نام و نام خانوادگی:

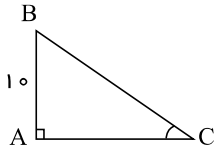
پایه : دهم

نام آزمون: ریاضی ۱

تاریخ آزمون: ۱۳۹۸/۱۲/۱۵

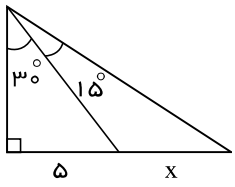
فاخران

۱ - مساحت مثلث ABC کدام است؟ $\left(\cos C = \frac{\sqrt{۴۶}}{۷}\right)$



① $۱۰۰\sqrt{\frac{۴۶}{۳}}$ ② $۵۰\sqrt{\frac{۴۶}{۳}}$ ③ $۱۰۰\sqrt{\frac{۳}{۴۶}}$ ④ $۵۰\sqrt{\frac{۳}{۴۶}}$

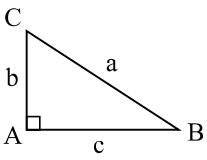
۲ - اگر وتر مثلث بزرگ را در شکل مقابل y بنامیم، حاصل $x+y$ کدامست؟!



① $۵(۲\sqrt{۳}-۱)$ ② $۵(-۲\sqrt{۳}+۱)$

③ $۵(\sqrt{۳}-۱+۲\sqrt{\frac{۳}{۲}})$ ④ $۵(-\sqrt{۳}+۱-۲\sqrt{\frac{۳}{۲}})$

۳ - مثلث قائم‌الزاویه ABC در رأس A قائمه است; حاصل $\frac{\tan^۲ C}{\frac{۱}{\sin B}\times \cot B}$ کدام است؟

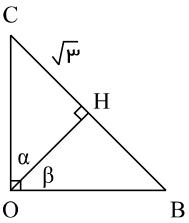


① $\sin C$ ② $\cos C$ ③ $\tan C$ ④ $\cot C$

۴ - مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC در رأس A قائمه است; حاصل $\frac{\sin\left(\frac{۲(B+C)}{۳}\right)}{\cos\left(\frac{(B+C)}{۳}\right)}$ کدام است؟

① ۱ ② $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ③ $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ④ $\frac{۱}{۲}$

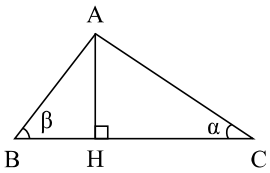
۵ - اگر $BC = ۳$ باشد، $(OC^۲)$ کدام است؟



① $\sqrt{۳}$ ② ۳

③ $۳\sqrt{۳}$ ④ $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

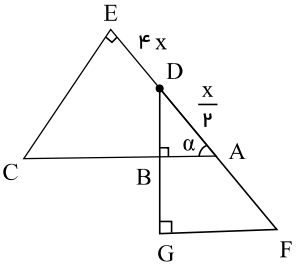
۶ - در شکل مقابل $\frac{BH}{AC}$ کدام است؟



① $\cot\beta \times \sin\alpha$ ② $\tan\beta \times \cos\alpha$

③ $\cot\alpha \ \cos\beta$ ④ $\tan\beta \ \cot\alpha$

۷ - اگر $AC = ۱۶AB$ باشد، $\cos\alpha$ کدام است؟



① $\frac{۳}{۴}$ ② $\frac{۱}{۴}$

③ $\frac{۳}{۵}$ ④ $\frac{۱}{۲}$

۸ - اگر انتهای کمان روبرو به زاویه‌ی α در ربع دوم، نقطه‌ی $(\frac{-۱}{۲}, y)$ باشد، $\tan\alpha$ کدام است؟

① $\sqrt{۳}$ ② $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ③ $-\sqrt{۳}$ ④ $\frac{-\sqrt{۳}}{۳}$

۹ - نقطه‌ی $A(۰,۱)$ ، روی دایره‌ی مثلثاتی به اندازه‌ی $\frac{۱۳\pi}{۴}$ رادیان در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌کند تا به نقطه‌ی A' برسد. مجموع طول و عرض نقطه‌ی A' کدام است؟

① صفر ② $\sqrt{۲}$ ③ $-\sqrt{۲}$ ④ $۲\sqrt{۲}$

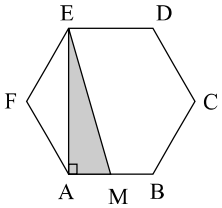
۱۰ - اگر $\tan x > ۰$ و $\sin x < ۰$ باشد، انتهای کمان x در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

① اول ② دوم ③ سوم ④ چهارم

۱۱ - حاصل $۱ + \cot^۲ ۶۰$ کدام است؟

① $۱ + \tan^۲ ۴۵$ ② $۱ - \tan^۲ ۳۰$ ③ $۱ + \tan^۲ ۳۰$ ④ $۲ + \tan^۲ ۴۵$

۱۲ - در شکل مقابل، طول هر ضلع شش ضلعی منتظم، ۲۰ و M وسط AB است مساحت مثلث AME کدام است؟



① $۴۰۰\sqrt{۳}$ ② $۲۰۰\sqrt{۳}$ ③ $۳۰۰\sqrt{۳}$ ④ $۱۰۰\sqrt{۳}$

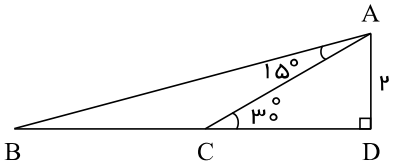
۱۳ - حدود k برای آنکه معادله‌ی $\sin x = k$ در فاصله‌ی $۶۰^\circ \leq x \leq ۱۲۰^\circ$ دارای جواب باشد، کدام است؟

① $\frac{۱}{۲} \leq k \leq \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ② $-۱ \leq k \leq ۱$ ③ $\frac{\sqrt{۳}}{۲} \leq k \leq ۱$ ④ $k > \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۴ - اگر $\tan x + \frac{۱}{\tan x} = k - ۱$ باشد، حدود k برای آنکه معادله جواب داشته باشد کدام است؟

① $-۱ < k < ۳$ ② $k \geq ۳$ یا $k \leq -۱$ ③ $k > ۲$ ④ $k < -\frac{-۱}{۲}$

۱۵ - در شکل زیر، مساحت مثلث ABC کدام است؟



① $۴\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ② ۴ ③ $۴\sqrt{۳}$ ④ $۴\tan ۱۵^\circ$

۱۶ - اگر $f(x) = \sqrt{x - ۶\sqrt{x-۹}}$ و $g(x) = \sqrt{x + ۶\sqrt{x-۹}}$ باشند و $x \geq ۱۸$ کدام مجموعه‌ی زیر برد $f - g$ می‌باشد؟

① $(-\infty, -۶]$ ② $[-۶, +\infty)$ ③ $\{-۶\}$ ④ $\mathbb{R} - \{-۶\}$

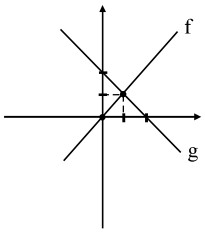
۱۷ - اگر $f(x) = \sqrt{x^۲ - ۴}$ و $g(x) = \sqrt{۱ - x^۲}$ باشد $D_{f\times g}$ کدام است؟

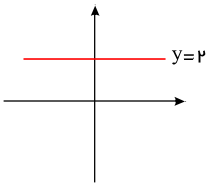
① $[-۲,-۱] \cup [۱,۲]$ ② $\mathbb{R} - [-۲,+۲]$ ③ $\mathbb{R} - [-۱,+۱]$ ④ $\varnothing$

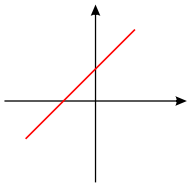
۱۸ - اگر برد تابع f برابر $[-۱,۵]$ باشد برد تابع $۳f(۴x+۱) - ۲$ کدام است؟

