نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۹۰ دقیقه

نام آزمون: ریاضی ۲

دبیرستان: فاخران

تاریخ آزمون: ۱۳۹۸/۰۷/۰۳

۱ در مثلث ABC داریم $AB = AC = ۱۷$ و $BC = ۱۶$، دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۲۵ واحد، خطی را که از رأس A موازی BC رسم شود، در نقطهٔ D قطع می‌کند. فاصلهٔ نقطهٔ C از خط BD، کدام است؟

۱) ۷٫۲ ۲) ۸٫۴ ۳) ۹٫۶ ۴) ۱۰٫۲

۲ خط d و صفحهٔ P و نقطهٔ A در خارج آن دو مفروض است. در رسم خطی گذرا از نقطهٔ A، موازی صفحهٔ P و متقاطع با خط d، در کدام وضعیت، خط و صفحه مفروض، تنها یک جواب دارد؟

۱) الزاماً عمود ۲) منطبق ۳) موازی ۴) متقاطع

۳ به‌ازای مقادیری از a و b، تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} x[x] & ; |x| < ۱ \\ ax + b & ; |x| \geq ۱ \end{cases}$، بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. a کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) -۱ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۴ به ازای کدام مقدار x و y ماتریس $\begin{bmatrix} x & -۱ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۱ & ۰ \\ y & ۱ \end{bmatrix}$، یک ماتریس قطری است؟

۱) $x = ۱ , y = -۷$ ۲) $x = ۲ , y = -۷$ ۳) $x = ۲ , y = -۵$ ۴) $x = ۱ , y = -۵$

۵ دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۳ & ۰ & ۵ \\ -۲ & ۶ & ۱ \end{bmatrix}$، کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۲۲ ۴) ۲۵

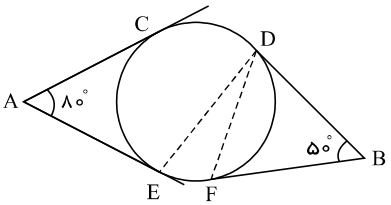
۶ به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر k، بازهٔ $(k - ۲, ۳k + ۲)$ زیرمجموعه‌ای از دامنهٔ تابع $f(x) = \frac{\sqrt{۹ - x^۲}}{x - ۱}$ است؟

۱) $(\frac{۱}{۳}, ۳]$ ۲) $[-\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳})$ ۳) $[-۱, \frac{۱}{۳})$ ۴) $[-۱, -\frac{۱}{۳})$

۷ اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$، از رابطهٔ $AX = B$، ماتریس X، کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱۳ \\ -۱ & -۸ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱۱ \\ ۱ & -۶ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱۳ \\ -۱ & -۶ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -۱ & -۱۲ \\ ۱ & ۸ \end{bmatrix}$

۸ در شکل زیر، اضلاع زاویه‌های A و B بر دایره مماس‌اند، اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد. زاویهٔ $E\hat{D}F$ چند درجه است؟



۱) ۲۵
۲) ۳۰
۳) ۳۵
۴) ۴۰

۹ نمودار تابع $y = x^۲ - x - ۳$ را ۲ واحد به طرف xهای منفی سپس ۹ واحد به طرف yهای منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه، زیر محور xها است؟

۱) $(-۵, ۲)$ ۲) $(-۵, ۳)$ ۳) $(-۲, ۳)$ ۴) $(-۲, ۵)$

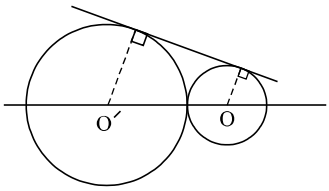
۱۰ گزارهٔ $(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge r)$، با کدام گزارهٔ زیر، هم‌ارزش است؟

۱) $p \vee (q \wedge r)$ ۲) $p \wedge (q \vee r)$ ۳) $r \Rightarrow (p \wedge q)$ ۴) $r \Rightarrow (p \vee q)$

۱۱ کدام گزارهٔ سوری زیر، دارای ارزش درست است؟

۱) $\forall x \in \mathbb{R} : x^۲ + ۲ > ۲x$ ۲) $\exists x \in \mathbb{R} : \frac{x-۱}{x} = x$ ۳) $\exists x \in \mathbb{R} : |x + \frac{۱}{x}| < ۲$ ۴) $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{x^۲ - ۴}{x - ۲} = x + ۲$

۱۲ دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۴ واحد مماس برهم‌اند. دایره به قطر OO' با مماس مشترک خارجی در نقطهٔ تماس M مشترک‌اند. فاصلهٔ M از نقطهٔ تماس دو دایره، کدام است؟



۱) ۶ ۲) ۶٫۵ ۳) ۷ ۴) ۷٫۵

۱۳ وتر مشترک دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱۷$ با دایرهٔ C گذرا بر نقطهٔ $(۶, -۱)$، بر خط به معادلهٔ $۲x - y = ۳$ منطبق است. شعاع دایرهٔ C، کدام است؟

۱) ۳ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) ۴

۱۴ با توجه به نمادهای «بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک» عدد $[۱۵۴, (۶۲۷, ۴۲۹)]$، کدام است؟

۱) ۴۶۲ ۲) ۴۷۸ ۳) ۵۰۶ ۴) ۹۲۴

۱۵ مجموعهٔ A دارای ۵۱۲ زیرمجموعه است، مجموعهٔ $A \cap B$ دارای ۳ عضو است. تعداد زیرمجموعه‌های $(B \cup A')'$، کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴

۱۶ در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، از برخورد نیمسازهای داخلی آن، دقیقاً کدام چهار ضلعی، حاصل می‌شود؟

۱) محاطی و محیطی ۲) فقط محاطی ۳) فقط محیطی ۴) نه محاطی و نه محیطی

۱۷ در مثلث ABC با اضلاع $AB = ۵$ و $AC = ۷$ و $BC = ۸$ واحد، نیمساز داخلی زاویهٔ A، نیمسازهای زاویهٔ داخلی و خارجی B را در O و O' قطع می‌کند. اندازهٔ تصویر قائم OO'، بر روی BC کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱٫۵ ۳) ۲ ۴) ۲٫۵

۱۸ اگر $f = \{(۱,۲), (۲,۵), (۳,۴), (۴,۶)\}$ و $g = \{(۲,۳), (۴,۲), (۵,۶), (۳,۱)\}$ دو تابع باشند، برد تابع $(g^{-۱}of) - f$، کدام است؟

۱) $\{-۱, ۴\}$ ۲) $\{۲, ۳\}$ ۳) $\{۳, ۴\}$ ۴) $\{۲, -۱\}$

۱۹ در یک بیضی با خروج از مرکز $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$، دو سر قطر بزرگ از انتهای قطر کوچک، با کدام زاویه رؤیت می‌شود؟

۱) ۶۰° ۲) ۹۰° ۳) ۱۲۰° ۴) ۱۵۰°

۲۰ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۵^{۲۰}$ بر ۴۱، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۱ به‌ازای بعضی از مقادیر $n \in \mathbb{N}$، اگر $\alpha | ۱۱n + ۳$ و $\alpha | ۵n + ۴$ و $\alpha \neq ۱$، آنگاه تعداد اعداد دورقمی n در این حالت، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۲ معادلهٔ سیالهٔ $۹x + ۱۳y = ۷۲۵$، در مجموعهٔ اعداد طبیعی چند دسته جواب دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۳ مختصات کانون سهمی به معادلهٔ $۲x^۲ - ۴x + ۳y = ۴$، کدام است؟

۱) $(۱, \frac{۵}{۴})$ ۲) $(۱, \frac{۱۳}{۸})$ ۳) $(\frac{۱}{۴}, ۲)$ ۴) $(\frac{۵}{۸}, ۲)$

ریاضی ۲

۲۴ حاصل عبارت $\cos\frac{۱۰\pi}{۳}+\sin\frac{۱۱\pi}{۳}\tan\frac{۱۷\pi}{۶}$، کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۳}$

۲۵ در مکعب مفروض، صفحه‌ای بر یک یال و وسط یال دیگر گذشته است. مساحت مقطع حاصل، چند برابر، مساحت یکی از وجوه مکعب است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۲۶ در رسم بزرگترین مربع ممکن داخل مثلث ABC، به‌طوری که یک ضلع مربع منطبق بر ضلع BC باشد. از کدام تبدیل هندسی، استفاده می‌شود؟

۱) انتقال ۲) تجانس ۳) بازتاب ۴) دوران

۲۷ دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x)=\tan(\pi x)-\cot(\pi x)$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) π

۲۸ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۴x+\cos^۴x=\frac{۱}{۲}$، در بازهٔ $[۰,۲\pi]$، کدام است؟

