نام و نام خانوادگی:

دبیرستان: فاخران

نام آزمون: ریاضی ۲

تاریخ آزمون: ۱۳۹۸/۰۸/۰۹

فاخران

۱- اگر $x=4$ یکی از جواب‌های معادله‌ی $x+a=\sqrt{5x-x^2}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

① $\frac{1}{2}$ ② ۲ ③ ۳ ④ جواب دیگر ندارد.

۲- در معادله‌ی $\sqrt{3}=\sqrt{3+\sqrt{x-x^3}}$ مجموع ریشه‌ها چقدر است؟

① ۱ ② -1 ③ ۰ ④ ۲

۳- اگر $x^{\sqrt{2}}=\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)-\left(\sqrt[4]{5\sqrt[3]{5}}\right)^{\frac{3}{2}}$ باشد، x کدام است؟

① $(2)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ ② $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ ③ ۱ ④ $\sqrt{2}$

۴- بزرگترین ریشه‌ی معادله‌ی $5+\frac{5}{2x-1}=\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ کدام است؟

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ -2

۵- جواب‌های معادله‌ی $5=2x-\sqrt{2x+5}$ چگونه است؟

① یک ریشه‌ی منفی ② دو ریشه‌ی منفی ③ دو ریشه‌ی مثبت ④ یک ریشه‌ی منفی و یک ریشه‌ی مثبت

۶- معادله‌ی $x+2=\sqrt{x^2+\sqrt{-x^2+6x-8}}+\sqrt{x+\sqrt{-x^3+4x^2+25x-100}}$ چند جواب دارد؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۰

۷- اگر قدر مطلق تفاضل جواب‌های معادله‌ی $ax\left(1-\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{x-1}{x+1}-\frac{x+1}{x-1}$ برابر ۲ باشد، آنگاه a کدام می‌تواند باشد؟

① -۲ ② -۱ ③ ۲ ④ ۱

۸- معادله‌ی $x=\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x+2}$ چند جواب حقیقی دارد؟

① ۰ ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

۹- اگر حاصل ضرب جواب‌های معادله‌ی $\frac{x}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}=\frac{a}{x^2-4}$ برابر $-\frac{3}{2}$ باشد، قدر مطلق تفاضل جواب‌های معادله کدام است؟

① ۱ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$

۱۰- معادله‌ی $x+\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2$ چند جواب دارد؟

① صفر ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

۱۱- به ازای کدام مقدار a ، $x=0$ یک جواب معادله‌ی $\frac{x+a}{3x+6}+\frac{x-1}{x-2}=\frac{a+2}{4-x^2}$ است؟

① صفر ② ۱ ③ -1 ④ ۲

۱۲ - اگر جواب‌های معادله‌ی $\frac{x-1}{x^2+x-6}=\frac{a}{2x-2}+\frac{a}{x^2+2x-3}$ برابر ۳ و β باشد، آن‌گاه $\beta^2+\beta$ کدام است؟

(۱) ۲۰ (۲) ۱۲ (۳) ۳۰ (۴) ۱۶

۱۳ - مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\sqrt{x-3}+2=\sqrt{2x+1}$ کدام است؟

(۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۲۲

۱۴ - حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی $\frac{\sqrt{x^2-2x-3}+7}{2\sqrt{x^2-2x-3}}=\sqrt{x^2-2x-3}+3$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) -4 (۳) ۶ (۴) -6

۱۵ - مجموع ریشه‌های معادله‌ی $x+1=\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۳

۱۶ - معادله‌ی $6=\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}$ چند ریشه دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار

۱۷ - اگر $x=2$ یکی از جواب‌های معادله‌ی $\frac{x}{x^2+3x-4}=\frac{m-3}{x(x+4)}+\frac{5-m}{2x}$ باشد، آن گاه جواب دیگر کدام است؟