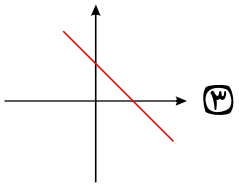
① $[-۳,۱۹)$ ② $[-۳,۱۳)$ ③ $[-۵,۱۹)$ ④ $[-۵,۱۳)$

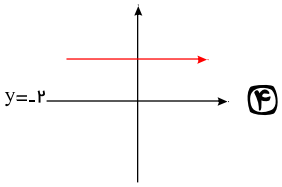
۱۹ - اگر نمودار f و g به صورت مقابل باشد نمودار $f+g$ کدام است؟



۱) 

۲) 

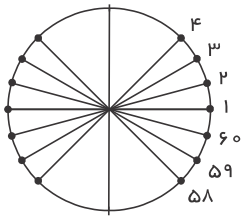
۳) 

۴) 

۲۰ - تفاضل دو زاویهٔ مکمل ۳۰° است. زاویهٔ کوچکتر برحسب رادیان کدام است؟

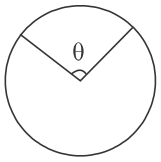
۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۶}$ ۳) $\frac{۵\pi}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷\pi}{۱۲}$

۲۱ - چرخ فلکی دارای ۶۰ کابین است. شخصی که در حالت اولیه در موقعیت کابین ۳ است بعد از دورانی به اندازه‌ی $\frac{۱۷۹\pi}{۶}$ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت در موقعیت کدام کابین قرار دارد؟



۱) ۱۷ ۲) ۵۸
۳) ۵۶ ۴) ۱۵

۲۲ - در شکل زیر زاویهٔ θ برابر ۵۵° می‌باشد. اگر طول کمان مقابل θ برابر ۲۲π باشد، شعاع دایره چقدر است؟



۱) ۱۴۴ ۲) ۱۸
۳) ۳۶ ۴) ۷۲

۲۳ - چرخ و فلکی دارای ۳۰ کابین است. و کابین‌ها از شمارهٔ ۱ تا ۳۰ شماره‌گذاری شده‌اند. اگر در آغاز حرکت در جهت خلاف عقربه‌های ساعت روی کابین شمارهٔ ۵ باشیم بعد از $\frac{۱۰۳\pi}{۱۵} rad$ دوران، در موقعیت کدام کابین هستیم.

۱) ۱۸ ۲) ۱۷ ۳) ۲۰ ۴) ۱۹

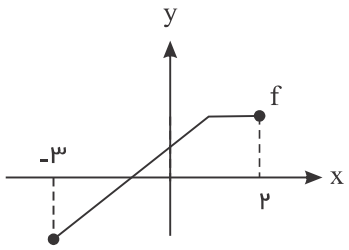
۲۴ - اگر عقربهٔ دقیقه‌شمار به اندازهٔ $\frac{۲۱\pi}{۲}$ رادیان بچرخد، عقربهٔ ساعت‌شمار چه زاویه‌ای را طی می‌نماید؟

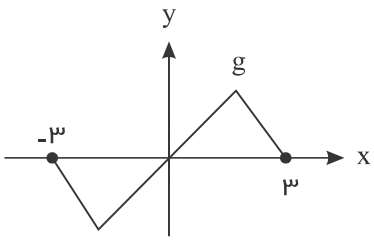
۱) $\frac{۵\pi}{۸}$ ۲) $\frac{۷\pi}{۸}$ ۳) $\frac{۹\pi}{۸}$ ۴) $\frac{۱۱\pi}{۸}$

۲۵ - اگر داشته باشیم $f(x)=\sqrt{۳-x}$ و $g(x)=\sqrt{x-۱}$، دامنهٔ تابع $h(x)=\frac{f(x)+g(x)}{g(x)}$ شامل چند عدد صحیح می‌باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

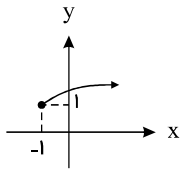
۲۶- با توجه به نمودار تابع‌های f و g دامنهٔ تابع $\frac{۲f^۲}{g}$ کدام است؟





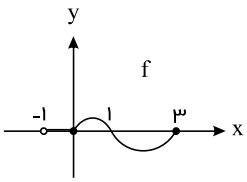
۱) $(۰,۳)$
۲) $[۰,۳)$
۳) $[-۳,۲]$
۴) $(-۳,۰)\cup(۰,۲]$

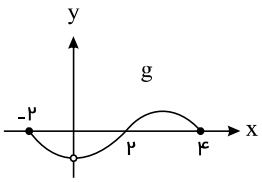
۲۷- نمودار تابع $f(x)=a+\sqrt{x+b}$ به‌صورت زیر است. $f(\frac{۵}{۴})$ کدام است؟



۱) ۲
۲) $\frac{۵}{۲}$
۳) ۳
۴) $\frac{۷}{۲}$

۲۸- با توجه به نمودار توابع f و g، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{(\frac{f}{g})(x)}$ کدام است؟





۱) $(-۱,۰)\cup[۱,۲)\cup\{۳\}$
۲) $(-۱,۳)-\{۰\}$
۳) $(۱,۲)$
۴) $(-۱,۰)$

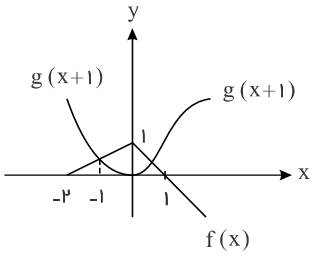
۲۹- شعاع چرخ جلویی تراکتوری ۱ متر و شعاع چرخ عقب آن ۱۲۰ سانتی‌متر است. وقتی چرخ جلو ۷۰ درجه می‌چرخد، چرخ عقب تقریباً چند درجه خواهد چرخید؟

۱) ۵۶
۲) ۵۸
۳) ۶۶
۴) ۶۸

۳۰- اگر f و g دو تابع خطی باشند و $(f+g)(x)=۳x+۱$ ، $(f-g)(x)=۲-x$ باشد، مقدار $\left(\frac{f}{g}\right)(۶)$ کدام است؟

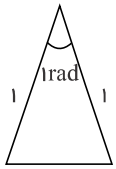
۱) $\frac{۹}{۱۱}$
۲) $\frac{۲۵}{۱۸}$
۳) $\frac{۱۷}{۱۴}$
۴) $\frac{۱۵}{۲۳}$

۳۱- نمودار تابع $y_۱=f(x)$ و $y_۲=g(x+۱)$ به شکل زیر است. اگر $h(x)=(f+g)(x)$ باشد، آنگاه حاصل $h(۰)$ کدام است؟



۱) ۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

۳۲- در مثلث متساوی‌الساقین زیر به طول ساق‌های یک واحد، زاویهٔ بین دو ساق برابر ۱ رادیان است. در این صورت طول قاعدهٔ مثلث چند واحد است؟



۱) برابر ۱ واحد است.
۲) بیشتر از ۱ واحد است.
۳) کمتر از ۱ واحد است.
۴) همهٔ گزینه‌ها می‌توانند صحیح باشند.