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۲) ۳π ۳) $\frac{۷\pi}{۲}$ ۴) ۴π

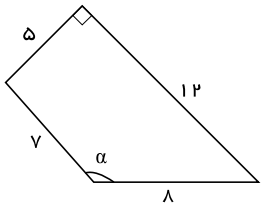
۲۹ در یک گراف با درجهٔ رأس‌های $۱,۲,۳,۳,۴,۵$، تعداد دورها با طول ۳، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳۰ امیر و بهروز هرکدام به‌ترتیب با احتمال ۰٫۶ و ۰٫۳ در یک مسابقهٔ علمی شرکت می‌کنند. احتمال شرکت امیر به‌شرط شرکت بهروز برابر ۰٫۵ است. احتمال شرکت امیر به‌شرط شرکت نکردن بهروز، کدام است؟

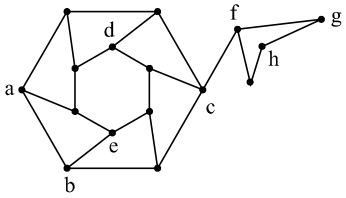
۱) $\frac{۹}{۱۴}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$ ۳) $\frac{۱۱}{۱۴}$ ۴) $\frac{۶}{۷}$

۳۱ در چهار ضلعی روبه‌رو، دو ضلع عمود برهم‌اند، $\sin\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۳۲ کدام مجموعه، برای گراف روبه‌رو، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است؟



۱) $\{a,b,c,d,h\}$ ۲) $\{b,c,e,d,g\}$ ۳) $\{a,c,e,d,h\}$ ۴) $\{a,c,e,d,g\}$

۳۳ در مثلث قائم‌الزاویه ABC، زاویهٔ $A=۹۰^\circ$ و اندازهٔ اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد است. ارتفاع AH و نیمساز AD رسم شده است. اندازهٔ DH، کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۳۵}$ ۲) $\frac{۹}{۳۵}$ ۳) $\frac{۱۲}{۳۵}$ ۴) $\frac{۱۶}{۳۵}$

۳۴ حاصل $\lim\limits_{x\to۱^+}\frac{\sin^۲\pi x}{[x]+\cos\pi x}$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) π ۴) ۲π

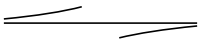
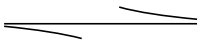
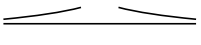
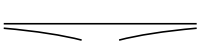
۳۵ در جعبه‌ای ۶ مهرهٔ سفید، ۴ مهرهٔ سیاه است. دو مهره به‌صورت پی‌درپی و بدون جایگذاری از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، مهرهٔ دوم، سفید است؟

۱) ۰٫۵ ۲) ۰٫۶ ۳) ۰٫۶۴ ۴) ۰٫۷۲

۳۶ اگر $\vec{a}=۲\vec{i}+۳\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=۴\vec{i}+\vec{k}$ باشند، حجم متوازی‌السطوحی که بر روی سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ ساخته شود، کدام است؟

۱) ۱۵۶ ۲) ۱۶۹ ۳) ۱۷۴ ۴) ۱۸۹

۳۷ نمودار تابع $y=\frac{۲x^۲-x-۲}{x^۲+۲x}$، نسبت به مجانب افقی خود، در بی‌نهایت کدام وضع را دارد؟

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۳۸ به چند طریق می‌توان از بین ۴ نوع گل ۱۵ شاخه انتخاب کرد، به‌طوری که از هر نوع آن، حداقل ۲ شاخه انتخاب شود؟

۱) ۱۰۵ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۲۵ ۴) ۱۵۰

۳۹ نمرات آمار ۵۰ دانش‌آموز یک کلاس در جدول زیر آمده است. اختلاف میانگین وزنی نمرات از میانهٔ آن‌ها، کدام است؟

x	۱۰	۱۲	۱۴	۱۵	۱۶	۱۸
f	۶	۹	۱۰	۱۲	۸	۵

۱) ۰٫۲۸ ۲) ۰٫۳۲ ۳) ۰٫۳۶ ۴) ۰٫۳۸

۴۰ در یک روز هفته برای ۳ مدرس در ۳ کلاس متمایز در ۳ جلسهٔ متوالی به چند طریق، می‌توان برنامهٔ تدریس، تعیین کرد؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

۴۱ میزان بارندگی یک استان در ۱۰ سال گذشته به‌صورت زیر است. در نمایش نمودار جعبه‌ای، ضریب تغییرات داده‌های داخل جعبه، کدام است؟

$$۵۹,۳۹,۵۶,۴۶,۵۰,۵۴,۳۷,۴۲,۵۷,۳۲$$

۱) ۰٫۰۷ ۲) ۰٫۰۹ ۳) ۰٫۱۲ ۴) ۰٫۱۵

۴۲ خط به معادلهٔ $y=۳x-۵$ در نقطهٔ $x=۲$ بر نمودار تابع $y=g(x)$ مماس است. اگر $\lim\limits_{x\to۱}\frac{f(x)-f(۱)}{۲x-۲}=\frac{۲}{۳}$ باشد، $(fog)'(۲)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۳ در یک کلاس ۴۲ نفری، ۱۵ نفر عضو گروه آزمایشگاهی و ۱۲ نفر عضو گروه فوتبال و ۷ نفر آنان عضو هر دو گروه هستند. چند نفر آنان عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

۴۴ تعداد اعداد سه‌رقمی که حداقل یک رقم ۵ و حداقل یک رقم ۲ را شامل شود، کدام است؟

۱) ۵۲ ۲) ۵۴ ۳) ۵۶ ۴) ۵۸

۴۵ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{|x^۳-۲x|}{x}$، در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۶ درون یک مستطیل ۱۸ × ۹، حداقل چند نقطه اختیار شود، تا مطمئن باشیم لااقل فاصلهٔ ۲ نقطه از این نقاط انتخابی، کمتر از $۳\sqrt{۲}$ باشد؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

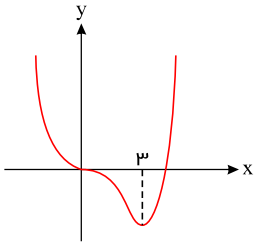
۴۷ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{۲x+۱}+\frac{۱}{x+۱}$، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[۰,۴]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x=\frac{۳}{۲}$، چقدر کمتر است؟

۱) ۰٫۰۳ ۲) ۰٫۰۴ ۳) ۰٫۰۵ ۴) ۰٫۰۶

۴۸ فاصلهٔ نقطهٔ ماکسیمم نسبی تابع $f(x)=\frac{۲x-x^۲}{(x+۱)^۲}$، از خط مجانب افقی آن، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۴۹ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x)=x^۴+ax^۳+bx^۲$ است. $f(-۲)$ کدام است؟



۱) ۳۲
۲) ۳۶
۳) ۴۰
۴) ۴۸

۵۰ اگر $A=\sqrt[۵]{۹\sqrt{۳}}(۱۲)^{-۱/۵}$ باشد، حاصل $(۱+A^{-۱})^{\frac{۱}{۲}}$، کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۵۱ با توجه به دنبالهٔ حسابی، مجموع $\frac{۱}{۱۷\times ۲۰}+\frac{۱}{۱۱\times ۸}+\frac{۱}{۸\times ۵}+\frac{۱}{۵\times ۲}+\cdots$، کدام است؟

۱) ۰/۱۵
۲) ۰/۱۸
۳) ۰/۲۴
۴) ۰/۲۵

۵۲ به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر m، سهمی به معادلهٔ $y=(۱-m)x^۲+۲(m-۳)x-۱$، همواره پایین محور xها است؟

۱) $۱<m<۵$
۲) $۲<m<۵$
۳) $۲<m<۴$
۴) $۲<m<۶$

۵۳ مجموع جواب‌های معادلهٔ $|x+۲|+|۲x-۱|=۳$، کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) ۱
۴) $\frac{۴}{۳}$

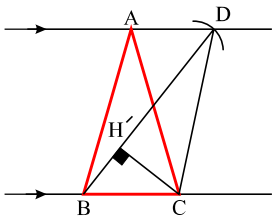
۵۴ نمودار یک تابع به‌صورت $f(x)=۳^{Ax+B}$، نمودار تابع $y=x^۲$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند. عرض نقطهٔ تلاقی تابع f با محور yها، کدام است؟

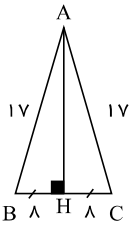
۱) $\frac{۱}{۲۷}$
۲) $\frac{۱}{۹}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\sqrt{۳}$