(۱) ۳ (۲) -3 (۳) ۵ (۴) -5

۱۸ - معادله‌ی $\frac{1}{x^2-3x}=\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-3x-2}$ دارای چند جواب است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۹ - معادله‌ی $\frac{3x^2}{x^2+x-2}=\frac{2x}{x+2}+\frac{x+1}{x-1}$ چند ریشه دارد؟

(۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه

۲۰ - اگر یک ریشه‌ی معادله $\frac{104}{25}=\frac{1}{(3-x)^2}+\frac{1}{x^2}$ برابر $\frac{1}{2}$ باشد، آن‌گاه ریشه‌ی دیگر معادله کدام است؟

(۱) ۱- (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) ۲

۲۱ - معادله‌ی $-4=\frac{3t}{t^2+t}+\frac{7}{t-1}$ چند جواب دارد؟

(۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه

۲۲ - اگر α,β ریشه‌ی معادله‌ی $\frac{x+1}{x-3}=2-\frac{x^2+2x+1}{x^2-6x+9}$ باشند، حاصل $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}$ کدام گزینه است؟

(۱) $\frac{9}{8}$ (۲) $\frac{8}{7}$ (۳) $-\frac{9}{8}$ (۴) $-\frac{8}{7}$

۲۳ - اگر α و β ریشه‌های معادله $\frac{2}{x^2}+2x^2+9=7(x+\frac{1}{x})$ باشد، حاصلضرب آنها کدام است؟

(۱) $\frac{5}{2}$ (۲) ۱ (۳) $-\frac{5}{2}$ (۴) ۱-

۲۴ - آقای عماد چند اسباب‌بازی یکسان برای هدیه‌ی خرید که در مجموع ۱۲٫۰۰۰ تومان شد. اگر برای هر اسباب‌بازی ۱۰۰ تومان تخفیف بگیرد، با همان پول ۴ اسباب‌بازی بیشتر می‌تواند بخرد. قیمت هر اسباب‌بازی چقدر است؟

(۱) ۴۰۰ (۲) ۵۰۰ (۳) ۶۰۰ (۴) ۷۰۰

۲۵- در یک مزرعه‌ی شالیکاری دو کارگر با هم کار می‌کنند و کار را در ۱۸ روز تمام می‌نمایند. اگر هر کدام به تنهائی کار می‌کردند، کارگر اول ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم کار را تمام می‌کرد. کارگر اول چند روزه کار را تمام می‌کرد؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۵

۲۶- اگر ریشه‌های معادله‌ی $\frac{x^{2}+5x}{x^{2}-4}=\frac{x-1}{x+2}+\frac{x+1}{x-2}$ مقادیر α و β باشد، مقدار $\beta\sqrt{\alpha}+\alpha\sqrt{\beta}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۶

۲۷- اگر معادله‌ی $\frac{mx+n}{x^{2}-9}=\frac{x+1}{x-3}+\frac{x}{x+3}$ دارای بی‌شمار جواب باشد، عبارت $\frac{n}{m}$ کدام گزینه است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) -3

۲۸- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\frac{2}{x+1}=\frac{1}{x^{3}+x^{2}}$ برابر است با:

۱) صفر ۲) $+\sqrt{2}$ ۳) $-\sqrt{2}$ ۴) ۱

۲۹- معادله‌ی $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+3}=3x-1$ دارای .... می‌باشد.

۱) یک ریشه‌ی مثبت ۲) دو ریشه‌ی مثبت ۳) یک ریشه‌ی منفی ۴) دو ریشه‌ی منفی

۳۰- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $x\sqrt{4-x^{2}}+3\sqrt{4-x^{2}}=0$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) صفر

۳۱- معادله‌ی $2\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}+\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}=4\sqrt{1-x^{2}}$ چند ریشه دارد؟

۱) $\varnothing$ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۳۲- حاصل‌ضرب جوابهای معادله‌ی $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-2=2x-\frac{x}{\sqrt{x}+1}$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) صفر

۳۳- اگر α ریشه‌ی معادله‌ی $\sqrt[5]{x+\sqrt{x-2}}=\sqrt[4]{2-x}+\sqrt[5]{2x-2}$ حاصل $\alpha^{5}+\alpha^{3}$ کدام گزینه است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