۳۳- از به هم وصل کردن انتهای کمان‌های $\frac{۱۱\pi}{۹}$ ، $\frac{۳۱\pi}{۱۸}$ و $\frac{۱۳\pi}{۱۸}$ روی دایرهٔ مثلثاتی چه نوع مثلثی پدید می‌آید؟

۱) فقط قائم‌الزاویه
۲) فقط متساوی‌الساقین
۳) متساوی‌الاضلاع
۴) قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین

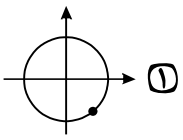
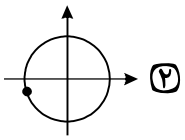
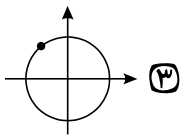
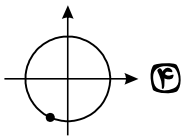
۳۴- اگر $f=\{(۱,۲),(۰,a^۲),(a,۰)\}$ ، $g=\{(-۱,۲),(-۲,۱),(۰,۴)\}$ و دامنهٔ $f-g$ برابر $\{۰,-۲\}$ باشد، آنگاه تابع $\frac{g}{f}$ کدام است؟

① $\{(-۲,۱)\}$ ② $\{(-۲,۰)\}$ ③ $\{(۰,۴)\}$ ④ $\{(۰,۱)\}$

۳۵- ماهواره‌ای روی مداری دایره‌ای شکل در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت در هر شبانه‌روز یک دور مسیر دایره‌ای را طی می‌کند. زاویه‌ای که این ماهواره نسبت به مرکز مسیر دایره‌ای در مدت ۵ ساعت طی می‌کند، تقریباً چند رادیان است؟ $(\pi=۳/۱۴)$

① ۱ ② ۱/۲ ③ ۱/۳ ④ ۱/۴

۳۶- مجموع دو زاویه ۷۲° و تفاضل آن دو زاویه $\frac{\pi}{۱۵}$ رادیان می‌باشد. اگر اندازهٔ زاویهٔ بزرگتر برابر x درجه باشد، زاویهٔ $(۵x-۱۰^\circ)$ به طور تقریبی روی دایرهٔ مثلثاتی کدام است؟

①  ②  ③  ④ 

۳۷- اگر $f(x)=\sqrt{۴-x}$ و $g=\{(۱,۲),(۴,۷),(۳,۵),(۰,-۴),(۲,۰)\}$ باشد، آن‌گاه دامنهٔ تابع $\frac{f}{g^{-۱}}$ کدام است؟

① $\{۰,۲,۴\}$ ② $\{۰,۲\}$ ③ $\{۰,-۴\}$ ④ $\{۱,۲,-۴\}$

۳۸- متمم و مکمل زاویهٔ ۲۰° برحسب رادیان، به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟

① $\frac{۵\pi}{۱۸}$ و $\frac{۷\pi}{۹}$ ② $\frac{۷\pi}{۹}$ و $\frac{۸\pi}{۹}$ ③ $\frac{۷\pi}{۱۸}$ و $\frac{۱۰\pi}{۹}$ ④ $\frac{۷\pi}{۱۸}$ و $\frac{۸\pi}{۹}$

۳۹- اگر $f(x)=\begin{cases}x & ,x\geq ۱\\ ۱ & ,x<۱\end{cases}$ و $g(x)=\sqrt{۲-x^۲}$، آنگاه تعداد صفرهای تابع $f+g$ کدام است؟

① صفر ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

۴۰- اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g(x)=۱+\sqrt{x}$ باشد، آنگاه برد تابع $(g-f)(x)$ کدام است؟

① $(-\infty,۱]$ ② $\mathbb{R}$ ③ $[-۱,+\infty)$ ④ $[۰,+\infty)$

۴۱- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{-۲x+۶}$ به‌صورت بازهٔ $(-\infty,a]$ و $g(x)=|۲x-۳|$ باشد، حاصل $(f-g)(a)$ کدام است؟

① -۳ ② ۳ ③ -۲ ④ ۲

۴۲- اگر $f=\{(۱,۲),(۰,a^۲),(a,۰)\}$، $g=\{(-۱,۲),(-۲,۱),(۰,۴)\}$ و دامنهٔ $f-g$ برابر $\{۰,-۲\}$ باشد، آنگاه تابع $\frac{g}{f}$ کدام است؟

① $\{(-۲,۱)\}$ ② $\{(-۲,۰)\}$ ③ $\{(۰,۴)\}$ ④ $\{(۰,۱)\}$

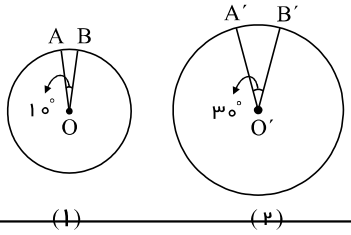
۴۳- اگر f و g دو تابع خطی باشند به‌طوری‌که $\begin{cases}(f+g)(x)=۲x+۱\\ (g-f)(x)=x-۲\end{cases}$، حاصل $f(۱)+g(۳)$ کدام است؟

① ۲/۵ ② ۳ ③ ۳/۵ ④ ۶

۴۴- مکمل زاویهٔ $\frac{۵\pi}{۱۲}$ رادیان چند درجه است؟

① ۷۵ ② ۱۰۵ ③ ۱۵ ④ ۹۰

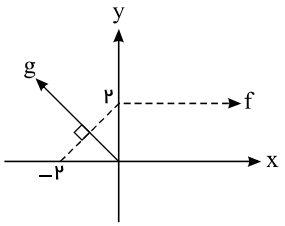
۴۵- مطابق شکل، اگر مساحت دایرهٔ (۲) سه برابر مساحت دایرهٔ (۱) باشد، حاصل $\frac{\overset{\frown}{A'B'}}{\overset{\frown}{AB}}$ کدام است؟



(۱) (۲)

① $\sqrt{۳}$ ② $۳\sqrt{۳}$ ③ ۳ ④ ۴

۴۶- اگر نمودارهای f و g به‌صورت زیر باشند، برد تابع $f+۲g$ کدام است؟ (تابع f به‌صورت خط‌چین و تابع g با خط پر برای تمایز دو تابع رسم شده است.)



۱) $[-۲,۰]$

۲) $[۲,۴]$

۳) $[۲,۵)$

۴) $[-۲,۲]$

۴۷- اگر $f(x)=۴x-۲$ و $g=\{(۲,۶),(۳,۰),(۴,۱),(۵,۲)\}$ باشد، تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟

۱) $\{(۲,\frac{۱}{۲}),(۴,۷),(۵,۹)\}$

۲) $\{(۲,۱),(۴,۱۴),(۵,۱۱)\}$

۳) $\{(۲,۱),(۴,۱۴),(۵,۹)\}$

۴) $\{(۲,۱),(۳,۰),(۴,۱۴),(۵,۱۱)\}$

۴۸- کدام گزینه درست است؟ (زوایا برحسب رادیان است.)

۱) $\sin ۲ < \sin ۱ < \sin ۳$

۲) $\sin ۶ < \sin ۴ < \sin ۵$

۳) $\cos ۶ > \cos ۵ > \cos ۳$

۴) $\cos ۶ > \cos ۲ > \cos ۱$

۴۹- اگر مجموع و تفاضل دو زاویه به‌ترتیب $\frac{۲۵\pi}{۱۸}$ و $\frac{۲\pi}{۵}$ رادیان باشد، مکمل زاویهٔ کوچک‌تر در کدام ناحیهٔ دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

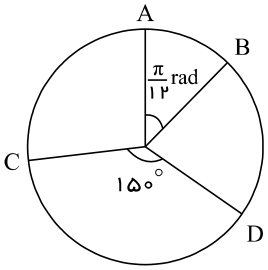
۱) ناحیهٔ اول

۲) ناحیهٔ دوم

۳) ناحیهٔ سوم

۴) ناحیهٔ چهارم

۵۰- در دایرهٔ روبه‌رو، اختلاف طول کمان‌های AB و CD کدام است؟ (شعاع = $\frac{۶}{\pi}$)



۱) ۴

۲) ۴٫۵

۳) ۵

۴) ۵٫۵

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲

$$\sin C = \sqrt{۱ - \cos^۲ C} = \sqrt{۱ - \frac{۴۶}{۴۹}} = \sqrt{\frac{۳}{۴۹}} = \frac{\sqrt{۳}}{۷}$$

$$\sin C = \frac{۱۰}{BC} = \frac{\sqrt{۳}}{۷} \Rightarrow BC = \frac{۷۰}{\sqrt{۳}}$$