پاسخ‌نامه تشریحی

۱ ۱ ۲ **۳** ۴

در مثلث‌های ABC, BCD قاعده BC و ارتفاع وارد بر آن اندازهٔ یکسان دارند بنابراین مساحت دو مثلث باهم برابر است. در ادامه فاصلهٔ C از ضلع BD را به روش زیر محاسبه می‌کنیم:





$$\overset{\triangle}{ABH}: AH = \sqrt{۱۷^۲ - ۸^۲} = ۱۵$$

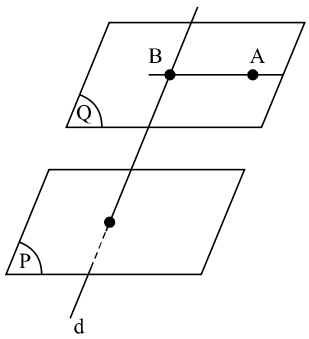
$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} AH \times BC = \frac{۱}{۲} \times ۱۵ \times ۱۶ = ۱۲۰$$

$$S_{\overset{\triangle}{BCD}} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} = ۱۲۰$$

$$S_{\overset{\triangle}{BCD}} = \frac{۱}{۲} CH' \times BD \to ۱۲۰ = \frac{۱}{۲} \times CH' \times ۲۵ \to CH' = ۹٫۶$$

۲ ۱ ۲ ۳ **۴**

فرض کنید خط d و صفحهٔ P متقاطع باشند. از نقطهٔ A، صفحهٔ Q را موازی با صفحهٔ P رسم می‌کنیم. خط d، صفحهٔ Q را در نقطهٔ B قطع می‌کند. خط گذرنده از نقاط A و B، تنها خطی است که خط d را قطع کرده و با صفحهٔ P موازی است.



۳ ۱ ۲ ۴ **۳**

$$f(x) = \begin{cases} x[x] & ; |x| < ۱ \Rightarrow -۱ < x < ۱ \\ ax + b & ; |x| \geq ۱ \Rightarrow x \leq -۱ \quad \text{یا} \quad x \geq ۱ \end{cases}$$

تابع باید در نقاط $x = -۱$ و $x = ۱$ پیوسته باشد. بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f(-۱) = -a + b \\ \text{حد چپ} = \lim\limits_{x \to (-۱)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (-۱)^-} ax + b = -a + b \\ \text{حد راست} = \lim\limits_{x \to (-۱)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-۱)^+} x[x] = -۱[(-۱)^+] = -۱(-۱) = ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow -a + b = ۱$$

$$\left.\begin{array}{l} f(۱) = a + b \\ \text{حد راست} = \lim\limits_{x \to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x \to ۱^+} ax + b = a + b \\ \text{حد چپ} = \lim\limits_{x \to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x \to ۱^-} x[x] = ۱[۱^-] = ۱ \times ۰ = ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow a + b = ۰$$

$$\begin{cases} -a + b = ۱ \\ a + b = ۰ \end{cases} \Rightarrow ۲b = ۱ \Rightarrow b = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = -b \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

۴ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \times \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 2x-1+4y & -2x+4 \\ 4+3+y & -4+1 \end{bmatrix}$$

درایه‌های خارج قطر اصلی باید صفر باشند یعنی:

$$\begin{cases} -2x+4=0 \Rightarrow x=2 \\ 7+y=0 \Rightarrow y=-7 \end{cases}$$

۵ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & 1 & \underbrace{-2 & 6}_{\text{دو ستون اول}} \end{vmatrix} = (0+10+72)-(-3+60+0)=25$$

۶ ۱ ۲ ۳ ۴

$$f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x-1} \quad , \quad 9-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 9 \Rightarrow -3\leq x\leq 3$$

$$x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1 \Rightarrow D_f=[-3,3]-\{1\}=[-3,1)\cup(1,3]$$

اگر بازهٔ $(k-2,3k+2)$ زیرمجموعه‌ای از دامنهٔ تابع باشد، یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد.

$$\begin{cases} k-2\geq -3 \\ 3k+2\leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k\geq -1 \\ k\leq -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow -1\leq k\leq -\frac{1}{3} \quad (1)$$

یا

$$\begin{cases} k-2\geq 1 \\ 3k+2\leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k\geq 3 \\ k\leq \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \varnothing \quad (2)$$

$$(1)\cup(2) \Rightarrow -1\leq k\leq -\frac{1}{3} \Rightarrow k\in[-1,-\frac{1}{3}]$$

ظاهراً طراح سؤال به این نکته که $k=-\frac{1}{3}$ نیز می‌تواند باشد توجه نکرده است.

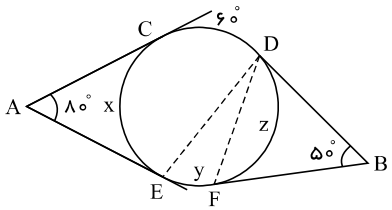
$$k=-\frac{1}{3} \Rightarrow (k-2,3k+2)=(-\frac{1}{3}-2,-1+2)=(-\frac{7}{3},1)\subset D_f$$

۷ ۱ ۲ ۳ ۴ نکته: وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ از دستور $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ حاصل می‌شود.

$$AX=B \xrightarrow[\text{از چپ}]{\times A^{-1}} \underbrace{A^{-1}A}_{I}X=A^{-1}B \xrightarrow{IX=X} X=A^{-1}B$$

$$\Rightarrow X=\frac{1}{-4+3}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}=-1\times\begin{bmatrix} -2 & -13 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow X=\begin{bmatrix} 2 & 13 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$$

۸ ۱ ۲ ۳ ۴



وتر $CD=R \rightarrow CD=60^\circ$

$$\left.\begin{aligned} \hat{B}=\frac{(60^\circ+x+y)-z}{2}=50^\circ \rightarrow x+y-z=40^\circ \\ \hat{A}=\frac{(60^\circ+y+z)-x}{2}=80^\circ \rightarrow y+z-x=100^\circ \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{را جمع می‌کنیم}]{\text{طرفین دو تساوی}}$$

$$2y=140^\circ \rightarrow y=70^\circ \rightarrow E\hat{D}F=\frac{y}{2}=\frac{70^\circ}{2}=35^\circ$$

۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$y=x^2-x-3 \xrightarrow[x\rightarrow x+2]{\text{۲ واحد به چپ}} y=(x+2)^2-(x+2)-3 \xrightarrow{\text{۹ واحد پایین}} y=(x+2)^2-(x+2)-3-9$$

نمودار زیر محور xها قرار دارد یعنی باید نامعادلهٔ $y < ۰$ را حل کنیم.

$$y < ۰ \Rightarrow (x+۲)^۲ - (x+۲) - ۱۲ < ۰ \Rightarrow x^۲ + ۴x + ۴ - x - ۲ - ۱۲ < ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۳x - ۱۰ < ۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۵) < ۰ \Rightarrow -۵ < x < ۲ \Rightarrow x \in (-۵, ۲)$$

۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴

نکته: اگر p و q دو گزارهٔ دلخواه باشند داریم:

۱) $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

۲) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

۳) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$$(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge r) \equiv \sim (\sim p \vee \sim q) \vee (p \wedge r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv p \wedge (q \vee r)$$

۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱)

$$\forall x \in \mathbb{R};\ x^۲ + ۲ > ۲x$$

$$x^۲ - ۲x + ۲ > ۰ \Rightarrow \Delta = (-۲)^۲ - ۴(۲) = -۴ < ۰$$

چون $\Delta < ۰$ و ضریب $x^۲$ نیز مثبت است پس این معادلهٔ درجه ۲ همواره بزرگ‌تر از صفر بوده و مثال نقضی برای آن نداریم ارزش درستی دارد.

گزینهٔ ۲)

$$\exists x \in \mathbb{R};\ \frac{x-۱}{x} = x$$

$$\frac{x-۱}{x} = x \Rightarrow x - ۱ = x^۲ \Rightarrow x^۲ - x + ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = (-۱)^۲ - ۴(۱) < ۰$$

$\Delta < ۰$ بوده پس معادلهٔ درجهٔ دوم ریشه ندارد یعنی به‌ازای هیچ مقداری از x این معادله جواب ندارد پس ارزش گزارهٔ سور وجودی نادرست است.

گزینهٔ ۳)

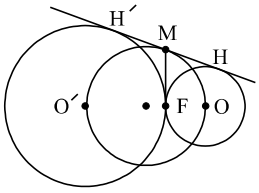
$$\exists x \in \mathbb{R};\ |x + \frac{۱}{x}| < ۲$$

می‌دانیم به‌ازای هر مقدار $x \in \mathbb{R}$ داریم: $|x + \frac{۱}{x}| \geq ۲$ یعنی به‌ازای هیچ مقداری از $x \in \mathbb{R}$ رابطهٔ $|x + \frac{۱}{x}| < ۲$ برقرار نیست پس ارزش سور وجودی نادرست است.