۳۴- حاصل عبارت $\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3+\cdots}}}}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۳۵- به ازای چه مقدار از k، معادله‌ی $\frac{3x}{x-2}=\frac{6}{k}+\frac{1}{x+2}$ دارای جواب $x=1$ است؟

۱) ۱٫۸ ۲) ۱٫۸- ۳) ۱٫۲ ۴) ۱٫۲-

۳۶- جواب معادلهٔ گویای $ax^{-1}=\frac{a-x}{x}-\frac{x}{a-x}$ کدام است؟ $(a\neq 0)$

۱) $\frac{1}{3}a$ ۲) $\frac{2}{3}a$ ۳) $\frac{1}{2}a$ ۴) $\frac{3}{2}a$

۳۷ - خط یک متروی تهران به طول ۶۰ کیلومتر، میدان تجریش را به فرودگاه امام متصل می‌کند. برای انجام یک آزمایش، قطاری این مسیر را از شمال به جنوب با سرعت ثابت V کیلومتر بر ساعت و بدون توقف طی می‌کند. اگر در مسیر جنوب به شمال از سرعت قطار $۱۰\frac{km}{h}$ کم شود، زمان بازگشت نیم‌ساعت طولانی‌تر از زمان رفت می‌شود. سرعت برگشت قطار کدام است؟ $\left(\text{سرعت} = \frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{زمان}}\right)$

① $۴۰\frac{km}{h}$ ② $۳۰\frac{km}{h}$ ③ $۲۰\frac{km}{h}$ ④ $۱۰\frac{km}{h}$

۳۸ - اگر $x = ۲$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $\frac{۳a-۱}{x^۲-x+۱} + \frac{a-۲x}{x^۳+۱} = \frac{a}{x+۱}$ باشد، ریشهٔ دیگر این معادله کدام است؟

① $x=-۱$ ② $x=\frac{۳}{۴}$ ③ $x=-\frac{۱}{۲}$ ④ معادله ریشه دیگری ندارد.

۳۹ - ۵۰ گرم از محلولی با غلظت ۶۰ درصد داریم. چند گرم مادهٔ حل شدنی به آن اضافه کنیم تا غلظت محلول به ۸۰ درصد برسد؟

① ۱۰ ② ۲۰ ③ ۴۰ ④ ۵۰

۴۰ - تعداد جواب‌های معادلهٔ $\frac{۲-x}{x^۲-x} = \frac{۲}{x+۱} + \frac{۲x}{x^۲-۱}$ کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ صفر

۴۱ - مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{x^۴-۴x^۲} + \sqrt{۴x-x^۳} = ۰$ کدام است؟

① صفر ② -۱ ③ ۱ ④ ۲

۴۲ - اگر مجموعهٔ جواب معادلهٔ $\frac{۵-x}{۴x-x^۲} = \frac{m+۱}{۳x}$ تهی باشد، مقدار m برابر کدام گزینه می‌تواند باشد؟

① صفر ② ۱ ③ $\frac{۱۱}{۴}$ ④ $\frac{۳}{۴}$

۴۳ - تعداد جواب‌های معادلهٔ رادیکالی $\sqrt{۲-x} = \sqrt{۳x+۱} - \sqrt{۴x-۳}$ کدام است؟

① صفر ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

۴۴ - به‌ازای چند مقدار a، $x=-۱$ جواب معادلهٔ $\sqrt{x^۲+ax+۱۷} = ax-۲$ است؟

① صفر ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

۴۵ - جواب معادلهٔ $\sqrt{x+۲} - \sqrt{x-۲} = ۲\sqrt{x-۴}$ در کدام بازهٔ زیر قرار می‌گیرد؟