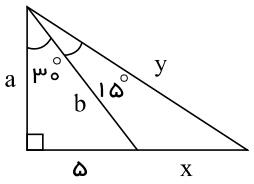
$$S = \frac{۱}{۲} AB \times BC \times \sin B$$

می‌دانیم سینوس و کسینوس دو زاویه متمم با هم برابرند؛ در مثلث ABC:

$$\widehat{A} = ۹۰ \ , \ \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = ۱۸۰ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = ۹۰ \Rightarrow \sin B = \cos C$$

$$S = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times \frac{۷۰}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۴۶}}{۷} = ۵۰\sqrt{\frac{۴۶}{۳}}$$

۲ - گزینه ۳



$$\sin ۳۰ = \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{b} \Rightarrow b = ۱۰$$

$$\cos ۳۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{a}{۱۰} \Rightarrow a = ۵\sqrt{۳}$$

$$\cos ۴۵ = \frac{۵\sqrt{۳}}{y} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \rightarrow y = ۱۰\sqrt{\frac{۳}{۲}}$$

$$\sin ۴۵ = \frac{x + ۵}{۱۰\sqrt{\frac{۳}{۲}}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow x + ۵ = ۵\sqrt{۳} \rightarrow x = ۵\sqrt{۳} - ۵$$

$$x + y = ۵\sqrt{۳} - ۵ + ۱۰\sqrt{\frac{۳}{۲}} = ۵(\sqrt{۳} - ۱ + ۲\sqrt{\frac{۳}{۲}})$$

۳ - گزینه ۱

$$\tan^۲ C = \frac{c^۲}{b^۲}$$

$$\sin B = \frac{b}{a} \rightarrow \frac{۱}{\sin B} = \frac{a}{b}$$

$$\cot B = \frac{c}{b}$$

$$\frac{\tan^۲ C}{\frac{۱}{\sin B} \times \cot B} = \frac{\frac{c^۲}{b^۲}}{\frac{a}{b} \times \frac{c}{b}} = \frac{\frac{c^۲}{b^۲}}{\frac{ac}{b^۲}} = \frac{c^۲}{ac} = \frac{c}{a} = \sin C$$

۴ - گزینه ۱

$$A + B + C = ۱۸۰ \xrightarrow{\widehat{A}=۹۰} B + C = ۹۰ \Rightarrow \frac{B + C}{۳} = ۳۰$$

$$۲\frac{(B + C)}{۳} = ۶۰$$

$$\frac{\sin\left(\frac{۲(B+C)}{۳}\right)}{\cos\left(\frac{(B+C)}{۳}\right)} = \frac{\sin ۶۰}{\cos ۳۰} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = ۱$$

۵ - گزینه ۳

$\cos C$ را دو مثلث $\overset{\Delta}{OBC}$ و $\overset{\Delta}{OHC}$ می‌نویسیم:

$$\overset{\Delta}{OBC} : \cos C = \frac{OC}{BC}$$

$$\overset{\Delta}{OHC} : \cos C = \frac{CH}{OC}$$

$$\cos C = \frac{CH}{OC} = \frac{OC}{BC} \Rightarrow OC^{۲} = BC \cdot CH$$
$$OC^{۲} = ۳ \times \sqrt{۳} = ۳\sqrt{۳}$$

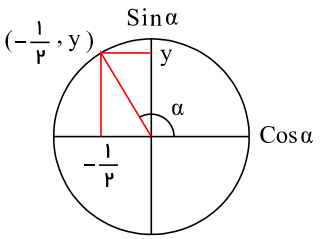
۶ - گزینه ۱

$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha = \dfrac{AH}{AC} \\ \cot\beta = \dfrac{BH}{AH} \end{array}\right. \Rightarrow \cot\ \beta \times \sin\alpha = \frac{BH}{AH} \times \frac{AH}{AC} = \frac{BH}{AC}$$

۷ - گزینه ۱ $\cos\alpha$ را با استفاده از دو مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{ABD}$ و $\overset{\Delta}{AEC}$ می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABD} : \cos\alpha = \dfrac{AB}{\frac{x}{۲}} \\ \overset{\Delta}{AEC} : \cos\alpha = \dfrac{\frac{۹x}{۲}}{AC} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{AB}{\frac{x}{۲}} = \frac{\frac{۹x}{۲}}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = \frac{۹x^{۲}}{۴}$$
$$۱۶AB = AC \Rightarrow AB \cdot ۱۶AB = \frac{۹x^{۲}}{۴} \Rightarrow ۱۶AB^{۲} = \frac{۹x^{۲}}{۴} \xrightarrow{\sqrt{\ }} ۴AB = \frac{۳x}{۲}$$
$$\Rightarrow AB = \frac{۳x}{۸} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{AB}{\frac{x}{۲}} = \frac{\frac{۳x}{۸}}{\frac{x}{۲}} = \frac{۳}{۴}$$

۸ - گزینه ۳ باتوجه به دایره مثلثاتی:



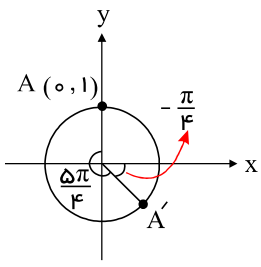
$$\cos\alpha = \frac{-۱}{۲}$$
$$-\cos\alpha = \frac{۱}{۲} = \cos ۶۰$$
$$-\cos\alpha = \cos(۱۸۰ - \alpha)$$
$$۱۸۰ - \alpha = ۶۰ \Rightarrow \alpha = ۱۲۰$$
$$\sin ۱۲۰ = \sin(۱۸۰ - ۱۲۰) = \sin ۶۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\tan\alpha = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{-\frac{۱}{۲}} = -\sqrt{۳}$$

۹ - گزینه ۱ اگر دوران در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد، علامت زاویه مثبت است، پس زاویه‌ی دوران برابر است با:

$$\frac{۱۳\pi}{۴} = ۲\pi + \frac{۵\pi}{۴}$$

با دوران به اندازه‌ی ۲π ، نقطه‌ی A به موقعیت اولیه‌ی خود باز می‌گردد، پس کافیست نقطه‌ی A را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت به اندازه‌ی $\frac{۵\pi}{۴} = \pi + \frac{\pi}{۴}$ دوران دهیم تا نقطه‌ی A' به دست آید.

مطابق شکل داریم:



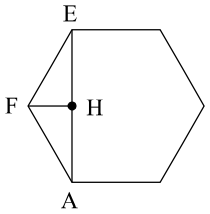
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_{A'} = \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ y_{A'} = \sin(-\frac{\pi}{۴}) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{array}\right. \Rightarrow x_{A'} + y_{A'} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰$$

۱۰ - گزینه ۳ در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی $\tan x > ۰$ و $\sin x < ۰$ است.