گزینهٔ ۴)

$$\forall x \in \mathbb{R};\ \frac{x^۲ - ۴}{x - ۲} = x + ۲$$

به‌ازای $x = ۲$ رابطهٔ $\frac{x^۲ - ۴}{x - ۲} = x + ۲$ نادرست است پس ارزش سور عمومی فوق نادرست است.



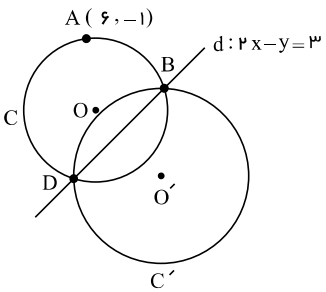
۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴

$$HH' = ۲\sqrt{RR'} = ۲\sqrt{۴ \times ۹} = ۱۲$$

$$\left.\begin{matrix} MH = MF \\ MH' = MF \end{matrix}\right\} \rightarrow MF = MH' = MH = \frac{HH'}{۲} \rightarrow MF = \frac{۱۲}{۲} = ۶$$

۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴

فرض کنیم معادلهٔ C بفرم $C : x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ باشد چون $x^۲ + y^۲ = ۱۷$ و $y = ۲x - ۳$ پس:



$$۱۷ + ax + b(۲x - ۳) + c + ۱۷ = ۰$$

$$\Rightarrow (a + ۲b)x + c - ۳b + ۱۷ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a + ۲b = ۰ \Rightarrow a = -۲b \\ c - ۲b + ۱۷ = ۰ \Rightarrow c = ۳b - ۱۷ \end{cases}$$

معادلهٔ دایرهٔ C : $x^۲ + y^۲ - ۲bx + by + ۳b - ۱۷ = ۰$

نقطهٔ $A(۶, -۱)$ در معادلهٔ دایرهٔ C صدق کند پس:

$$A(۶, -۱) \in C \xrightarrow{\text{صدق}} ۳۶ + ۱ - ۱۲b - b + ۳b - ۱۷ = ۰ \Rightarrow ۲۰ - ۱۰b = ۰ \Rightarrow \boxed{b = ۲}$$

$$C : x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y - ۱۱ = ۰ \Rightarrow C \text{ شعاع دایره} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴^۲ + ۲^۲ - ۴(-۱۱)} = ۴$$

۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴

$$۶۲۷ = ۳ \times ۱۱ \times ۱۹ \quad , \quad ۴۲۹ = ۳ \times ۱۱ \times ۱۳$$

$$(۶۲۷, ۴۲۹) = (۳ \times ۱۱ \times ۱۹ , ۳ \times ۱۱ \times ۱۳) \xrightarrow{\text{پایه‌های مشترک با توان کمتر}} ۳ \times ۱۱ = ۳۳$$

$$[(۶۲۷, ۴۲۹), ۱۵۴] = [۳۳, ۱۵۴] = [۳ \times ۱۱ , ۲ \times ۷ \times ۱۱] \xrightarrow[\times \text{ پایه‌های غیرمشترک}]{\text{پایه‌های مشترک با توان بیشتر}} ۲ \times ۳ \times ۷ \times ۱۱ = ۴۶۲$$

۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر ۲^n می‌باشد.

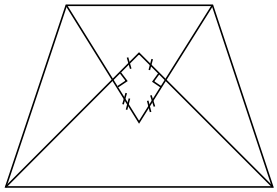
$$۲^{n(A)} = ۵۱۲ = ۲^۹ \Rightarrow n(A) = ۹ \quad , \quad n(A \cap B) = ۳$$

$$n(B \cup A')' \xrightarrow{\text{دمورگان}} n(B' \cap A) = n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = ۹ - ۳ = ۶$$

یعنی مجموعهٔ $(B \cup A')'$ دارای ۶ عضو است پس تعداد زیرمجموعه‌های آن $۲^۶ = ۶۴$ است.

۱۶ ۱ ۲ ۳ ۴

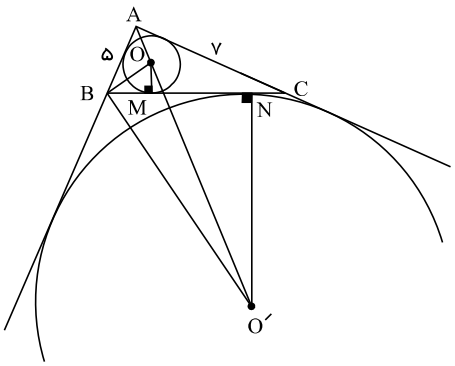
از برخورد نیمسازهای داخلی ذوزنقه متساوی‌الساقین کایتی با دو زاویهٔ روبه‌رو قائمه بوجود می‌آید. این چهار ضلعی محاطی و محیطی است زیرا زاویه‌های روبه‌روی آن مکمل یکدیگرند و نیز مجموع دو ضلع مقابلش با یکدیگر برابر است.



۱۷ ۱ ۲ ۳ ۴

محل تلاقی نیمساز داخلی زاویه A و نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه B (نقاط O و O') به ترتیب مرکز دایرهٔ محاطی داخلی و محاطی خارجی نظیر رأس A هستند. همچنین اندازهٔ تصویر قائم OO' بر روی ضلع BC برابر MN است.

$$MN = BN - BM = (p - c) - (p - b)$$
$$= b - c = ۷ - ۵ = ۲$$



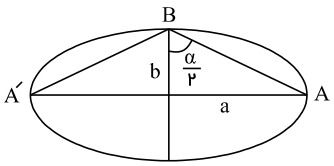
۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$f = \{(۱, ۲), (۲, ۵), (۳, ۴), (۴, ۶)\} \quad , \quad g = \{(۲, ۳), (۴, ۲), (۵, ۶), (۳, ۱)\}$$

$$g^{-۱} = \{(۳, ۲), (۲, ۴), (۶, ۵), (۱, ۳)\} \Rightarrow g^{-۱}of = \{(۱, ۴), (۴, ۵)\}$$

$$g^{-۱}of - f = \{(۱, ۴ - ۲), (۴, ۵ - ۶)\} = \{(۱, ۲), (۴, -۱)\} \Rightarrow \text{برد} = \{۲, -۱\}$$

۱۹ ۱ ۲ **۳** ۴



$$\hat{A'BA} = \alpha$$

$$e = \sqrt{\frac{۲}{۳}} = \frac{c}{a} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{۲}{۳} = \frac{c^۲}{a^۲} \xrightarrow{c^۲ = a^۲ - b^۲} \frac{۲}{۳} = \frac{a^۲ - b^۲}{a^۲}$$

$$\Rightarrow ۲a^۲ = ۳a^۲ - ۳b^۲ \Rightarrow a^۲ = ۳b^۲ \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{۳}$$

در شکل: $\tan(\frac{\alpha}{۲}) = \frac{a}{b} = \sqrt{۳} \Rightarrow \frac{\alpha}{۲} = ۶۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۱۲۰^\circ$

۲۰ **۱** ۲ ۳ ۴

$۵^{۲۰} \overset{۴۱}{\equiv} ?$

$$۵^۳ = ۱۲۵ \overset{۴۱}{\equiv} ۲ \xrightarrow{\times ۵} ۵^۴ \overset{۴۱}{\equiv} ۱۰ \xrightarrow{\times ۵} ۵^۵ \overset{۴۱}{\equiv} ۵۰ \overset{۴۱}{\equiv} ۹ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۵^{۱۰} \overset{۴۱}{\equiv} ۸۱ \overset{۴۱}{\equiv} -۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۵^{۲۰} \overset{۴۱}{\equiv} (-۱)^۲ = ۱$$

۲۱ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\begin{matrix} \alpha | ۱۱n + ۳ \\ \alpha | ۵n + ۴ \end{matrix} \xrightarrow[\times ۱۱]{\times -۵} \alpha | -۵(۱۱n + ۳) + ۱۱(۵n + ۴) \Rightarrow \alpha | -۵۵n - ۱۵ + ۵۵n + ۴۴$$

$$\Rightarrow \alpha | ۲۹ \rightarrow \alpha = \pm ۱ \text{ یا } \pm ۲۹ \xrightarrow{\text{یافرض: } \alpha \neq ۱} \alpha = ۲۹$$

چون $\alpha | ۵n + ۴$ داریم:

$$۲۹ | ۵n + ۴ \Rightarrow ۵n + ۴ \overset{۲۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۵n \overset{+۲۹}{\overset{۲۹}{\equiv}} -۴ \overset{۲۹}{\equiv} ۲۵$$

$$\Rightarrow ۵n \overset{۲۹}{\equiv} ۲۵ \xrightarrow[(۵,۲۹)=۱]{\div ۵} n \overset{۲۹}{\equiv} ۵ \rightarrow n = ۲۹k + ۵$$

به‌ازای $k = ۱, ۲, ۳$ برای n مقادیر دورقمی حاصل می‌شود.

