{OBC}$ و $\overset{\triangle}{OHC}$ می‌نویسیم:

$$\overset{\triangle}{OBC} : \cos C = \frac{OC}{BC}$$

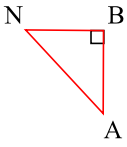
$$\overset{\triangle}{OHC} : \cos C = \frac{CH}{OC}$$

$$\cos C = \frac{CH}{OC} = \frac{OC}{BC} \Rightarrow OC^۲ = BC \cdot CH$$

$$OC^۲ = ۳ \times \sqrt{۳} = ۳\sqrt{۳}$$

۵ - گزینه ۲

در مثلث $\overset{\triangle}{ABN}$ داریم: (قائم‌الزاویه)



شعاع : $AB = ۱$

$NB = \cot\alpha$

$AN =$ وتر

داریم:

$$AN^۲ = AB^۲ + NB^۲ = ۱ + \cot^۲\alpha = \frac{۱}{\sin^۲\alpha}$$

$$\Rightarrow AN = \sqrt{\frac{۱}{\sin^۲\alpha}} = \frac{۱}{\sin\alpha} = \frac{۱}{\frac{۲}{۳}} = \frac{۳}{۲}$$

۶ - گزینه ۴

α در ربع چهارم:

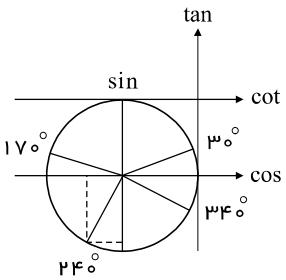
$$۳m - ۲ < ۰ \to ۳m < ۲ \to m < \frac{۲}{۳}$$

۷ - گزینه ۲

$$۴۵ \le \alpha \le ۹۰ \to \frac{\sqrt{۲}}{۲} \le \sin\alpha \le ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \le \sin^۲\alpha \le ۱$$

$$\xrightarrow{+۱} \frac{۳}{۲} \le \sin^۲\alpha + ۱ \le ۲$$

۸ - گزینه ۱ باتوجه به دایره مثلثاتی: $|\sin ۲۴۰| > |\cot ۲۴۰| > |\cos ۲۴۰|$



$$\sin ۲۴۰ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos ۲۴۰ = \frac{۱}{۲}$$

$$\cot ۲۴۰ = \frac{\cos ۲۴۰}{\sin ۲۴۰} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{-\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{-\sqrt{۳}}{۳}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

ب) $|\sin ۳۰| < |\cos ۳۰|$

ج) $|\sin ۱۷۰| < |\cot ۱۷۰|$

د) $|\sin ۳۴۰| < |\cot ۳۴۰|$

۹ - گزینه ۴

$$\frac{\sin^۲\alpha}{۱ - \sin^۲\alpha} + ۱ = \frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha} + ۱ = \tan^۲\alpha + ۱ = ۳^۲ + ۱ = ۱۰$$

۱۰ - گزینه ۱

می‌دانیم B و A متمم یکدیگرند در نتیجه: $\sin A = \cos B$.

$$\sin^۲A + \cos^۲B = \sin^۲A + \sin^۲A = ۲\sin^۲A$$

۱۱ - گزینه ۳

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱\\ ۱ + \cot^۲\alpha = \frac{۱}{\sin^۲\alpha}\end{array}}$$

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲ = ۱ \Rightarrow \cos^۲\alpha = ۱ - \sin^۲\alpha \Rightarrow \begin{cases}\cos\alpha = \sqrt{۱ - \sin^۲\alpha}\\ \cos\alpha = \sqrt{۱ - \sin^۲\alpha}\end{cases}$$

چون $\cos\alpha$ در مسئله بصورت یک رادیکال داده شده و مثبت است، مقدار مثبت را می‌پذیریم:

$$\cos\alpha = \sqrt{۱ - \sin^۲\alpha} = \sqrt{۱ - m^۲} \xrightarrow{(\,)^۲} ۱ - \sin^۲\alpha = ۱ - m^۲ \Rightarrow \sin^۲\alpha = m^۲$$

از طرفی: $۱ + \cot^۲\alpha = \frac{۱}{\sin^۲\alpha} \Rightarrow ۱ + \left(\sqrt{\frac{m}{n} - ۱}\right)^۲ = \frac{۱}{m^۲}$

$$\Rightarrow ۱ + \frac{m}{n} - ۱ = \frac{۱}{m^۲} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{۱}{m^۲} \Rightarrow m^۳ = n$$

۱۲ - گزینه ۱ می دانیم: $\cot ۴۵^\circ = ۱$, $\cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$, $\tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$, $\sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$$A=\frac{۱+(\sqrt{۳})^{۲}+(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۲}}{۱+(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۲}}=\frac{۱+۳+\frac{۳}{۴}}{۱+\frac{۳}{۴}}=\frac{\frac{۴+۱۲+۳}{۴}}{\frac{۴+۳}{۴}}=\frac{۱۹}{۷}$$

۱۳ - گزینه ۳

$$\sqrt{\sin^{۲}\alpha-\sin^{۴}\alpha}=\sqrt{\sin^{۲}\alpha\left(۱-\sin^{۲}\alpha\right)}=\sqrt{\sin^{۲}\alpha\times\cos^{۲}\alpha}=|\sin\alpha||\cos\alpha|$$

$$\left.\begin{array}{ll}\frac{\sqrt{\sin^{۲}\alpha-\sin^{۴}\alpha}}{|\sin\alpha|}=\frac{|\sin\alpha|\,|\cos\alpha|}{|\sin\alpha|}=|\cos\alpha|=-\cos\alpha\rightarrow & \text{ربع دوم وسوم}\ \alpha\\ \frac{\sqrt{\sin^{۲}\alpha-\sin^{۴}\alpha}}{|\cos\alpha|}=\frac{|\sin\alpha|\,|\cos\alpha|}{|\cos\alpha|}=|\sin\alpha|=\sin\alpha\rightarrow & \text{ربع اول ودوم}\ \alpha\end{array}\right\}\rightarrow \text{ربع دوم}\ \alpha$$