۱۱ - گزینه ۳

$$\cot ۶۰ = \frac{\cos ۶۰}{\sin ۶۰} = \frac{\sin ۳۰}{\cos ۳۰} = \tan ۳۰ \Rightarrow ۱ + \cot^{۲} ۶۰ = ۱ + \tan^{۲} ۳۰$$

۱۲ - گزینه ۴ با در نظر گرفتن H مثلث EAF متساوی الساقین است پس FH هم نیمساز است، هم میانه و هم ارتفاع:



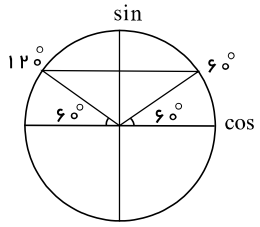
$$\sin E\widehat{F}H = \frac{EH}{EF} \to \sin ۶۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{EH}{۲۰} \to EH = ۱۰\sqrt{۳}$$

$$EA = ۲EH = ۲ \times ۱۰\sqrt{۳} = ۲۰\sqrt{۳}$$

$$S_{\overset{\Delta}{EAM}} = \frac{EA \times AM}{۲} = \frac{۲۰\sqrt{۳} \times ۱۰}{۲} = ۱۰۰\sqrt{۳}$$

۱۳ - گزینه ۳

باتوجه به شکل:



$$\frac{\sqrt{۳}}{۲} \le \sin x \le ۱$$

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲} \le k \le ۱$$

۱۴ - گزینه ۲

می‌دانیم:

$$\begin{cases} a > ۰ \to ۲ \le a + \frac{۱}{a} \\ a < ۰ \to a + \frac{۱}{a} \le -۲ \end{cases}$$

داریم:

$$\begin{cases} \tan x > ۰ \to ۲ \le \tan x + \frac{۱}{\tan x} : ۲ \le k - ۱ \to ۳ \le k \\ \tan x < ۰ \to \tan x + \frac{۱}{\tan x} \le -۲ : k - ۱ \le -۲ \to k \le -۱ \end{cases}$$

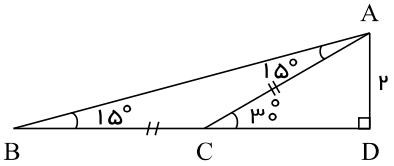
۱۵ - گزینه ۲

$$\overset{\Delta}{ADC} : \sin ۳۰^\circ = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AC = \frac{۲}{\frac{۱}{۲}} = ۴$$

$$\overset{\Delta}{ADC} : C\widehat{A}D = ۹۰^\circ - ۳۰^\circ = ۶۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{ABD} : \widehat{B} = ۹۰^\circ - \widehat{A} = ۹۰^\circ - (۶۰^\circ + ۱۵^\circ) = ۱۵^\circ$$

پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است و شکل به صورت زیر خواهد بود:



$$\Rightarrow AC = BC = ۴$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}BC \times AD = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۲ = ۴$$

۱۶ - گزینه ۳ برای حل باید ساختار تابع f و g تغییر نماید

$$f(x) = \sqrt{x - ۹ - ۶\sqrt{x-۹} + ۹} = \sqrt{(\sqrt{x-۹} - ۳)^۲} = |\sqrt{x-۹} - ۳|$$

$$g(x) = \sqrt{x - ۹ + ۶\sqrt{x-۹} + ۹} = \sqrt{(\sqrt{x-۹} + ۳)^۲} = |\sqrt{x-۹} + ۳|$$

حال باتوجه به شرط $x \ge ۱۸$ قدر مطلق‌ها را بر می‌داریم

$$f - g = \underbrace{|\sqrt{x-۹} - ۳|}_{+} - \underbrace{|\sqrt{x-۹} + ۳|}_{+} = -۶ \to R_f = \{-۶\}$$

۱۷ - گزینه ۴

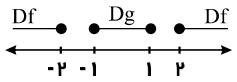
$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

پس باید ابتدا دامنه‌ی f و g را تعیین نمائیم

$$f(x) = \sqrt{x^۲ - ۴} \to x^۲ - ۴ \ge ۰ \to x^۲ \ge ۴ \to |x| \ge ۲ \to \begin{cases} x \ge ۲ \\ x \le -۲ \end{cases}$$

$$g(x) = \sqrt{۱ - x^۲} \to ۱ - x^۲ \ge ۰ \to x^۲ \le ۱ \to |x| \le ۱ \to -۱ \le x \le ۱$$

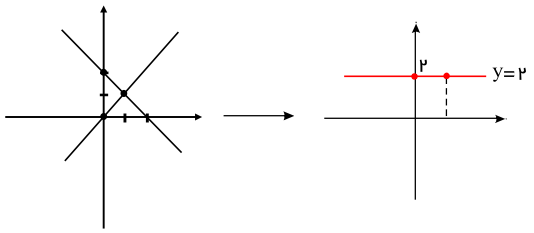
$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \varnothing$$



۱۸ - گزینه ۴ در این حالت ارتفاع نقاط یا همان سه برابر شده و ۲ واحد از آن کم می‌شود پس:

$$R_f=[-۱,۵)\xrightarrow{\times ۳}[-۳,۱۵)\xrightarrow{-۲}[-۵,۱۳)$$

۱۹ - گزینه ۱ باتوجه به اینکه f و g هر دو توابع خطی هستند پس $f+g$ نیز تابعی خطی است. پس می‌توان دو نقطه‌ی آن را مشخص کرد و به هم وصل کرد.



۲۰ - گزینه ۳ مجموع دو زاویهٔ مکمل برابر ۱۸۰° است پس داریم:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=۱۸۰^\circ\\ \alpha-\beta=۳۰^\circ\end{cases}\xrightarrow{+}۲\alpha=۲۱۰^\circ\Rightarrow\begin{cases}\hat{\alpha}=۱۰۵^\circ\\ \hat{\beta}=۷۵^\circ\end{cases}$$

حال باید زاویهٔ $\hat{\beta}$ برحسب رادیان بیان شود:

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\rightarrow\frac{۷۵}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\rightarrow R=\frac{۵\pi}{۱۲}rad$$

۲۱ - گزینه ۲ قدم اول محاسبهٔ فاصلهٔ بین دو کابین است:

$$۲\pi\div ۶۰=\frac{\pi}{۳۰}rad$$

حال می‌توان کمان $\frac{۱۷۹\pi}{۶}$ را به فرم زیر نوشت: $\frac{۱۷۹\pi}{۶}=\frac{۱۸۰\pi-\pi}{۶}$

$$=۳۰\pi-\frac{\pi}{۶}=\underset{\text{دوران کامل}\downarrow}{۱۵}\times(۲\pi)-۵\times\frac{\pi}{۳۰}$$

باتوجه به مدل نوشته شده کابین مورد نظر ۱۵ دوران کامل انجام می‌دهد و به جای اولیهٔ خود باز می‌گردد. باتوجه به بخش $(-۵\times\frac{\pi}{۳۰})$ باید ۵ کابین به عقب برگردیم، که نهایتاً به کابین شمارهٔ ۵۸ می‌رسیم.

۲۲ - گزینه ۴ قدم اول تبدیل زاویه به رادیان است

$$\frac{\alpha}{۱۸۰}=\frac{\theta}{\pi}\rightarrow\frac{۵۵}{۱۸۰}=\frac{\theta}{\pi}\rightarrow\frac{۱۱}{۳۶}=\frac{\theta}{\pi}\rightarrow\theta=\frac{۱۱\pi}{۳۶}rad$$

حال می‌توان شعاع را با رابطهٔ زیر محاسبه نمود

$$L=r\cdot\theta\rightarrow ۲۲\pi=r\times\frac{۱۱\pi}{۳۶}\rightarrow\frac{۱}{۳۶}r=۲\rightarrow r=۷۲$$

۲۳ - گزینه ۱ چون ۳۰ کابین داریم پس فاصلهٔ بین دو کابین $\alpha=\frac{۲\pi}{۳۰}=\frac{\pi}{۱۵}$ خواهد بود. از طرفی دوران چرخ فلک $\frac{۱۰۳\pi}{۱۵}$ رادیان است و می‌توان نوشت:

$$\frac{۱۰۳\pi}{۱۵}=۶\pi+\frac{۱۳\pi}{۱۵}=\underset{\text{دوران کامل}\downarrow}{۳}(۲\pi)+۱۳\times\frac{\pi}{۱۵}$$

سه دوران کامل تأثیری در موقعیت کابین ندارد. اما بعد از سه دوران کامل به اندازهٔ ۱۳ کابین بالا می‌رود. بنابراین موقعیت کابین ۱۳ + ۵ یا ۱۸ خواهد بود.

۲۴ - گزینه ۲ ابتدا باید محاسبه کرد عقربهٔ دقیقه‌شمار چند دور کامل و چه کسری را طی کرده است. زیرا هر دوران کامل عقربهٔ دقیقه‌شمار معادل یک ساعت کامل است.