۲۲ ۱ ۲ ۳ **۴** ۵

$$۹x + ۱۳y = ۷۲۵ \Rightarrow ۱۳y = -۹x + ۷۲۵ \Rightarrow ۱۳y \overset{۹}{\equiv} ۷۲۵$$

$$\xrightarrow{۷۲۵ \overset{۹}{\equiv} ۵} ۴y \overset{۹}{\equiv} ۵ \Rightarrow ۴y \overset{۹}{\equiv} -۴ \xrightarrow[(۴,۹)=۱]{\div ۴} y \overset{۹}{\equiv} -۱ \Rightarrow y = ۹k - ۱$$

$y = ۹k - ۱$ را در معادله صدق داده و مقدار x را می‌یابیم:

$$۹x + ۱۳(۹k - ۱) = ۷۲۵ \Rightarrow ۹x = -۱۳ \times ۹k + ۷۳۸ \xrightarrow{\div ۹} x = -۱۳k + ۸۲$$

چون x, y باید طبیعی باشند:

$$۱ \leq x \Rightarrow ۱ \leq -۱۳k + ۸۲ \Rightarrow ۱۳k \leq ۸۱ \Rightarrow k \leq \frac{۸۱}{۱۳} \simeq ۶/۲۳ \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \leq ۶ \quad (۱)$$

$$۱ \leq y \Rightarrow ۱ \leq ۹k - ۱ \Rightarrow ۲ \leq ۹k \Rightarrow \frac{۲}{۹} \leq k \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} ۱ \leq k \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{\cap} ۱ \leq k \leq ۶$$

چون برای k، ۶ مقدار حاصل شد پس معادلهٔ سیاله دارای ۶ جواب طبیعی است.

۲۳ ۱ **۲** ۳ ۴ ابتدا بایستی معادلهٔ سهمی را استاندارد نماییم:

$$۲x^۲ - ۴x + ۳y = ۴$$

$$۲[x^۲ - ۲x] = -۳y + ۴ \Rightarrow ۲[(x-۱)^۲ - ۱] = -۳y + ۴ \Rightarrow ۲(x-۱)^۲ = -۳y + ۶$$

$$\Rightarrow ۲(x-۱)^۲ = -۳(y-۲) \xrightarrow{\div ۲} (x-۱)^۲ = -\frac{۳}{۲}(y-۲) \leftarrow \text{سهمی قائم دهانه رو به پایین}$$

رأس سهمی: $S = (۱, ۲)$, $۴a = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a = \frac{۳}{۸}$

کانون: $F \begin{vmatrix} h = ۱ \\ k - a = ۲ - \frac{۳}{۸} = \frac{۱۳}{۸} \end{vmatrix}$

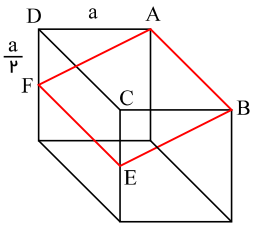
۲۴ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\tan\frac{۱۷\pi}{۶}\sin\frac{۱۱\pi}{۳} + \cos\frac{۱۰\pi}{۳} = \tan(۳\pi - \frac{\pi}{۶})\sin(۴\pi - \frac{\pi}{۳}) + \cos(۳\pi + \frac{\pi}{۳})$$

$$= \tan(-\frac{\pi}{۶})\sin(-\frac{\pi}{۳}) + \cos(\pi + \frac{\pi}{۳}) = (-\tan\frac{\pi}{۶})(-\sin\frac{\pi}{۳}) - \cos\frac{\pi}{۳}$$

$$= \tan\frac{\pi}{۶}\sin\frac{\pi}{۳} - \cos\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۶} - \frac{۱}{۲} = ۰$$

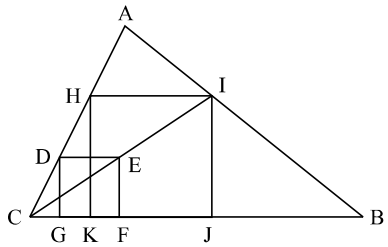
۲۵ ۱ ۲ ۳ ۴



$$\overset{\triangle}{ADF} : AF = \sqrt{a^۲ + \frac{a^۲}{۴}} = \sqrt{\frac{۵a^۲}{۴}} = \frac{\sqrt{۵}a}{۲}$$

$$\frac{S_{AFEB}}{S_{ABCD}} = \frac{AF \times \cancel{AB}}{AB \times \cancel{AB}} = \frac{\frac{\sqrt{۵}}{۲}a}{a} = \frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

۲۶ ۱ ۲ ۳ ۴



مربع $DEFG$ را داخل مثلث ABC به گونه‌ای می‌سازیم که یکی از اضلاع آن روی ضلع BC واقع باشد. از رأس C به E وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا ضلع AB را در نقطهٔ I قطع کند. سپس از I خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در H قطع نماید. از نقاط H و I دو عمود HK و IJ را بر ضلع BC رسم می‌کنیم. چهار ضلعی $HIJK$ بزرگترین مربع ممکن داخل مثلث ABC است به طوری که یک ضلع آن بر BC منطبق است و مجانس مربع در تجانس $DEFG$ به مرکز C می‌باشد.

۲۷ ۱ ۲ ۳ ۴ روش اول:

$$f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x) = \frac{\sin\pi x}{\cos\pi x} - \frac{\cos\pi x}{\sin\pi x} = \frac{\sin^۲\pi x - \cos^۲\pi x}{\sin\pi x\cos\pi x}$$

$$f(x) = \frac{-(\cos^۲\pi x - \sin^۲\pi x)}{\sin\pi x\cos\pi x} = \frac{-\cos ۲\pi x}{\frac{۱}{۲}\sin ۲\pi x} = -۲\cot ۲\pi x$$

$$T = \frac{\pi}{۲\pi} = \frac{۱}{۲}$$

روش دوم:

با توجه به اتحاد $\tan\alpha - \cot\alpha = -۲\cot\alpha$ به راحتی حل می‌شود.

$$\tan(\pi x) - \cot(\pi x) = -۲\cot ۲\pi x$$

$$T = \frac{\pi}{۲\pi} = \frac{۱}{۲}$$

۲۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\sin^۴ x + \cos^۴ x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۱ - ۲\sin^۲ x\cos^۲ x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۱ - ۲(\sin x\cos x)^۲ = \frac{۱}{۲}$$

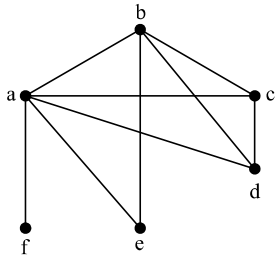
$$\Rightarrow ۱ - ۲(\frac{۱}{۲}\sin ۲x)^۲ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۱ - \frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin^۲ ۲x = ۱ \Rightarrow \begin{cases} \sin ۲x = ۱ \Rightarrow ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \sin ۲x = -۱ \Rightarrow ۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۴} \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$۰ \le x \le ۲\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{۴}, \frac{۵\pi}{۴}, \frac{۳\pi}{۴}, \frac{۷\pi}{۴} \Rightarrow \frac{\pi}{۴} + \frac{۵\pi}{۴} + \frac{۳\pi}{۴} + \frac{۷\pi}{۴} = \frac{۱۶\pi}{۴} = ۴\pi$$

$$\begin{matrix} a & b & c & d & e & f \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{matrix}$$

۲۹ ۱ ۲ **۳** ۴ ابتدا نمودار گراف با درجات ۱, ۲, ۳, ۳, ۴, ۵ را رسم می‌کنیم:



$\longrightarrow$ دورهای به‌طول ۳ : $\begin{cases} abea \\ bcdb \\ bdab \\ abca \\ acda \end{cases}$

۳۰ **۱** ۲ ۳ ۴

نکته: اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشند احتمال وقوع پیشامد B به‌شرط آنکه A اتفاق افتاده باشد از دستور $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$ حاصل می‌شود.