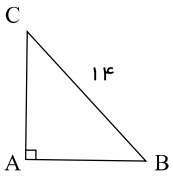
۱۴ - گزینه ۱

$$\left\{\begin{array}{l}\text{مشترک}\ \hat{A}\\ \hat{P}=\hat{Q}=۹۰^{\circ}\end{array}\right.\xrightarrow{\text{بنا بر حالت دو زاویه مساوی}}\overset{\Delta}{ABP}\sim\overset{\Delta}{AEQ}$$

با نوشتن نسبت تشابه بین اجزای متناظر دو مثلث داریم:

$$\frac{AB}{AE}=\frac{BP}{EQ}\rightarrow\frac{۶}{۴+۸}=\frac{x}{y}\rightarrow\frac{x}{y}=\frac{۱}{۲}$$

۱۵ - گزینه ۳

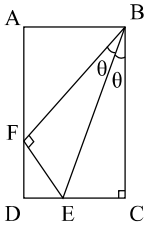


با فرض $\sin\hat{B}=\frac{۵}{۷}$

$$\sin\hat{B}=\frac{AC}{۱۴}=\frac{۵}{۷}\rightarrow AC=۱۰$$

$$AB^{۲}+۱۰۰=۱۹۶\rightarrow AB^{۲}=۹۶\rightarrow AB=۴\sqrt{۶}$$

۱۶ - گزینه ۱



درمثلث $\overset{\Delta}{BCE}$ داریم:

$$\sin\theta=\frac{CE}{BE}=\frac{CE}{L}\Rightarrow CE=L\sin\theta$$

در چهار ضلعی $BCEF$ داریم:

$$\hat{E}+\hat{F}+\hat{B}+\hat{C}=۳۶۰$$

$$\hat{E}+۹۰+۲\theta+۹۰=۳۶۰$$

$$\hat{E}=۱۸۰-۲\theta$$

$$D\hat{E}F=۱۸۰-(۱۸۰-۲\theta)\Rightarrow D\hat{E}F=۲\theta$$

در مثلث $\overset{\Delta}{DEF}$ داریم:

$$\left.\hat{F}=\hat{C}=۹۰^{\circ}\right\}\xrightarrow[\text{تساوی دو زاویه}]{\text{بنا به حالت}}\overset{\Delta}{EFB}\sim\overset{\Delta}{EBC}\Rightarrow EF=CE$$

$$\cos D\hat{E}F=\frac{DE}{EF}\xrightarrow[EF=CE]{CE=L\sin\theta}\cos۲\theta=\frac{DE}{L\sin\theta}\rightarrow DE=L\sin\theta\cos۲\theta$$

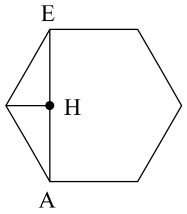
نتیجه می گیریم:

$$CD=CE+DE\rightarrow۶=L\sin\theta+L\sin\theta\cos۲\theta$$

$$\rightarrow۶=L\sin\theta(۱+\cos۲\theta)$$

$$L=\frac{۶}{\sin\theta(۱+\cos۲\theta)}$$

۱۷ - گزینه ۴



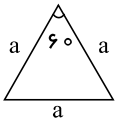
با در نظر گرفتن H مثلث EAF متساوی الساقین است پس FH هم نیمساز است، هم میانه و هم ارتفاع:

$$\sin E\hat{F}H = \frac{EH}{EF} \to \sin ۶۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{EH}{۲۰} \to EH = ۱۰\sqrt{۳}$$

$$EA = ۲EH = ۲ \times ۱۰\sqrt{۳} = ۲۰\sqrt{۳}$$

$$S_{\underset{EAM}{\triangle}} = \frac{EA \times AM}{۲} = \frac{۲۰\sqrt{۳} \times ۱۰}{۲} = ۱۰۰\sqrt{۳}$$

۱۸ - گزینه ۱



$$S = \frac{a \times a \times \sin ۶۰}{۲} = \frac{a^۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

راه اول: اعداد طبیعی را امتحان می‌کنیم:

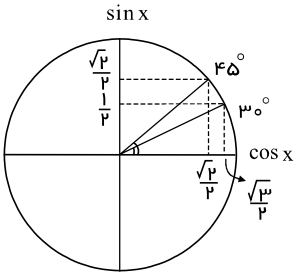
$$a = ۱ \to \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

$$a = ۲ \to \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۴ = \sqrt{۳}$$ گزینه۱

راه دوم: تنها گزینه‌ای که مضرب طبیعی $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ باشد گزینه ۱ یعنی $\sqrt{۳}$ است که بالطبع $a = ۲$ می‌شود.