دوران کامل $۵\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۴}(۲\pi)=۱۰\pi+\frac{\pi}{۲}=\frac{۲۰\pi+\pi}{۲}=\frac{۲۱\pi}{۲}$ دقیقه‌شمار $\theta_۱$

(۵ ساعت و ۱۵ دقیقه) $t=۵:۱۵'$ برحسب ساعت

فاصلهٔ بین هر دو عدد متوالی ساعت برابر $\frac{\pi}{۶}rad$ یا ۳۰° درجه است.

زاویهٔ طی شده بوسیله‌ی عقربهٔ ساعت‌شمار $\theta_۲=۵\frac{۱}{۴}\times\frac{\pi}{۶}=\frac{۲۱}{۴}\times\frac{\pi}{۶}=\frac{۲۱}{۲۴}\pi=\frac{۷\pi}{۸}rad$

۲۵ - گزینه ۳

قدم اول محاسبهٔ توابع f و g می‌باشد:

$$f(x)=\sqrt{۳-x}\Rightarrow ۳-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۳\Rightarrow D_f=(-\infty,۳]$$

$$g(x)=\sqrt{x-۱}\Rightarrow x-۱\geq ۰\Rightarrow x\geq ۱\Rightarrow D_g-[۱,+\infty)$$

در تابع h دامنهٔ صورت کسر اشتراک دامنهٔ توابع f و g می‌باشد.

$\Rightarrow D_f \cap D_g = [1,3]$

اما در رابطه با مخرج کسر تابع h، باید ریشه‌های g را از ان دامنه کم کنیم.

$g(x) \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

در نهایت دامنهٔ تابع h، برابر است با: $D_h = (1,3]$

که این بازه شامل ۲ عدد صحیح می‌باشد.

۲۶ - گزینه ۴ برای تعیین دامنه $\frac{2f^2}{g}$ ابتدا باید دامنهٔ $2f^2$ و g را تعیین نماییم. تصویر منحنی روی محور xها دامنه می‌باشد.

با توجه به نمودارها داریم:

$D_f = [-3,2] \rightarrow D_{2f^2} = [-3,2]$

$D_g = [-3,3]$

حل براساس رابطه داریم: $D_{\frac{2f^2}{g}} = D_{2f^2} \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$

$D_{\frac{2f^2}{g}} = [-3,2] \cap [-3,3] - \{0,+3,-3\} = [-3,2] - \{-3,0,3\} = (-3,0) \cup (0,2]$

۲۷ - گزینه ۲ برای محاسبهٔ پارامتر b می‌توان از دامنه استفاده کرد.

$D_f = [-1,+\infty) \rightarrow x \geqslant -1$

$f(x) = a + \sqrt{x+b} \rightarrow x + b \geq 0 \rightarrow x \geq -b \xrightarrow{x \geq -1} -b = -1$

$\boxed{b = 1}$

برای محاسبه پارامتر a مختصات نقطهٔ $(-1,1)$ در تابع جایگذاری می‌نماییم

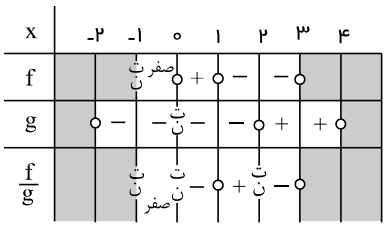
$1 = a + \sqrt{-1+1} \rightarrow a = 1 \rightarrow f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$

$f(\frac{5}{4}) = 1 + \sqrt{\frac{5}{4}+1} = 1 + \sqrt{\frac{9}{4}} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

۲۸ - گزینه ۱ باید عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$(\frac{f}{g})(x) \geq 0$

از تعیین علامت استفاده می‌کنیم:

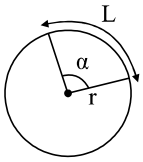


با توجه به جدول تعیین علامت داریم:

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \geq 0 \Rightarrow$ مجموعه جواب $= (-1,0) \cup [1,2) \cup \{3\}$

۲۹ - گزینه ۲ وقتی هر چرخ به اندازهٔ α رادیان می‌چرخد، مسافت طی شده برابر قسمتی از محیط دایره (طول کمانی از دایره) است که توسط α بریده می‌شود:

$\alpha = \frac{L}{r}$



وقتی چرخ جلو 70° می‌چرخد:

$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180^\circ} \Rightarrow \frac{R}{\pi} = \frac{70^\circ}{180^\circ} \Rightarrow R = \frac{7\pi}{18}$

$\alpha = \frac{L}{r} \xrightarrow[r=1]{\text{چرخ}} \frac{7\pi}{18} = \frac{L}{1} \Rightarrow L = \frac{7\pi}{18}$

چون چرخ عقب نیز همین مسافت را طی کرده است و با توجه به اینکه شعاع چرخ عقب ۱۲۰ سانتی‌متر معادل ۱٫۲ متر است. خواهیم داشت:

$\alpha' = \frac{L}{r'} \xrightarrow[r'=1,2m]{L=\frac{7\pi}{18}} \alpha' = \frac{\frac{7\pi}{18}}{1,2} = \frac{7\pi}{18 \times 1,2} = \frac{7\pi}{18 \times 1,2} \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{70^\circ}{1,2} \simeq 58^\circ$

۳۰ - گزینه ۴ برای محاسبه f و g می‌توان یک دستگاه تشکیل داد:

$$(f+g)(x)=۳x+۱ \rightarrow \begin{cases} f(x)+g(x)=۳x+۱ \\ f(x)-g(x)=۲-x \end{cases}$$

$$\boxplus \quad ۲f(x)=۲x+۳$$

$$\boxed{f(x)=\frac{۲x+۳}{۲}}$$

$$g(x)=(۳x+۱)-f(x)=۳x+۱-\frac{۲x+۳}{۲}$$

$$g(x)=\frac{۴x-۱}{۲} \rightarrow \boxed{g(x)=۲x-\frac{۱}{۲}}$$

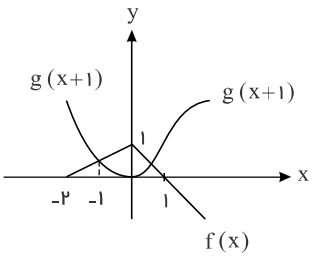
$$(\frac{f}{g})(۶)=\frac{f(۶)}{g(۶)}=\frac{\frac{۱۵}{۲}}{\frac{۲۳}{۲}}=\frac{۱۵}{۲۳}$$

۳۱ - گزینه ۳

$$h(x)=f(x)+g(x) \Rightarrow h(۰)=f(۰)+g(۰)$$

با توجه به نمودار $f(۰)=۱$ است. با توجه به اینکه نمودار $g(x+۱)$ را داریم، برای پیدا کردن $g(۰)$ باید x را برابر -۱ بگذاریم. ضابطهٔ پاره‌خطی که $g(۰)$ روی آن است را پیدا می‌کنیم. شیب خط برابر $m=\frac{۱}{۲}$ و عرض از مبدأ آن ۱ است.

$$y=\frac{۱}{۲}x+۱ \xrightarrow{x=-۱} y=-\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۱}{۲}=g(۰)$$



پس: $h(۰)=f(۰)+g(۰)=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$

۳۲ - گزینه ۳ زاویهٔ مرکزی در یک دایره با کمان روبروی خود برابر است.

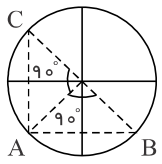
پس طول کمان مقابل زاویهٔ مورد نظر هم یک رادیان است.

و وتر متناظر با آن کمان که قاعدهٔ مثلث هم می‌باشد، از خود و کمان کوچک‌تر است.