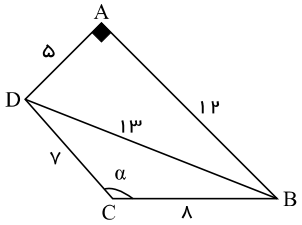
B : پیشامد شرکت کردن بهروز در مسابقهٔ علمی ، A : پیشامد شرکت کردن امیر در مسابقهٔ علمی

طبق فرض $P(A) = ۰/۶$، $P(B) = ۰/۳$ و $P(A|B) = ۰/۵$ است پس:

$$P(A|B) = ۰/۵ \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = ۰/۵ \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \times ۰/۵ = ۰/۳ \times ۰/۵ = ۰/۱۵$$

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A - B)}{۱ - P(B)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{۱ - P(B)} = \frac{۰/۶ - ۰/۱۵}{۱ - ۰/۳} = \frac{۰/۴۵}{۰/۷} = \frac{۴۵}{۷۰} = \frac{۹}{۱۴}$$

۳۱ ۱ ۲ **۳** ۴



$$\triangle ABD : BD = \sqrt{۵^۲ + ۱۲^۲} = ۱۳$$

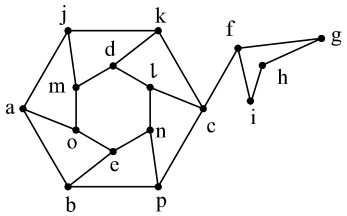
$\triangle BCD$: قضیهٔ کسینوس‌ها $BD^۲ = BC^۲ + CD^۲ - ۲BC \times DC \times \cos\alpha$

$$۱۶۹ = ۶۴ + ۴۹ - ۲ \times ۸ \times ۷ \times \cos\alpha$$

$$\rightarrow \cos\alpha = -\frac{۱}{۲} \rightarrow \alpha = ۱۲۰^\circ \rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۳۲ ۱ ۲ **۳** ۴

نکته: گراف D با مجموعه رئوس $V_{(G)}$ مفروض است. مجموعهٔ احاطه‌گر u را مینیمال نامند هرگاه با حذف هر عضو دلخواه a مجموعهٔ باقی‌مانده دیگر احاطه‌گر نباشد.



بررسی گزینه‌ها:

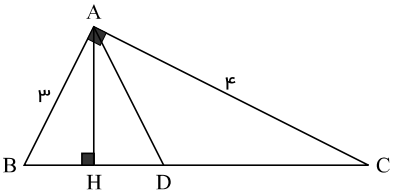
گزینهٔ ۱) مجموعهٔ $\{a, b, c, d, h\}$ اصلاً احاطه‌گر نیست مثلاً رأس n در این مجموعه احاطه نمی‌شود.

گزینهٔ ۲) مجموعهٔ $\{b, c, e, d, g\}$ اصلاً احاطه‌گر نیست مثلاً رأس j در این مجموعه احاطه نمی‌شود.

گزینهٔ ۳) این مجموعه مینیمال می‌باشد.

گزینهٔ ۴) مجموعهٔ $\{a, c, e, d, g\}$ اصلاً احاطه‌گر نیست. در این مجموعه مثلاً رأس i احاطه نمی‌شود.

۳۳ ۱ ۲ **۳** ۴



$$BC = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵$$

$$\overset{\triangle}{ABC}: \text{نیمساز } AD \xrightarrow{\text{قضیه نیمساز}} \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{۳}{۴}$$

$$\rightarrow \begin{cases} BD = ۳x \\ DC = ۴x \end{cases} \rightarrow BC = ۷x = ۵ \rightarrow x = \frac{۵}{۷}$$

$$\rightarrow \begin{cases} BD = \frac{۱۵}{۷} \\ DC = \frac{۲۰}{۷} \end{cases}$$

رابطهٔ طولی در مثلث قائم‌الزاویه : $AB^۲ = BH \times BC \rightarrow ۳^۲ = BH \times ۵ \rightarrow BH = \frac{۹}{۵}$

$$DH = BD - BH = \frac{۱۵}{۷} - \frac{۹}{۵} = \frac{۷۵ - ۶۳}{۳۵} = \frac{۱۲}{۳۵}$$

۳۴ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\lim_{x \to ۱^+} \frac{\sin^۲ \pi x}{[x] + \cos \pi x} = \lim_{x \to ۱^+} \frac{۱ - \cos^۲ \pi x}{۱ + \cos \pi x} = \lim_{x \to ۱^+} \frac{(۱ - \cos \pi x)(۱ + \cos \pi x)}{۱ + \cos \pi x}$$

$$\lim_{x \to ۱^+} (۱ - \cos \pi x) = ۱ - \cos \pi = ۱ - (-۱) = ۲$$

۳۵ ۱ **۲** ۳ ۴ روش اول:

$$P(\text{مهرهٔ دوم سفید}) = P(\text{مهرهٔ اول سیاه و مهرهٔ دوم سفید}) + P(\text{مهرهٔ اول سفید و مهرهٔ دوم سفید})$$

$$= \frac{۶}{۱۰} \times \frac{۵}{۹} + \frac{۴}{۱۰} \times \frac{۶}{۹} = \frac{۳۰ + ۲۴}{۹۰} = \frac{۵۴}{۹۰} = \frac{۶}{۱۰}$$

روش دوم:

چون درمورد رنگ مهرهٔ اول اطلاعی نداریم می‌توانیم از آن صرف‌نظر کنیم یعنی انگار می‌خواهیم برای اولین‌بار مهره خارج کنیم و احتمال سفید بودن آن را می‌خواهیم.

۳۶ ۱ ۲ **۳** ۴ نکته: حجم متوازی سطوح ساخته روی سه بردار a و b و c برابر قدر مطلق ضرب مختلط این سه بردار است:

$$V = |a \cdot (b \times c)| = |b \cdot (a \times c)| = |c \cdot (a \times b)|$$

حجم متوازی‌السطوح ساخته شده روی سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a} \times \vec{b}$ برابراست با:

$$V = |a \cdot ((a \times b) \times b)| = |b \cdot ((a \times b) \times a)| = \underbrace{|(a \times b) \cdot (a \times b)|}_{\text{محاسبات کمتر}}$$

$$a \times b = \begin{bmatrix} i & j & k \\ ۲ & ۳ & -۱ \\ ۴ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = ۳i - ۶j - ۱۲k$$

$$V = |(a \times b) \cdot (a \times b)| = |a \times b|^۲ = (\sqrt{۹ + ۳۶ + ۱۴۴})^۲ = ۱۸۹$$

۳۷ **۱** ۲ ۳ ۴

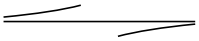
$$y = \frac{۲x^۲ - x - ۲}{x^۲ + ۲x} \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \frac{۲x^۲ - x - ۲}{x^۲ + ۲x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{۲x^۲}{x^۲} = ۲$$

خط $y = ۲$ مجانب افقی تابع است؛ حال تفاضل تابع و خط مجانب افقی را می‌یابیم.

$$y - ۲ = \frac{۲x^۲ - x - ۲}{x^۲ + ۲x} - ۲ = \frac{۲x^۲ - x - ۲ - ۲x^۲ - ۴x}{x^۲ + ۲x} = \frac{-۵x - ۲}{x^۲ + ۲x}$$

$$x \to +\infty \Rightarrow \frac{-۵x - ۲}{x^۲ + ۲x} < ۰ \Rightarrow y - ۲ < ۰ \Rightarrow y < ۲$$

$$x \to -\infty \Rightarrow \frac{-۵x - ۲}{x^۲ + ۲x} > ۰ \Rightarrow y - ۲ > ۰ \Rightarrow y > ۲$$

$\Rightarrow$ 

۳۸ ۱ **۲** ۳ ۴

تعداد انتخاب از گل نوع چهارم : $x_۴$ ، تعداد انتخاب از گل نوع سوم : $x_۳$ ، تعداد انتخاب از گل نوع دوم : $x_۲$ ، تعداد انتخاب از گل نوع اول : $x_۱$

طبق فرض : $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۵ \quad x_۱ \geq ۲ \ , \ x_۲ \geq ۲ \ , \ x_۳ \geq ۲ \ , \ x_۴ \geq ۲$

از هر گل ۲ شاخه برمی‌داریم و $۱۵ - ۸ = ۷$ گل دیگر را به‌دلخواه از میان ۴ نوع گل انتخاب می‌کنیم یعنی:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۷ \quad x_۱ \geq ۰ \ , \ x_۲ \geq ۰ \ , \ x_۳ \geq ۰ \ , \ x_۴ \geq ۰$$

تعداد جواب‌ها $= \binom{۴-۱+۷}{۴-۱} = \binom{۱۰}{۳} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸}{۳!} = ۱۲۰$

۳۹ ۱ ۲ ۳ **۴** چون تعداد داده‌ها ۶ می‌باشد، دادهٔ وسط یعنی $\frac{۱۴+۱۵}{۲} = ۱۴٫۵$ برابر میانه است.