① $[۴,۴/۵)$ ② $(۴/۵,۵)$ ③ $[۵,۵/۵)$ ④ $[۵/۵,۶)$

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

$x=4$ ریشه‌ی معادله است، پس در معادله صدق می کند:

$$x=4 \Rightarrow 4+a=\sqrt{20-16} \Rightarrow a=-2$$

$$x-2=\sqrt{5x-x^2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2-4x+4=5x-x^2 \Rightarrow 2x^2-9x+4=0$$

$$\Rightarrow x_1+x_2=\frac{-b}{a} \Rightarrow \frac{9}{2} \xrightarrow{x_1=4} 4+x_2=\frac{9}{2} \Rightarrow x_2=\frac{1}{2}$$

$x_2=\frac{1}{2}$ در معادله صدق نمی کند $\left(x-2=\sqrt{5x-x^2}\right)$ پس به عنوان ریشه محسوب نمی‌شود.

۲ - گزینه ۳

$$\sqrt{3+\sqrt{x-x^3}}=\sqrt{3} \Rightarrow \text{توان ۲} \Rightarrow 3+\sqrt{x-x^3}=3$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-x^3}=0 \Rightarrow x-x^3=0 \Rightarrow x(1-x)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

هر سه x بدست آمده در معادله صدق می‌کنند و مجموع ریشه‌ها صفر است.

۳ - گزینه ۳ هر یک از پرانتزها را جداگانه ساده می کنیم.

$$\left(\sqrt[4]{5\sqrt[3]{5}}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\sqrt[4]{5\times 5^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\sqrt[4]{5^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(5^{\frac{4}{12}}\right)^{\frac{3}{2}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$$

$$\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=\underbrace{\left|\sqrt{5}-1\right|}_{+}=\sqrt{5}-1$$

پس داریم: $\sqrt{5}-\left(\sqrt{5}-1\right)=x^{\sqrt{2}} \to 1=x^{\sqrt{2}} \to x=1$

۴ - گزینه ۳

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\frac{5}{2x-1}+5 \to \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-1)}=\frac{5+10x-5}{2x-1} \to \frac{x-2}{x+1}=\frac{10x}{2x-1}$$

$$\to 2x^2-x-4x+2=10x^2+10x \to 8x^2+15x-2=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=225+64=289 \Rightarrow x_1=\frac{-15+17}{16}=\frac{1}{8} \quad x_2=\frac{-15-17}{16}=-2$$

ریشه‌ی بزرگتر، $x=\frac{1}{8}$ است.

۵ - گزینه ۲

$$\sqrt{2x+5}=5+2x \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2x+5=4x^2+20x+25 \to 4x^2+18x+20=0$$

$$\to 2x^2+9x+10=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=81-80=1 \to x=\frac{-9\pm 1}{4}=-2\ ,\ -\frac{5}{2}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند زیرا در معادله‌ی اصلی (اولیه) صدق می‌کنند.

۶ - گزینه ۱ شرط اولیه‌ی جواب آن است که زیر رادیکال‌ها بزرگتر مساوی صفر باشد.

$$-x^3+4x^2+25x-100\geq 0 \to x^3-4x^2-25x+100\leq 0$$

$$\to x^2(x-4)-25(x-4)\leq 0 \to (x-4)(x^2-25)\leq 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccccccccc} x & -\infty & & -5 & & 4 & & 5 & & +\infty \\ \hline \text{عبارت} \leq 0 & & - & 0 & + & 0 & - & 0 & + & \end{array} \Rightarrow x\leq -5 \text{ یا } 4\leq x\leq 5 \qquad (I)$$

$$-x^2+6x-8\geq 0 \to x^2-6x+8\leq 0 \to (x-4)(x-2)\leq 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & 2 & & 4 & & +\infty \\ \hline \text{عبارت} \leq 0 & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array} \Rightarrow 2\leq x\leq 4 \qquad (II)$$

تنها اشتراک بین $I\ ,\ II$ عدد $x=4$ است که در معادله هم صدق می کند (امتحان کنید) پس معادله فقط یک جواب دارد.