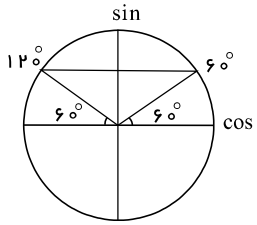
۱۹ - گزینه ۲ در نیمهٔ اول ناحیهٔ اول $(۰, ۴۵)$ همواره مقدار $\cos x$ بزرگتر از $\sin x$ است و چون همواره عددی بین ۰ و ۱ هستند اگر از طرفین جذر بگیریم جهت نامساوی عوض می‌شود بنابراین داریم:

$$۳۰ < x < ۴۵ \Rightarrow \sin x < \cos x \Rightarrow \sqrt{\sin x} > \sqrt{\cos x}$$



۲۰ - گزینه ۳

باتوجه به شکل:

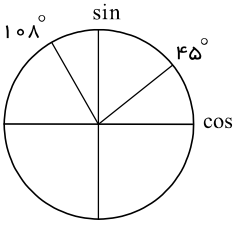


$$\frac{\sqrt{۳}}{۲} \le \sin x \le ۱$$

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲} \le k \le ۱$$

۲۱ - گزینه ۳

با توجه به شکل داریم:



$$\frac{\sqrt{۲}}{۲} < \sin x \le ۱$$

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲} < \frac{m}{۲} \le ۱$$

$$\sqrt{۲} < m \le ۲$$

۲۲ - گزینه ۴ با توجه به اینکه حاصل رایکال همواره عبارتی مثبت است: $\cos x > ۰$ ربع اول $\}$ (I)

ریاضی ۱

و با به توان ۲ رساندن طرفین تساوی داریم:

$$\cos^۲x=\frac{\cot x}{\cot x-a^۲}\overset{*}{\to}۰\le\frac{\cot x}{\cot x-a^۲}\le۱$$

$$۱)\frac{\cot x}{\cot x-a}\le۱\Rightarrow\frac{\cot x}{\cot x-a^۲}-۱\le۰\to\frac{\cot x}{\cot x-a^۲}-\frac{\cot x-a^۲}{\cot x-a^۲}\le۰\to\frac{\cot x-\cot x+a^۲}{\cot x-a^۲}\le۰$$

$$\to\frac{a^۲}{\cot x-a^۲}\le۰\xrightarrow{a^۲\ge۰}\cot x-a^۲<۰$$

$$۲)\frac{\cot x}{\cot x-a^۲}\ge۰\xrightarrow{\cot x-a^۲<۰}\cot x\le۰\ \{\text{ناحیه دوم }(II)$$
$$\xrightarrow{I\cap II}\text{ناحیه چهارم}$$

$$*:\ \begin{matrix}-۱\le\cos x\le۱\\ ۰\le cos^۲x\le۱\end{matrix}$$

۲۳ - گزینه ۴

$$(۱-\sin^۲\theta)(۱+\frac{۱}{\cos^۲\theta})-(۱-\cos\theta)^۲$$
$$=\cos^۲\theta(۱+\frac{۱}{\cos^۲\theta})-(۱+\cos^۲\theta-۲\cos\theta)=\cos^۲\theta+۱-۱-\cos^۲\theta+۲\cos\theta=۲\cos\theta$$

۲۴ - گزینه ۴

$$\frac{۱}{\cos^۴x}+\frac{A}{\cos^۲x}=\tan^۴x-۱\to\frac{۱}{\cos^۴x}+\frac{A}{\cos^۲x}=\frac{\sin^۴x}{\cos^۴x}-۱$$

$$\xrightarrow{\times\cos^۴x}۱+A\cos^۲x=\sin^۴x-\cos^۴x\to$$

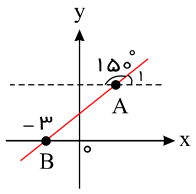
$$۱+A\cos^۲x=(\sin^۲x-\cos^۲x)\overbrace{(\sin^۲x+\cos^۲x)}^{۱}$$

$$۱+A\cos^۲x=\sin^۲x-\cos^۲x\to۱-\sin^۲x+A\cos^۲x=-\cos^۲x$$

$$\cos^۲x+A\cos^۲x=-\cos^۲x\to\cos^۲x(۱+A)=-\cos^۲x$$

$$۱+A=-۱\to A=-۲$$

۲۵ - گزینه ۳ با توجه به شکل داریم:



$$۱۵۰^\circ+\hat{A}_۱=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{A}_۱=۱۸۰^\circ-۱۵۰^\circ=۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow\text{شیب خط}=m=\tan\hat{A}_۱=\tan۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$y-y_B=m(x-x_B)\Rightarrow y-۰=\frac{\sqrt{۳}}{۳}(x-(-۳))$$

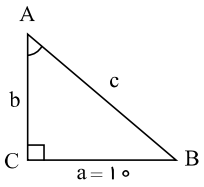
$$\begin{cases}\frac{\sqrt{۳}}{۳}x-y+\sqrt{۳}=۰\\ ax-\sqrt{۳}y+c=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-\sqrt{۳}y+۳=۰\\ ax-\sqrt{۳}y+c=۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow a=۱\ ,\ c=۳\Rightarrow a.c=۳$$

۲۶ - گزینه ۲

می‌دانیم: در هر مثلث قایم‌الزاویه : $\cos\alpha=\frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول وتر}}$

$$\cos\hat{A}=\frac{\text{طول ضلع قائمه‌ی مجاور به زاویه‌ی } A}{\text{طول وتر}}=\frac{b}{c}=\frac{۱۲}{۱۳}\Rightarrow b=\frac{۱۲}{۱۳}c \qquad (۱)$$



طبق رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$c^۲=a^۲+b^۲\xrightarrow{(۱)}c^۲=(۱۰)^۲+(\frac{۱۲}{۱۳}c)^۲$$

$$c^۲=۱۰۰+\frac{۱۴۴}{۱۶۹}c^۲\Rightarrow ۱۶۹c^۲=۱۶۹۰۰+۱۴۴c^۲\Rightarrow ۲۵c^۲=۱۶۹۰۰$$