برای محاسبهٔ میانگین ابتدا از همهٔ داده‌ها ۱۴ واحد کم می‌کنیم:

$x-۱۴$	-۴	-۲	۰	۱	۲	۴
	۶	۹	۱۰	۱۲	۸	۵

$$\overline{x} - ۱۴ = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{۶(-۴)+۹(-۲)+۱۰(۰)+۱۲(۱)+۸(۲)+۵(۴)}{۶+۹+۱۰+۱۲+۸+۵} = \frac{۱۲}{۱۰۰} \Rightarrow \overline{x} = ۱۴٫۱۲$$

میانگین $-$ میانه $= ۱۴٫۱۵ - ۱۴٫۱۲ = ۰٫۳۸$

۴۰ ۱ ۲ **۳** ۴ هر برنامه معادل است با یک مربع لاتین، تعداد مربع‌های لاتین ۳ × ۳ برابر است با $۳! \times ۲ \times ۱ = ۱۲$

۴۱ ۱ **۲** ۳ ۴

نکته: در نمودار جعبه‌اي $Q_۱$ و $Q_۳$ ابتدا و انتهاي جعبه بوده و جزو داده‌هاي داخل جعبه محسوب نمي‌شود.

ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم: ۳۲, ۳۷, ۳۹, ۴۲, ۴۶ , ۵۰, ۵۴, ۵۶, ۵۷, ۵۹

میانه ($Q_۲$)، $Q_۱$ و $Q_۳$ را می‌یابیم:

$$Q_۲ = \text{میانه} = \frac{\text{داده ۶ام} + \text{داده ۵ام}}{۲} = \frac{۴۶+۵۰}{۲} = ۴۸$$

نیمهٔ اول داده‌ها : ۳۲, ۳۷, ۳۹, ۴۲, ۴۶ $\Rightarrow$ چارک اول $= Q_۱ = ۳۹$

نیمهٔ دوم داده‌ها : ۵۰, ۵۴, ۵۶, ۵۷, ۵۹ $\rightarrow$ چارک سوم $= Q_۳ = ۵۶$

پس داده‌های داخل جعبه، داده‌های بین ۳۹ و ۵۶ است یعنی داده‌های ۴۲, ۴۶, ۵۰, ۵۴ داده‌های داخل جعبه است.

ابتدا میانگین سپس انحراف‌معیار را می‌یابیم:

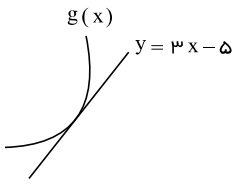
$$\overline{x} = \frac{۴۲+۴۶+۵۰+۵۴}{۴} = \frac{۱۸۰+۱۲}{۴} = \frac{۱۹۲}{۴} = ۴۸$$

$$\text{واریانس} : \sigma^۲ = \frac{\sum_{i=1}^{۴}(x_i - \overline{x})^۲}{۴} = \frac{(۴۲-۴۸)^۲ + (۴۶-۴۸)^۲ + (۵۰-۴۸)^۲ + (۵۴-۴۸)^۲}{۴} = \frac{۳۶+۴+۴+۳۶}{۴} = \frac{۸۰}{۴} = ۲۰$$

$$\Rightarrow \sigma = ۲\sqrt{۵} \rightarrow C \cdot V = \frac{\sigma}{\overline{x}} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۴۸} = \frac{\sqrt{۵}}{۲۴} \simeq ۰٫۰۹۳$$

۴۲ ۱ ۲ ۳ **۴**

$y = ۳x - ۵\ ,\ x = ۲ \Rightarrow y = ۶ - ۵ = ۱ \Rightarrow$ نقطهٔ تماس $A(۲, ۱)$



$\Rightarrow g(۲) = ۱\ ,$ شیب خط مماس $= ۳ \Rightarrow g'(۲) = ۳$

$$\lim_{x \to ۱} \frac{f(x)-f(۱)}{۲(x-۱)} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\lim_{x \to ۱} \frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۲}f'(۱) = \frac{۲}{۳} \Rightarrow f'(۱) = \frac{۴}{۳}$$

$$(fog)'(۲) = g'(۲) \cdot f'(g(۲)) = ۳f'(۱) = ۳ \times \frac{۴}{۳} = ۴$$

۴۳ ۱ ۲ ۳ **۴**

A : نفرات عضو آزمایشگاه

B : اعضای فوتبال

تعداد افرادی که عضو هیچ گروهی نیستند $= |\overline{A} \cap \overline{B}| = |(\overline{A \cup B})| =$ کل کلاس $- |A \cup B|$

$= ۴۲ - (|A| + |B| - |A \cap B|) = ۴۲ - (۱۵ + ۱۲ - ۷) = ۴۲ - (۲۰) = ۲۲$

۴۴ **۱** ۲ ۳ ۴

A : ۵ سه‌رقمی‌های فاقد , B : ۲ سه‌رقمی‌های فاقد

$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |(\overline{A \cup B})| = |S| - |A \cup B| = ۹۰۰ - (|A| + |B| - |A \cap B|) = ۹۰۰ - (۶۴۸ + ۶۴۸ - ۴۴۸) = ۵۲$

تعداد سه‌رقمی‌ها $= |S| = \frac{۹}{} \times \frac{۱۰}{} \times \frac{۱۰}{} = ۹۰۰$

$|A| \xrightarrow{\text{سه‌رقمی‌های فاقد ۵}} \frac{۸}{} \times \frac{۹}{} \times \frac{۹}{} = ۶۴۸ = |B|$

$|A \cap B| \xrightarrow{\text{سه‌رقمی فاقد ۵ و ۲}} \frac{۷}{} \times \frac{۸}{} \times \frac{۸}{} = ۴۴۸$

۴۵ ۱ ۲ **۳** ۴

$f(x) = \frac{|x^۳ - ۲x|}{x}$, $D_f = \mathbb{R} - \{۰\}$

چون تابع در $x = ۰$ تعریف‌نشده است، پس در این نقطه ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است از طرفی ریشه‌های سادهٔ قدرمطلق نقاط مشتق‌ناپذیر است، پس داریم:

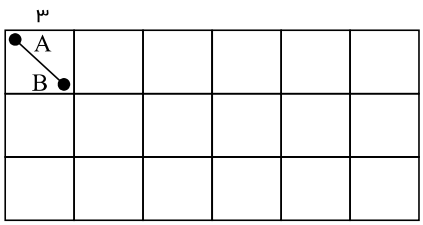
$x^۳ - ۲x = ۰ \Rightarrow x(x^۲ - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x^۲ - ۲ = ۰ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۲} \end{cases}$

بنابراین تابع در ۳ نقطهٔ $x = ۰$ و $x = \pm\sqrt{۲}$ مشتق‌ناپذیر است.

۴۶ ۱ ۲ **۳** ۴

طول مستطیل را به ۶ قسمت و عرض آن را به ۳ قسمت تقسیم می‌کنیم و از آنجا مستطیل را ۱۸ مربع کوچک به‌ضلع ۳ تقسیم میکنیم.

حال اگر ۱۹ نقطه درون این مستطیل انتخاب کنیم طبق اصل لانهٔ کبوتری مربعی وجود دارد که حداقل ۲ نقطه در آن قرار می‌گیرد و بدیهی است فاصلهٔ این دو نقطه کمتر از قطر مربع یعنی $۳\sqrt{۲}$ می‌باشد.



$AB <$ قطر مربع $\Rightarrow AB < \sqrt{۳^۲ + ۳^۲} = ۳\sqrt{۲}$

۴۷ ۱ **۲** ۳ ۴

$f(x) = \sqrt{۲x + ۱} + \frac{۱}{x + ۱}$, $f(۰) = ۱ + ۱ = ۲$, $f(۴) = \sqrt{۹} + \frac{۱}{۵} = ۳ + ۰/۲ = ۳/۲$

آهنگ تغییر متوسط تابع در $[۰, ۴] = \frac{f(۴) - f(۰)}{۴ - ۰} = \frac{۳/۲ - ۲}{۴} = \frac{۱/۲}{۴} = ۰/۳$

$f'(x) = \frac{۲}{۲\sqrt{۲x + ۱}} + \frac{۰ - ۱}{(x + ۱)^۲} = \frac{۱}{\sqrt{۲x + ۱}} - \frac{۱}{(x + ۱)^۲}$

$f'(\frac{۳}{۲}) = \frac{۱}{\sqrt{۳ + ۱}} - \frac{۱}{(\frac{۳}{۲} + ۱)^۲} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{\frac{۲۵}{۴}} = \frac{۱}{۲} - \frac{۴}{۲۵} = \frac{۲۵ - ۸}{۵۰} = \frac{۱۷}{۵۰} = ۰/۳۴$