۷ - گزینه ۱ در طرف چپ و راست مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{(x-1)^2-(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}=ax\left(\frac{x+1-(x-1)}{x+1}\right) \Rightarrow \frac{-4x}{(x+1)(x-1)}=ax\left(\frac{2}{x+1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{۲ax}{x+۱}+\frac{۴x}{(x+۱)(x-۱)}=۰\Rightarrow \underbrace{\frac{۲x}{x+۱}}_{\text{فاکتور}}(a+\frac{۲}{x-۱})=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{۲x}{x+۱}=۰\Rightarrow x=۰ \\ a+\frac{۲}{x-۱}=۰\Rightarrow \frac{۲}{x-۱}=-a\Rightarrow \frac{۲}{-a}=x-۱\Rightarrow x=۱-\frac{۲}{a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{قدر مطلق تفاضل جواب‌ها}=|۱-\frac{۲}{a}-۰|=۲\Rightarrow \begin{cases} ۱-\frac{۲}{a}=۲\rightarrow \frac{۲}{a}=-۱\rightarrow a=-۲ \\ ۱-\frac{۲}{a}=-۲\rightarrow \frac{۲}{a}=۳\rightarrow a=\frac{۲}{۳} \end{cases}$$

۸ - گزینه ۴

$$\frac{۴}{x+۲}+\frac{۴}{x-۲}=x\Rightarrow \frac{۴(x-۲)+۴(x+۲)}{(x+۲)(x-۲)}=x\Rightarrow \frac{۸x}{x^۲-۴}=x$$

$$\frac{۸x}{x^۲-۴}-x=۰\Rightarrow x(\frac{۸}{x^۲-۴}-۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} \frac{۸}{x^۲-۴}=۱\Rightarrow x^۲-۴=۸\Rightarrow x^۲=۱۲\Rightarrow x=\pm۲\sqrt{۳} \\ x=۰ \end{cases}$$

هیچ‌کدام از این جواب‌ها ریشه‌ی مخرج معادله نیستند، پس هر سه قابل قبول هستند.

۹ - گزینه ۴

$$\frac{x}{x-۲}+\frac{x+۱}{x+۲}=\frac{a}{x^۲-۴}\rightarrow \frac{x(x+۲)+(x-۲)(x+۱)}{(x+۲)(x-۲)}=\frac{a}{(x+۲)(x-۲)}$$

$$\Rightarrow x^۲+۲x+x^۲+x-۲x-۲=a\Rightarrow ۲x^۲+x-۲-a=۰$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها}=-\frac{۳}{۲}\rightarrow \frac{c}{a}=-\frac{۳}{۲}\rightarrow \frac{-۲-a}{۲}=\frac{-۳}{۲}\rightarrow a=۱$$

$a=۱$ را در معادله‌ی درجه‌ی دوم قرار می‌دهیم:

$$۲x^۲+x-۳=۰\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases} x=۱ \\ x=\frac{c}{a}=-\frac{۳}{۲} \end{cases}\rightarrow |۱-(-\frac{۳}{۲})|=\frac{۵}{۲}$$

۱۰ - گزینه ۱

$$\underbrace{x+\frac{۱}{x}}+\frac{x}{x^۲+۱}=۲\rightarrow \frac{x^۲+۱}{x}+\frac{x}{x^۲+۱}=۲$$

(هرگاه مجموع دو عدد که عکس یکدیگر می‌باشند برابر ۲ باشد حتماً آن دو عدد، یک می‌باشند).

$$\frac{x^۲+۱}{x}=۱\rightarrow x^۲+۱=x\rightarrow x^۲-x+۱=۰\rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=۱-۴=-۳<۰\rightarrow \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد.}$$

۱۱ - گزینه ۱ $x=۰$ جواب معادله است بنابراین در معادله صدق می‌کند.

$$x=۰\xrightarrow{\text{صدق}}\frac{a}{۶}+\frac{۱}{۲}=\frac{a+۲}{۴}\xrightarrow{\times۱۲}۲a+۶=۳a+۶\rightarrow a=۰$$

۱۲ - گزینه ۱ $x=۳$ جواب معادله است بنابراین در معادله صدق می‌کند.