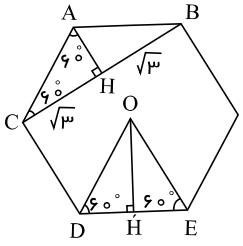
$$\Rightarrow c^۲=\frac{۱۶۹۰۰}{۲۵}=\frac{۱۶۹\times \cancel{۱۰۰}^{۴}}{\cancel{۲۵}_{۱}}\Rightarrow c=۱۳\times ۲=۲۶$$

$$\xrightarrow{(۱)} b=\frac{۱۲}{۱۳}\times ۶=۲۴\Rightarrow \begin{cases} a=۱۰\\ b=۲۴\\ c=۲۶\end{cases}$$

محیط مثلث $=۱۰+۲۴+۲۶=۶۰$

۲۷ - گزینه ۲ می‌دانیم: مساحت هر مثلث عبارت‌اند از: $S=\frac{۱}{۲}\times$ حاصل‌ضرب دو ضلع $\times \sin$ (زاویه‌ی بین آن دو ضلع)

$$\left.\begin{array}{l} CH=\frac{۱}{۲}BC=\sqrt{۳}\\ CH=AC\sin ۶۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow AC=۲$$



متساوی‌الاضلاع: $\overset{\triangle}{ODE}: OD=DE=AC=۲\Rightarrow OH'=OD\sin ۶۰^\circ=\sqrt{۳}$

$$S_{\overset{\triangle}{ODE}}=\frac{۱}{۲}OH'\times DE=\frac{۱}{۲}\times\sqrt{۳}\times ۲=\sqrt{۳}$$

مساحت شش‌ضلعی منتظم $=۶\times S_{\overset{\triangle}{ODE}}=۶\sqrt{۳}$

۲۸ - گزینه ۱

میدانیم: مساحت هر مثلث از رابطه‌ی روبرو بدست می‌آید: $S=\frac{۱}{۲}\times$ حاصل‌ضرب دو ضلع $\times \sin$ (زاویه‌ی بین آن دو ضلع)

مساحت مثلث را از دو طریق محاسبه می کنیم:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AB\cdot AC\cdot\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۶\times\sin ۳۰^\circ=۶$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AB\cdot CH=\frac{۱}{۲}\times ۴\times CH=۲CH$$

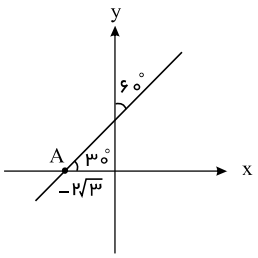
$$\Rightarrow ۲CH=۶\Rightarrow CH=۳$$

۲۹ - گزینه ۱

می‌دانیم: شیب خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد.

مطابق شکل، ابتدا شیب خط را به دست می‌آوریم:

$m = \tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}, A = (-۲\sqrt{۳}, ۰)$



معادلهٔ خط: $y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x + h \xrightarrow{A \text{ نقطهٔ}} ۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \times (-۲\sqrt{۳}) + h$

$\Rightarrow -۲ + h = ۰ \Rightarrow h = ۲$

$y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x + ۲ \Rightarrow \sqrt{۳}y = x + ۲\sqrt{۳} \Rightarrow x = \sqrt{۳}y - ۲\sqrt{۳} \Rightarrow x = \sqrt{۳}(y - ۲)$

۳۰ - گزینه ۲

می‌دانیم: $۱ + \tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha}$

$\tan\alpha$ در ناحیه‌های اول و سوم مثبت است. در ناحیهٔ اول $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ مثبت هستند. پس انتهای زاویهٔ α در ناحیهٔ اول نیست، چون $\sin\alpha + \cos\alpha < ۰$. بنابراین انتهای زاویهٔ α باید در ناحیهٔ سوم قرار داشته باشد. در نتیجه خواهیم داشت:

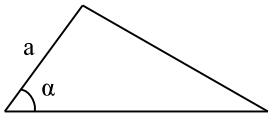
$\cos^۲\alpha = \frac{۱}{۱ + \tan^۲\alpha} \Rightarrow \cos^۲\alpha = \frac{۱}{۱ + (\frac{۳}{۲})^۲} = \frac{۱}{\frac{۲۵}{۱۶}} \xrightarrow{\cos\alpha < ۰} \cos\alpha = -\frac{۴}{۵}$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \times \tan\alpha = -\frac{۴}{۵} \times \frac{۳}{۴} = -\frac{۳}{۵}$

$(\sin\alpha + \cos\alpha)^۲ = (-\frac{۳}{۵} - \frac{۴}{۵})^۲ = (-\frac{۷}{۵})^۲ = \frac{۴۹}{۲۵}$

۳۱ - گزینه ۳

می‌دانیم: در هر مثلث دلخواه به فرم زیر داریم:



$S = \frac{۱}{۲} \times a \times b \times \sin\alpha$

باتوجه به قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{ABM}$، $\overset{\Delta}{ADN}$ و $\overset{\Delta}{MNC}$ داریم:

$AM = AN = \sqrt{۵}\ ,\ MN = \sqrt{۲}$

از طرفی داریم:

$S_{\overset{\Delta}{AMN}} = \frac{۱}{۲} \times AM \times AN \times \sin\theta$

$\xrightarrow{S_{\overset{\Delta}{AMN}} = S_{ABCD} - (S_{\overset{\Delta}{ABM}} + S_{\overset{\Delta}{ADN}} + S_{\overset{\Delta}{MNC}})} (۴ - (۱ + ۱ + \frac{۱}{۲})) = \frac{۱}{۲} \times \sqrt{۵} \times \sqrt{۵} \times \sin\theta$