۳۳ - گزینه ۴ هر یک از زوایا را بر حسب درجه می‌نویسیم:

$$A=\frac{۱۱\pi}{۹}=۲۲۰^\circ \ , \ B=\frac{۳۱\pi}{۱۸}=۳۱۰^\circ \ , \ C=\frac{۱۳\pi}{۱۸}=۱۳۰^\circ$$

هریک از زوایا را روی دایره نمایش می‌دهیم:



مثلث ABC قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

۳۴ - گزینه ۴ ابتدا باید دامنه تابع $f-g$ را محاسبه نماییم و کافیست بین دامنه اشتراک بگیریم

$$D_{f-g}=D_f \cap D_g=\{۱,۰,a\} \cap \{-۱,-۲,۰\}=\{۰,-۲\} \rightarrow a=-۲$$

$$f=\{(۱,۲),(۰,۴),(-۲,۰)\} \qquad g=\{(-۱,۲),(-۲,۱),(۰,۴)\}$$

حال باید $x=۰$, $x=-۲$ را در تابع جایگذاری نماییم:

$$x=۰ \rightarrow y=\frac{g(۰)}{f(۰)}=\frac{۴}{۴}=۱$$

$$x=-۲ \rightarrow y=\frac{g(-۲)}{f(-۲)}=\frac{۱}{۰} \quad \text{تعریف نشده} \quad \rightarrow \frac{g}{f}=\{(۰,۱)\}$$

۳۵ - گزینه ۳ می‌دانیم هر شبانه‌روز ۲۴ ساعت است:

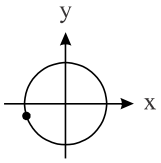
زاویهٔ طی شده در هر ساعت $=\frac{۳۶۰^\circ}{۲۴}=۱۵^\circ$

زاویهٔ طی شده در ۵ ساعت $=۱۵^\circ \times ۵=۷۵^\circ$

$$\frac{R}{\pi}=\frac{D}{180^\circ}\Rightarrow\frac{R}{\pi}=\frac{75^\circ}{180^\circ}$$
$$\Rightarrow R=\frac{75\pi}{180}\xrightarrow{\pi=3/14}R=\frac{75\times 3/14}{180}\simeq 1/3$$

۳۶ - گزینه ۲

$$\frac{R}{\pi}=\frac{D}{180^\circ}\Rightarrow\frac{\frac{\pi}{15}}{\pi}=\frac{D}{180^\circ}$$
$$\Rightarrow D=\frac{180^\circ}{15}=12^\circ\Rightarrow\begin{cases}x+y=72^\circ\\x-y=12^\circ\end{cases}\Rightarrow 2x=84^\circ$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x=42^\circ\ \text{زاویه بزرگتر}\\y=30^\circ\end{cases}\Rightarrow(5x-10^\circ)=200^\circ$$



۳۷ - گزینه ۲ ابتدا دامنهٔ تابع‌های f و g^{-1} را جداگانه به‌دست می‌آوریم: داریم:

$$f(x)=\sqrt{4-x}\Rightarrow 4-x\geq 0\Rightarrow x\leq 4\Rightarrow D_f=(-\infty,4]$$

حال از روی تابع g که زوج مرتب‌های آن داده شده، g^{-1} را تشکیل می‌دهیم (دقت می‌کنیم که تابع g یک به یک و وارون‌پذیر بوده و لذا g^{-1} قابل تعریف است.)

$$g=\{(1,2),(4,7),(3,5),(0,-4),(2,0)\}$$
$$\Rightarrow g^{-1}=\{(2,1),(7,4),(5,3),(-4,0),(0,2)\}$$
$$\Rightarrow D_{\frac{f}{g^{-1}}}=(D_f\cap D_{g^{-1}})-\left\{x|g^{-1}(x)=0\right\}=\{2,0,-4\}-\{-4\}=\{0,2\}$$

۳۸ - گزینه ۴ ابتدا متمم و مکمل 20° را محاسبه می‌نماییم:

متمم $\alpha+\beta=90^\circ$ متمم $\rightarrow 20^\circ+\beta=90^\circ\rightarrow\beta=70^\circ$

مکمل $\alpha+\gamma=180^\circ$ مکمل $\rightarrow 20^\circ+\gamma=180^\circ\rightarrow\gamma=160^\circ$

در این مرحله هر دو زاویه را برحسب rad می‌نویسیم:

متمم $\frac{D}{180^\circ}=\frac{R}{\pi}\rightarrow\frac{70^\circ}{180^\circ}=\frac{R}{\pi}\rightarrow R=\frac{7\pi}{18}$

مکمل $\frac{160^\circ}{180^\circ}=\frac{R}{\pi}\rightarrow R=\frac{16\pi}{18}=\frac{8\pi}{9}$

۳۹ - گزینه ۱

$$g(x)=\sqrt{2-x^2}\rightarrow D_g: 2-x^2\geq 0\rightarrow x^2\leq 2\rightarrow-\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}$$

$D_f=\mathbb{R}$ است پس $D_{f+g}=D_f\cap D_g=[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ است.

$$(f+g)(x)=\begin{cases}1+\sqrt{2-x^2} & -\sqrt{2}\leq x<1\\ x+\sqrt{2-x^2} & 1\leq x\leq\sqrt{2}\end{cases}$$

$$(f+g)(x)=0\rightarrow\begin{cases}\sqrt{2-x^2}=-1 & \text{امکان ندارد.}\\ \sqrt{2-x^2}=-x\rightarrow 2-x^2=x^2\rightarrow x^2=1\rightarrow\begin{cases}x=1 & \text{(غ ق ق (در معادله صدق نمی‌کند}\\ x=-1 & \text{(غ ق ق (باتوجه به بازه}\end{cases}\end{cases}$$

پس معادلهٔ $(f+g)(x)=0$ ریشه ندارد.

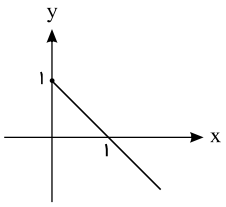
۴۰ - گزینه ۱

$$f(x)=x+\sqrt{x}\rightarrow x\geq 0\rightarrow D_f=[0,+\infty)$$

$$g(x)=1+\sqrt{x}\rightarrow x\geq 0\rightarrow D_g=[0,+\infty)$$

$$\rightarrow D_{(g-f)}=D_g\cap D_g=[0,+\infty)$$

$$(g-f)(x)=1+\sqrt{x}-(x+\sqrt{x})\rightarrow(g-f)(x)=1-x$$



$\rightarrow R_{(g-f)} = (-\infty, ۱]$

۴۱ - گزینه ۱

$f(x) = \sqrt{-۲x + ۶} \rightarrow -۲x + ۶ \geq ۰ \rightarrow ۶ \geq ۲x \rightarrow ۳ \geq x$

$\rightarrow D_f = (-\infty, ۳] = (-\infty, a] \rightarrow \boxed{a = ۳}$

$(f-g)(a) \overset{a=۳}{=\!=} (f-g)(۳) = f(۳) - g(۳) = \sqrt{-۲(۳) + ۶} - |۲(۳) - ۳|$

$= \sqrt{-۶ + ۶} - |۶ - ۳| = \sqrt{۰} - |۳| = ۰ - ۳ = -۳$

۴۲ - گزینه ۴

$D_f = \{۱, ۰, a\} \ , \ D_g = \{-۱, -۲, ۰\} \ , \ D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{۰, -۲\}$

$\rightarrow \boxed{a = -۲} \rightarrow f = \{(۱, ۲), (۰, ۴), (-۲, ۰)\}$

$D_{\frac{g}{f}} = (D_f \cap D_g) - \{x | f(x) = ۰\} = \{۰\}$

$\rightarrow (\frac{g}{f})(x) = \{(۰, \frac{۴}{۴})\} \rightarrow (\frac{g}{f})(x) = \{(۰, ۱)\}$