$۰/۳۴ - ۰/۳ = ۰/۰۴$

۴۸ ۱ ۲ **۳** ۴

$f(x) = \frac{۲x - x^۲}{(x + ۱)^۲}$, مجانب افقی : $y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x^۲}{x^۲} = -۱$

$$f'(x)=\frac{(۲-۲x)(x+۱)^۲-۲(x+۱)(۲x-x^۲)}{(x+۱)^۴}=\frac{(x+۱)\left((۲-۲x)(x+۱)-۲(۲x-x^۲)\right)}{(x+۱)^۴}$$

$$f'(x)=\frac{۲x+۲-۲x^۲-۲x-۴x+۲x^۲}{(x+۱)^۳}=\frac{-۴x+۲}{(x+۱)^۳}=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow f(\frac{۱}{۲})=\frac{۱-\frac{۱}{۴}}{\frac{۹}{۴}}=\frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۹}{۴}}=\frac{۱}{۳}$$

x		-۱		$\frac{۱}{۲}$	
$f'(x)$	$-$		$+$	۰	$-$
$f(x)$	$\searrow$	ت.ن	$\nearrow$	max	$\searrow$

$y=\frac{۱}{۳}$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع است، پس فاصلهٔ نقطهٔ ماکزیمم نسبی تا خط $y=-۱$ به‌صورت زیر است.

$$|\frac{۱}{۳}-(-۱)|=\frac{۴}{۳}$$

۴۹ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$f(x)=x^۴+ax^۳+bx^۲$$

$x=۰$ نقطهٔ عطف افقی تابع است، پس داریم:

$$f'(x)=۴x^۳+۳ax^۲+۲bx\Rightarrow f'(۰)=۰$$

$$f''(x)=۱۲x^۲+۶ax+۲b\Rightarrow f''(۰)=۰+۲b=۰\Rightarrow b=۰$$

شیب خط مماس در $x=۳$ برابر صفر است، پس داریم:

$$f'(۳)=۰\Rightarrow ۴\times ۳^۳+۳a(۳)^۲+۰=۰\Rightarrow ۱۰۸+۲۷a=۰\Rightarrow a=-۴$$

$$f(x)=x^۴-۴x^۳\Rightarrow f(-۲)=(-۲)^۴-۴(-۲)^۳=۱۶+۳۲=۴۸$$

۵۰ ۱ ۲ **۳** ۴

$$A=\sqrt[۵]{۹\sqrt{۳}}(۱۲)^{-۱/۵}=\sqrt[۵]{\sqrt{۹^۲\times ۳}}\times(۱۲)^{-\frac{۳}{۲}}=\sqrt[۱۰]{۳^۵}\times(۱۲)^{-\frac{۳}{۲}}=۳^{\frac{۵}{۱۰}}\times(\frac{۱}{۱۲})^{\frac{۳}{۲}}$$

$$A=۳^{\frac{۱}{۲}}\times\frac{۱}{۱۲^{\frac{۳}{۲}}}=\sqrt{۳}\times\frac{۱}{\sqrt{۱۲^۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۱۲\sqrt{۱۲}}=\frac{\sqrt{۳}}{۱۲\times ۲\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۲۴}\Rightarrow\frac{۱}{A}=۲۴$$

$$(۱+A^{-۱})^{\frac{۱}{۲}}=(۱+\frac{۱}{A})^{\frac{۱}{۲}}=(۱+۲۴)^{\frac{۱}{۲}}=۲۵^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۲۵}=۵$$

۵۱ **۱** ۲ ۳ ۴

$$A=\frac{۱}{۲\times ۵}+\frac{۱}{۵\times ۸}+\frac{۱}{۸\times ۱۱}+\cdots+\frac{۱}{۱۷\times ۲۰}$$

$$۳A=\frac{۳}{۲\times ۵}+\frac{۳}{۵\times ۸}+\frac{۳}{۸\times ۱۱}+\cdots+\frac{۳}{۱۷\times ۲۰}$$

$$۳A=\frac{۵-۲}{۲\times ۵}+\frac{۸-۵}{۵\times ۸}+\frac{۱۱-۸}{۸\times ۱۱}+\cdots+\frac{۲۰-۱۷}{۱۷\times ۲۰}$$

$$۳A=(\frac{۵}{۲\times ۵}-\frac{۲}{۲\times ۵})+(\frac{۸}{۵\times ۸}-\frac{۵}{۵\times ۸})+(\frac{۱۱}{۸\times ۱۱}-\frac{۸}{۸\times ۱۱})+\cdots+(\frac{۲۰}{۱۷\times ۲۰}-\frac{۱۷}{۱۷\times ۲۰})$$

$$۳A = (\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۵}) + (\frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۸}) + (\frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۱۱}) + \cdots + (\frac{۱}{۱۷} - \frac{۱}{۲۰})$$

$$۳A = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲۰} = \frac{۱۰ - ۱}{۲۰} = \frac{۹}{۲۰} \Rightarrow A = \frac{۳}{۲۰} = ۰/۱۵$$

۵۲ ۱ **۲** ۳ ۴

$y = (۱ - m)x^۲ + ۲(m - ۳)x - ۱$

شرط آنکه سهمی همواره پایین محور xها باشد، آن است که: $a < ۰$ و $\Delta < ۰$

$$a < ۰ \Rightarrow ۱ - m < ۰ \Rightarrow m > ۱ \quad (۱)$$

$$\Delta < ۰ \Rightarrow ۴(m - ۳)^۲ - ۴(۱ - m)(-۱) < ۰ \xrightarrow{\div ۴} (m - ۳)^۲ + (۱ - m) < ۰$$

$$\Rightarrow m^۲ - ۶m + ۹ + ۱ - m < ۰ \Rightarrow m^۲ - ۷m + ۱۰ < ۰ \Rightarrow (m - ۲)(m - ۵) < ۰$$

$$\Rightarrow ۲ < m < ۵ \quad (۲)$$

$$(۱) \cap (۲) \Rightarrow ۲ < m < ۵$$

۵۳ ۱ **۲** ۳ ۴

$|۲x - ۱| + |x + ۲| = ۳$

$x < -۲ \Rightarrow -۲x + ۱ - x - ۲ = ۳ \Rightarrow -۳x = ۴ \Rightarrow x = -\frac{۴}{۳}$ غیر قابل قبول

$-۲ \le x < \frac{۱}{۲} \Rightarrow -۲x + ۱ + x + ۲ = ۳ \Rightarrow -x = ۰ \Rightarrow x = ۰$ قابل قبول

$x \ge \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x - ۱ + x + ۲ = ۳ \Rightarrow ۳x = ۲ \Rightarrow x = \frac{۲}{۳}$ قابل قبول

$$\text{مجموع جواب‌ها} = ۰ + \frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

۵۴ ۱ ۲ **۳** ۴

$$y = x^۲ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \Rightarrow y = ۱ \Rightarrow M(۱, ۱) \\ x = ۳ \Rightarrow y = ۹ \Rightarrow N(۳, ۹) \end{cases}$$

نقاط M و N در تابع $f(x) = ۳^{Ax+B}$ صدق می‌کنند، پس داریم:

$$f(۱) = ۱ \Rightarrow ۳^{A+B} = ۱ \Rightarrow A + B = ۰ \quad , \quad f(۳) = ۹ \Rightarrow ۳^{۳A+B} = ۹ \Rightarrow ۳A + B = ۲$$

$$- \begin{cases} A + B = ۰ \\ ۳A + B = ۲ \end{cases}$$

$$۲A = ۲ \Rightarrow A = ۱ \Rightarrow B = -۱$$

$$\Rightarrow f(x) = ۳^{x-۱} \Rightarrow f(۰) = ۳^{-۱} = \frac{۱}{۳}$$

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۳	۴	۱	۲
۲	۴	۱	۲	۳
۳	۳	۱	۲	۴
۴	۲	۱	۳	۴
۵	۴	۱	۲	۳
۶	۴	۱	۲	۳
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۳	۱	۲	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۲	۱	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۴	۱	۲	۳
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۴	۱	۲	۳
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۳	۱	۲	۴
۱۸	۴	۱	۲	۳
۱۹	۳	۱	۲	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۲	۱	۳	۴
۲۲	۴	۱	۲	۳
۲۳	۲	۱	۳	۴
۲۴	۲	۱	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۲	۱	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۴	۱	۲	۳
۲۹	۳	۱	۲	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۳	۱	۲	۴
۳۲	۳	۱	۲	۴
۳۳	۳	۱	۲	۴
۳۴	۲	۱	۳	۴
۳۵	۲	۱	۳	۴
۳۶	۳	۱	۲	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۲	۱	۳	۴
۳۹	۴	۱	۲	۳
۴۰	۳	۱	۲	۴
۴۱	۲	۱	۳	۴
۴۲	۴	۱	۲	۳
۴۳	۴	۱	۲	۳
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۳	۱	۲	۴
۴۶	۳	۱	۲	۴
۴۷	۲	۱	۳	۴
۴۸	۳	۱	۲	۴
۴۹	۴	۱	۲	۳
۵۰	۳	۱	۲	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۲	۱	۳	۴
۵۳	۲	۱	۳	۴
۵۴	۳	۱	۲	۴