$\Rightarrow \frac{۳}{۲} = \frac{\sqrt{۲۵}}{۲}\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{۳}{۵}$

۳۲ - گزینه ۲

می‌دانیم: $a^۲ - b^۲ = (a - b)(a + b)\ ,\ ۱ + \tan^۲\theta = \frac{۱}{\cot^۲\theta}\ ,\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$(\cos^۴\alpha - \sin^۴\alpha)(۱ + \tan^۲\alpha) + \tan^۲\alpha = (\cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha)(\underbrace{\cos^۲\alpha + \sin^۲\alpha}_{۱})(\frac{۱}{\cos^۲\alpha}) + \tan^۲\alpha$

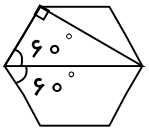
$= \frac{\cos^۲\alpha}{\cos^۲\alpha} - \frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha} + \tan^۲\alpha = ۱ - \tan^۲\alpha + \tan^۲\alpha = ۱$

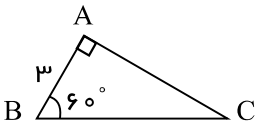
۳۳ - گزینه ۲

می‌دانیم: $S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times AB \times AC \times \sin\theta\ (\theta \text{ زاویهٔ بین } AB, AC)$

زوایای داخلی n ضلعی منتظم $= (n - ۲) \times ۱۸۰$

هر زاویه داخلی $= ۱۲۰^\circ \Rightarrow \frac{۷۲۰}{۶} = ۷۲۰^\circ \Rightarrow$ مجموع زوایای داخلی ۶ ضلعی منتظم





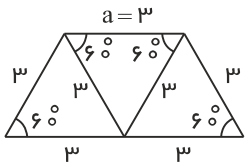
$$\cos ۶۰^\circ = \frac{۳}{BC} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow BC = ۶$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times AB \times AC \times \sin ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$$

۳۴ - گزینه ۳

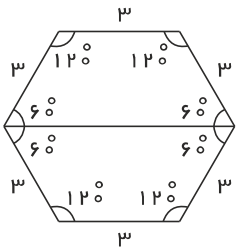
می‌دانیم: $\cos\alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$, $\sin\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$, مجموع زوایای داخلی n ضلعی منتظم $= (n-۲) \times ۱۸۰$

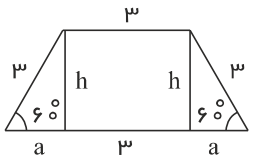
راه حل اول: ذوزنقهٔ داده شده همان نصف شش ضلعی منتظم است که از سه مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده است. پس مساحت آن برابر است با:



$$S = ۳ \times \frac{۱}{۲}(a \times a \times \sin ۶۰^\circ) = ۳ \times \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۳ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$$

راه دوم: با توجه به شکل روبرو داریم:





$$\sin ۶۰ = \frac{h}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow h = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\cos ۶۰ = \frac{a}{۳} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = \frac{۳}{۲}$$

ذوزنقه موردنظر از دو مثلث به ارتفاع h و قاعدهٔ a و یک مستطیل به طول ۳ و عرض h تشکیل می‌شود بنابراین برای بدست آوردن مساحت آن، مساحت هر قسمت را محاسبه و در نهایت با هم جمع می‌کنیم:

$$S = \underset{\text{۲ مثلث}}{۲} \times (\underbrace{\frac{۱}{۲} \times a \times h}_{\text{مساحت هر مثلث}}) + (\underset{\text{مساحت مستطیل}}{۳ \times h}) = \frac{۳}{۲} \times \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} + ۳ \times \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}(\frac{۳}{۲} + \frac{۶}{۲})$$

$$= \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}(\frac{۹}{۲}) = \frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$$

۳۵ - گزینه ۳

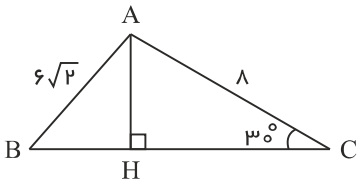
می‌دانیم: $S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times AB \times AC \times \sin\theta \quad (\theta : AC,\ AB \text{ زاویه بین})$

$\sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$, $\cos\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$

ارتفاع AH وارد بر ضلع BC را رسم می‌کنیم:

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{AH}{۸} \Rightarrow AH = ۴$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{CH}{۸} \Rightarrow CH = ۴\sqrt{۳}$$



$$\Rightarrow BH^۲ = AB^۲ - AH^۲ = (۶\sqrt{۲})^۲ - ۴^۲ = ۳۶(۲) - ۱۶ = ۷۲ - ۱۶ = ۵۶$$

$$\Rightarrow BH = \sqrt{۸ \times ۷} \Rightarrow BH = ۲\sqrt{۱۴}$$

$$BC = BH + CH = ۲\sqrt{۱۴} + ۴\sqrt{۳}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{۱}{۲} AC \times BC \times \sin ۳۰^\circ \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{۱}{۲}(۸)(۲\sqrt{۱۴} + ۴\sqrt{۳})\frac{۱}{۲} = ۴(\sqrt{۱۴} + ۲\sqrt{۳})$$

۳۶ - گزینه ۲

می‌دانیم: شیب خطی که با جهت شیب محور xها زاویهٔ α بسازد برابر است با $m = \tan\alpha$

$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$ ناحیه دوم $\alpha \begin{cases} \sin\alpha > ۰ \\ \cos\alpha < ۰ \end{cases}$