۴۳ - گزینه ۴

$\begin{cases} (f+g)(x) = ۲x + ۱ \\ (g-f)(x) = x - ۲ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x) + g(x) = ۲x + ۱ \\ g(x) - f(x) = x - ۲ \end{cases} \rightarrow ۲g(x) = ۳x - ۱ \rightarrow g(x) = \frac{۳}{۲}x - \frac{۱}{۲}$

$f(x) + g(x) = ۲x + ۱ \rightarrow f(x) + \frac{۳}{۲}x - \frac{۱}{۲} = ۲x + ۱ \rightarrow f(x) = \frac{۱}{۲}x + \frac{۳}{۲}$

پس: $f(۱) + g(۳) = \frac{۱}{۲}(۱) + \frac{۳}{۲} + \frac{۳}{۲}(۳) - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۲} + \frac{۹}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۶$

۴۴ - گزینه ۲

$\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{\frac{۵\pi}{۱۲}}{\pi} \rightarrow \frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{۵}{۱۲} \rightarrow \boxed{D = ۷۵^\circ}$

α را مکمل زاویهٔ $\frac{۵\pi}{۱۲}$ درنظر می‌گیریم؛ داریم:

$\rightarrow \alpha + ۷۵^\circ = ۱۸۰^\circ \rightarrow \boxed{\alpha = ۱۰۵^\circ}$

۴۵ - گزینه ۲

مساحت و شعاع دایرهٔ (۲) را به‌ترتیب با S' و R' و مساحت و شعاع دایرهٔ (۱) را به‌ترتیب با S و R نمایش می‌دهیم، داریم:

فرض سؤال: $\frac{S'}{S} = ۳ \rightarrow \frac{\pi R'^۲}{\pi R^۲} = ۳ \rightarrow \frac{R'}{R} = \sqrt{۳}$

$\frac{\overset{\frown}{A'B'}}{\overset{\frown}{AB}} = \frac{R'(\frac{\pi}{۶})}{R(\frac{\pi}{۱۸})} = \frac{R'}{R} \cdot ۳ = ۳\sqrt{۳}$

۴۶ - گزینه ۲

$f(x) = \begin{cases} x + ۲ & , -۲ \leq x \leq ۰ \\ ۲ & , ۰ < x \end{cases} \quad , \quad g(x) = -x \ , \ x \leq ۰$

($g(x)$ یک تابع خطی است که از مبدأ می‌گذرد و بر خط $y = x + ۲$ عمود است، یعنی شیبش -۱ است.)

دامنهٔ : $D_{f+۲g} = D_f \cap D_g = [-۲, +\infty) \cap (-\infty, ۰] \rightarrow D_{f+۲g} = [-۲, ۰]$

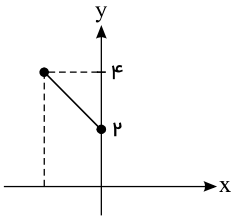
برای محاسبهٔ برد داریم:

$(f + ۲g)(x) = (x + ۲) + ۲(-x) = x + ۲ - ۲x \Rightarrow (f + ۲g)(x) = -x + ۲$

اکنون برد تابع را به ازای ابتدا و انتهای دامنه محاسبه می‌کنیم:

$(f + ۲g)(-۲) = ۴ \quad , \quad (f + ۲g)(۰) = ۲ \rightarrow R_{f+۲g} = [۲, ۴]$

و شکل آن بدین صورت است:



۴۷ - گزینه ۳ ابتدا دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = ۰\} = \mathbb{R} \cap \{۲, ۳, ۴, ۵\} - \{۳\} = \{۲, ۴, ۵\}$$

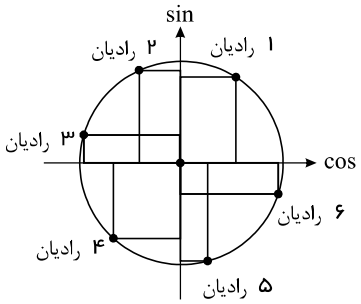
$$f(۲) = ۶\ ,\ f(۴) = ۱۴\ ,\ f(۵) = ۱۸$$

$$\Rightarrow \frac{f}{g} = \{(۲, \frac{۶}{۶}), (۴, \frac{۱۴}{۱}), (۵, \frac{۱۸}{۲})\} = \{(۲, ۱), (۴, ۱۴), (۵, ۹)\}$$

۴۸ - گزینه ۳ نکته: ۱ رادیان تقریباً ۵۷° است.

طبق دایرهٔ مثلثاتی نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۱ تا ۶ رادیان به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} \sin ۲ > \sin ۱ > \sin ۳ > \sin ۶ > \sin ۴ > \sin ۵ \\ \cos ۶ > \cos ۱ > \cos ۵ > \cos ۲ > \cos ۴ > \cos ۳ \end{cases}$$



لذا گزینهٔ «۳» صحیح است.

۴۹ - گزینه ۲ فرض می‌کنیم x و y دو زاویهٔ مفروض باشند. بنابراین:

$$\begin{cases} x + y = \frac{۲۵\pi}{۱۸} \xrightarrow{\text{تبدیل به درجه}} \frac{D_۱}{۱۸۰^\circ} = \frac{\frac{۲۵\pi}{۱۸}}{\pi} \Rightarrow D_۱ = ۲۵۰^\circ \\ \Rightarrow x + y = ۲۵۰^\circ \\ x - y = \frac{۲\pi}{۵} \xrightarrow{\text{تبدیل به درجه}} \frac{D_۲}{۱۸۰^\circ} = \frac{\frac{۲\pi}{۵}}{\pi} \Rightarrow D_۲ = ۷۲^\circ \\ \Rightarrow x - y = ۷۲^\circ \end{cases}$$

با حل دستگاه $\Rightarrow ۲x = ۳۲۲^\circ \Rightarrow x = ۱۶۱^\circ\ ,\ y = ۸۹^\circ$

مکمل زاویهٔ کوچکتر $\Rightarrow ۱۸۰^\circ - ۸۹^\circ = ۹۱^\circ \rightarrow$ بنابراین گزینهٔ «۲» صحیح است.

۵۰ - گزینه ۲ ۱۵۰° را برحسب رادیان حساب می‌کنیم:

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{۱۵۰^\circ}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{۵\pi}{۶}$$

طول دو کمان را حساب می‌کنیم:

$$\ell = R\theta \rightarrow \ell_{AB} = \frac{۶}{\pi} \times \frac{\pi}{۱۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\ell = R\theta \rightarrow \ell_{CD} = \frac{۶}{\pi} \times \frac{۵\pi}{۶} = ۵$$

پس:

$$\ell_{CD} - \ell_{AB} = ۵ - \frac{۱}{۲} = ۴٫۵$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۹ - ۱	۱۷ - ۴	۲۵ - ۳	۳۳ - ۴	۴۱ - ۱	۴۹ - ۲
۲ - ۳	۱۰ - ۳	۱۸ - ۴	۲۶ - ۴	۳۴ - ۴	۴۲ - ۴	۵۰ - ۲
۳ - ۱	۱۱ - ۳	۱۹ - ۱	۲۷ - ۲	۳۵ - ۳	۴۳ - ۴	
۴ - ۱	۱۲ - ۴	۲۰ - ۳	۲۸ - ۱	۳۶ - ۲	۴۴ - ۲	
۵ - ۳	۱۳ - ۳	۲۱ - ۲	۲۹ - ۲	۳۷ - ۲	۴۵ - ۲	
۶ - ۱	۱۴ - ۲	۲۲ - ۴	۳۰ - ۴	۳۸ - ۴	۴۶ - ۲	
۷ - ۱	۱۵ - ۲	۲۳ - ۱	۳۱ - ۳	۳۹ - ۱	۴۷ - ۳	
۸ - ۳	۱۶ - ۳	۲۴ - ۲	۳۲ - ۳	۴۰ - ۱	۴۸ - ۳	