معادلهٔ خط با شیب m گذرا از نقطهٔ $(x_۰ , y_۰)$: $y - y_۰ = m(x - x_۰)$

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \Rightarrow \cos^۲\alpha = ۱ - \sin^۲\alpha = ۱ - (\frac{۱۲}{۱۳})^۲ = ۱ - \frac{۱۴۴}{۱۶۹} = \frac{۲۵}{۱۶۹}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{۵}{۱۳} \xrightarrow{\text{ربع دوم } \alpha} \cos\alpha = -\frac{۵}{۱۳}$$

$$m = \tan\alpha = \frac{\frac{۱۲}{۱۳}}{-\frac{۵}{۱۳}} = -\frac{۱۲}{۵}$$

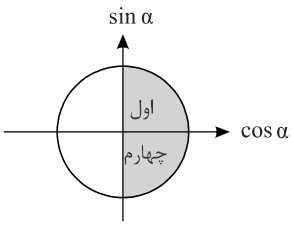
$$y - y_۰ = m(x - x_۰) \xrightarrow[(x_۰, y_۰) = (\frac{۱}{۲}, ۰)]{m = \frac{-۱۲}{۵}} y - ۰ = \frac{-۱۲}{۵}(x - \frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow y = \frac{-۱۲x}{۵} + \frac{۱۲}{۲ \times ۵} \Rightarrow ۵y = -۱۲x + ۶ \Rightarrow ۵y = ۶ - ۱۲x$$

۳۷ - گزینه ۳

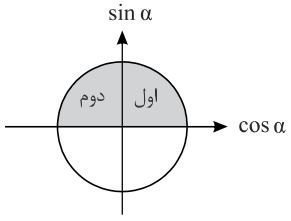
$$\tan\alpha \sin\alpha > ۰ \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \times \sin\alpha > ۰ \Rightarrow \frac{\sin^۲\alpha}{\cos\alpha} > ۰ \xrightarrow[\text{همواره مثبت}]{\sin^۲\alpha} \cos\alpha > ۰$$

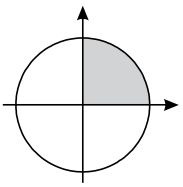
$\cos\alpha > ۰ \Rightarrow$ ربع اول و چهارم α (I)



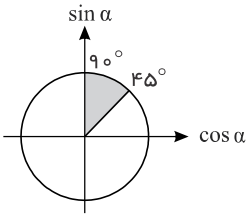
$$\sin\alpha - \cos\alpha > ۰ \Rightarrow \sin\alpha > \cos\alpha \xrightarrow{\cos\alpha > ۰} \sin\alpha > ۰$$

$\Rightarrow$ ربع اول و دوم α (II)





$\sin\alpha > \cos\alpha \xrightarrow{\alpha \text{ ربع اول}} ۴۵^\circ < \alpha < ۹۰^\circ$



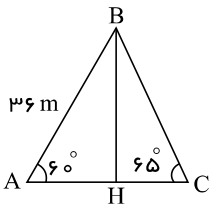
۳۸ - گزینه ۲ یک ۶ ضلعی منتظم به ضلع a، از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده است که مساحت هر کدام از آنها $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ است؛ بنابراین داریم:

$$\text{مساحت ۶ ضلعی منتظم} = ۶(\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}) = \frac{۳}{۲}a^۲\sqrt{۳} \Rightarrow \frac{۳}{۲}a^۲\sqrt{۳} = ۱۲\sqrt{۳} \Rightarrow a^۲ = ۸ \Rightarrow a = ۲\sqrt{۲}$$

$$\text{محیط ۶ ضلعی منتظم} = P : ۶a = ۶(۲\sqrt{۲}) = ۱۲\sqrt{۲}$$

۳۹ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$

با رسم ارتفاع BH داریم:

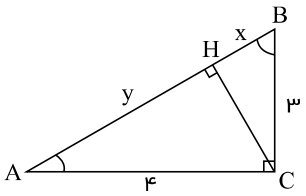


$$\sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BH}{۳۶} \Rightarrow BH = ۱۸\sqrt{۳}$$

$$\sin ۶۵^\circ = \frac{BH}{BC} \Rightarrow ۰/۹ = \frac{۱۸\sqrt{۳}}{BC} \Rightarrow BC = \frac{۱۸\sqrt{۳}}{۰/۹} = ۱۸\sqrt{۳} \times \frac{۱۰}{۹} = ۲۰\sqrt{۳}$$

۴۰ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\cos\theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$

با نوشتن رابطهٔ فیثاغورس در مثلث ABC داریم:



$$AB^۲ = ۴^۲ + ۳^۲ = ۱۶ + ۹ = ۲۵ \Rightarrow AB = ۵ \Rightarrow x + y = ۵ \ (I)$$

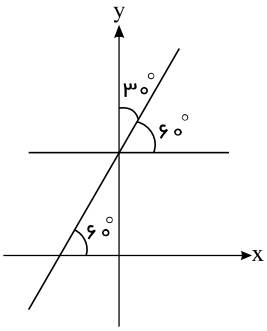
$$\left\{ \begin{array}{l} \overset{\triangle}{ABC} : \ \cos\hat{B} = \frac{۳}{۵} \\ \overset{\triangle}{BCH} : \ \cos\hat{B} = \frac{x}{۳} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{x}{۳} \Rightarrow x = \frac{۹}{۵} \ (II)$$

$$\xrightarrow{(I)\ ,\ (II)} \frac{۹}{۵} + y = ۵ \Rightarrow y = ۵ - \frac{۹}{۵} = \frac{۲۵ - ۹}{۵} = \frac{۱۶}{۵}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{۹}{۵}}{\frac{۱۶}{۵}} = \frac{۹}{۱۶}$$

۴۱ - گزینه ۴ می‌دانیم: شیب خطی که با جهت مثبت محور xها زاویهٔ θ بسازد، برابر است با: $\tan\theta$.

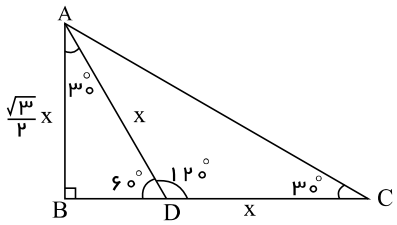
$$\begin{cases} y = ax + b \\ a = \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳} \end{cases} \Rightarrow y = \sqrt{۳}x + b \xrightarrow{(-۱,۱)} ۱ = -\sqrt{۳} + b \Rightarrow b = \sqrt{۳} + ۱$$



۴۲ - گزینه ۱ می‌دانیم:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{۱}{۲} AB \cdot BC \cdot \sin B$$
$$\sin ۱۲۰^\circ = \sin ۶۰^\circ$$

اگر $AD = DC = x$ باشد، آنگاه داریم:



$$S_{\triangle ABD}: ۹۰^\circ + ۳۰^\circ + ۲\alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\alpha = ۶۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۳۰^\circ$$

$$S_{\triangle ABD}: \cos ۳۰^\circ = \frac{AB}{x} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{۳}}{۲}x$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{۱}{۲} AD \cdot AB \cdot \sin A = \frac{۱}{۲} \times x \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}x \times \sin ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}x^۲}{۸}$$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{۱}{۲} AD \cdot DC \cdot \sin ۱۲۰^\circ = \frac{۱}{۲} \times x \times x \times \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$$

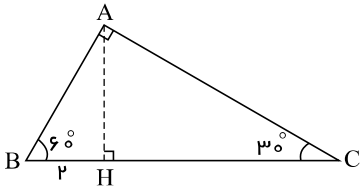
$$\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۸}x^۲} = ۲$$

۴۳ - گزینه ۲ همان‌طور که می‌دانیم مساحت مثلث ABC را می‌توان از روابط زیر پیدا کرد.

$$\begin{cases} S = \frac{۱}{۲} AB \times AC \times \sin ۶۰^\circ \\ S = \frac{۱}{۲} AB \times BC \times \sin ۴۵^\circ \end{cases} \Rightarrow AC \times \sin ۶۰^\circ = BC \times \sin ۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow ۱۰\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = BC \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow ۳۰ = \sqrt{۲}BC \Rightarrow BC = \frac{۳۰}{\sqrt{۲}} \Rightarrow BC = ۱۵\sqrt{۲}$$

۴۴ - گزینه ۳



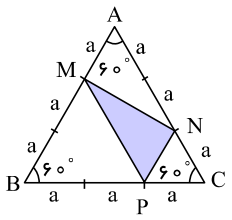
$$\tan ۶۰^\circ = \frac{AH}{۲} = \sqrt{۳} \Rightarrow AH = ۲\sqrt{۳}$$

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{AH}{AC} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۲\sqrt{۳}}{AC} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow AC = ۴\sqrt{۳}$$

$$AC^۲ = AH^۲ + HC^۲ \Rightarrow ۴۸ = ۱۲ + HC^۲ \Rightarrow HC^۲ = ۳۶ \Rightarrow HC = ۶$$

$$S_{\triangle AHC} = \frac{۱}{۲} \times AH \times HC = \frac{۱}{۲} \times ۲\sqrt{۳} \times ۶ = ۶\sqrt{۳}$$

۴۵ - گزینه ۲ اگر از کل مثلث، سه تا مثلث هاشورنخورده را کم کنیم، مساحت قسمت هاشورخورده به‌دست می‌آید.



$$S_{\triangle AMN} = \frac{۱}{۲} \times a \times ۲a \times \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a^۲$$

$$S_{\triangle PNC} = \frac{۱}{۲} \times a \times a \times \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

$$S_{\triangle BMP} = \frac{۱}{۲} \times ۲a \times ۲a \times \sin ۶۰^\circ = \sqrt{۳}a^۲$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{۱}{۲} \times ۳a \times ۳a \times \sin ۶۰^\circ = \frac{۹\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

$$S_{\text{هاشورخورده}} = S_{\triangle ABC} - S_{\text{هاشورنخورده}}$$

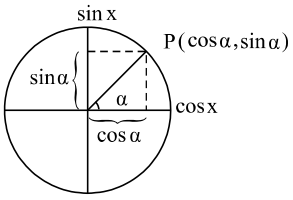
$$\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}a^۲ - (\frac{\sqrt{۳}}{۲}a^۲ + \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ + \sqrt{۳}a^۲)$$

$$= \frac{۹\sqrt{۳}}{۴}a^۲ - \frac{۷\sqrt{۳}}{۴}a^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a^۲$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\text{هاشورخورده}}}{S_{\text{کل}}} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}a^۲}{\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}a^۲} = \frac{۲}{۹}$$

۴۶ - گزینه ۲

می دانیم



$$۱ + \tan^۲ \alpha = \frac{۱}{\cos^۲ \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-۲\sqrt{۵}}{۵}$$

$$۱ + \tan^۲ \alpha = \frac{۱}{\cos^۲ \alpha} \Rightarrow ۱ + \frac{۴}{۵} = \frac{۹}{۵} = \frac{۱}{\cos^۲ \alpha} \Rightarrow \cos^۲ \alpha = \frac{۵}{۹} \Rightarrow \cos \alpha = \pm\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

$$\xrightarrow[\cos \alpha < ۰]{\alpha \text{ ربع چهارم}} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \frac{-۲\sqrt{۵}}{۵} = \frac{\sin \alpha}{\frac{-\sqrt{۵}}{۳}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{-۲\sqrt{۵} \times -\sqrt{۵}}{۵ \times ۳} = \frac{۲}{۳}$$

مجموع مؤلفه‌ها: $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{۲}{۳} - \frac{\sqrt{۵}}{۳} = \frac{۲ - \sqrt{۵}}{۳}$

۴۷ - گزینه ۱

می‌دانیم: $\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$ ، $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱ \Rightarrow \sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ x \Rightarrow \sin x = \pm\sqrt{۱ - \cos^۲ x} = \pm\sqrt{۱ - (\frac{۲}{۳})^۲}$$

$$= \pm\sqrt{۱ - \frac{۴}{۹}} = \pm\sqrt{\frac{۵}{۹}} = \pm\frac{\sqrt{۵}}{۳} \xrightarrow[\sin x > ۰]{x \text{ ربع اول}} \sin x = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{۵}}{۳}}{\frac{۲}{۳}} = \frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

$$\cot x = \frac{۱}{\tan x} = \frac{۲}{\sqrt{۵}} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

$$۲\tan x - ۵\cot x = ۲ \times \frac{\sqrt{۵}}{۲} - ۵ \times \frac{۲\sqrt{۵}}{۵} = \sqrt{۵} - ۲\sqrt{۵} = -\sqrt{۵}$$

۴۸ - گزینه ۴

$$\frac{۱}{۱-\sin\theta} + \frac{۱}{۱+\sin\theta} - ۲\tan^۲\theta = \frac{۱+\sin\theta+۱-\sin\theta}{(۱-\sin\theta)(۱+\sin\theta)} - ۲\tan^۲\theta$$

$$= \frac{۲}{۱-\sin^۲\theta} - \frac{۲\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta} = \frac{۲}{\cos^۲\theta} - \frac{۲\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta} = \frac{۲-۲\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}$$

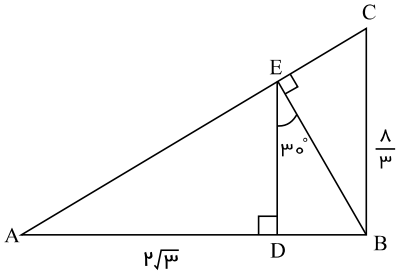
$$= \frac{۲(۱-\sin^۲\theta)}{\cos^۲\theta} = \frac{۲\cos^۲\theta}{\cos^۲\theta} = ۲$$

۴۹ - گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{\frac{۱}{\cos^۲ x} = ۱ + \tan^۲ x}$

$$A = (\frac{۱}{\cos^۲ x})^۳ - ۳\tan^۲ x(\frac{۱}{\cos^۲ x}) = (۱+\tan^۲ x)^۳ - ۳\tan^۲ x(۱+\tan^۲ x)$$

$$A = ۱ + ۳\tan^۲ x + ۳\tan^۴ x + \tan^۶ x - ۳\tan^۲ x - ۳\tan^۴ x = ۱ + \tan^۶ x$$

۵۰ - گزینه ۳



$$A\hat{E}D = ۱۸۰^\circ - ۹۰^\circ - ۳۰^\circ = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۳۰^\circ$$

$$\tan\hat{A} = \frac{ED}{AD} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{ED}{۲\sqrt{۳}} \Rightarrow ED = ۲$$

$$\sin\hat{A} = \frac{ED}{AE} \Rightarrow ۱۲ = \frac{۲}{AE} \Rightarrow AE = ۴$$

$$\cos(D\hat{E}B) = \frac{ED}{EB} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۲}{EB} \Rightarrow EB = \frac{۴}{\sqrt{۳}} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

طبق قضیهٔ فیثاغورس در $\overset{\Delta}{BEC}$:

$$EC^۲ + BE^۲ = BC^۲ \Rightarrow EC^۲ + \frac{۱۶}{۳} = \frac{۶۴}{۹}$$

$$\Rightarrow EC^۲ = \frac{۱۶}{۹} \Rightarrow EC = \frac{۴}{۳} \Rightarrow AC = AE + EC = ۴ + \frac{۴}{۳} = \frac{۱۶}{۳}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۹ - ۴	۱۷ - ۴	۲۵ - ۳	۳۳ - ۲	۴۱ - ۴	۴۹ - ۴
۲ - ۲	۱۰ - ۱	۱۸ - ۱	۲۶ - ۲	۳۴ - ۳	۴۲ - ۱	۵۰ - ۳
۳ - ۳	۱۱ - ۳	۱۹ - ۲	۲۷ - ۲	۳۵ - ۳	۴۳ - ۲	
۴ - ۳	۱۲ - ۱	۲۰ - ۳	۲۸ - ۱	۳۶ - ۲	۴۴ - ۳	
۵ - ۲	۱۳ - ۳	۲۱ - ۳	۲۹ - ۱	۳۷ - ۳	۴۵ - ۲	
۶ - ۴	۱۴ - ۱	۲۲ - ۴	۳۰ - ۲	۳۸ - ۲	۴۶ - ۲	
۷ - ۲	۱۵ - ۳	۲۳ - ۴	۳۱ - ۳	۳۹ - ۲	۴۷ - ۱	
۸ - ۱	۱۶ - ۱	۲۴ - ۴	۳۲ - ۲	۴۰ - ۳	۴۸ - ۴	