$$x=۳\xrightarrow{\text{معادله}}\frac{a}{۹+۶-۳}+\frac{a}{۶-۲}=\frac{۳-۱}{۹+۳-۶}\rightarrow \frac{a}{۱۲}+\frac{a}{۴}=\frac{۱}{۳}\xrightarrow{\times۱۲}a+۳a=۴\rightarrow ۴a=۴\rightarrow a=۱$$

حال، $a=۱$ را در معادله جایگزین می‌کنیم.

$$a=۱\rightarrow \frac{۱}{(x+۳)(x-۱)}+\frac{۱}{۲(x-۱)}=\frac{x-۱}{(x+۳)(x-۲)}\xrightarrow{\times۲(x+۳)(x-۱)(x-۲)}۲x-۴+(x+۳)(x-۲)=۲(x-۱)^۲$$

$$\rightarrow ۲x-۴+x^۲-۲x+۳x-۶=۲x^۲-۴x+۲\rightarrow x^۲-۷x+۱۲=۰\rightarrow (x-۴)(x-۳)=۰\rightarrow x=۳,x=۴$$

بنابراین $\beta=۴$ است پس $\beta^۲+\beta=۱۶+۴=۲۰$ است.

۱۳ - گزینه ۱

$$\sqrt{۲x+۱}=۲+\sqrt{x-۳}\xrightarrow{\text{توان ۲}}۲x+۱=۴+x-۳+۴\sqrt{x-۳}$$

$$\rightarrow x=۴\sqrt{x-۳}\xrightarrow{\text{توان ۲}}x^۲=۱۶(x-۳)\rightarrow x^۲=۱۶x-۴۸$$

$$\rightarrow x^۲-۱۶x+۴۸=۰\rightarrow (x-۱۲)(x-۴)=۰\rightarrow \begin{cases} x=۱۲ & \text{ق ق} \\ x=۴ & \text{ق ق} \end{cases}$$

بنابراین مجموع ریشه‌ها برابر ۱۶ می‌باشد.

۱۴ - گزینه ۲

$$\sqrt{x^۲-۲x-۳}=A\rightarrow A+۳=\frac{A+۷}{۲A}\rightarrow ۲A^۲+۶A=A+۷\rightarrow ۲A^۲+۵A-۷=۰$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} A = 1 \\ A = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{7}{2} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$A = 1 \rightarrow \sqrt{x^2 - 2x - 3} = 1 \xrightarrow{\text{توان}2} x^2 - 2x - 3 = 1 \rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -4$$

۱۵ - گزینه ۲

$$\sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} = x + 1 \xrightarrow{\text{توان}2} 2x + \sqrt{6x^2 + 1} = x^2 + 1 + 2x$$

$$\rightarrow \sqrt{6x^2 + 1} = x^2 + 1 \xrightarrow{\text{توان}2} 6x^2 + 1 = x^4 + 1 + 2x^2 \rightarrow x^4 - 4x^2 = 0$$

$$\rightarrow x^2(x^2 - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ق ق} \\ x = 2 \text{ ق ق} \\ x = -2 \text{ (در معادله صدق نمی‌کند) غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین مجموع ریشه‌ها برابر ۲ می‌باشد.

۱۶ - گزینه ۱

$$\sqrt[4]{x^3 + 8} = A \rightarrow A^2 + A - 6 = 0 \rightarrow (A + 3)(A - 2) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = -3 \rightarrow \sqrt[4]{x^3 + 8} = -3 \;:\; \text{امکان ندارد} \\ A = 2 \rightarrow \sqrt[4]{x^3 + 8} = 2 \xrightarrow{\text{توان}4} x^3 + 8 = 16 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

۱۷ - گزینه ۱ $x = 2$ در معادله صدق می‌کند:

$$\frac{5 - m}{4} + \frac{m - 3}{2 \times 6} = \frac{2}{4 + 6 - 4} \Rightarrow \frac{5 - m}{4} + \frac{m - 2}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{15 - 3m + m - 3}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow 12 - 2m = 4 \Rightarrow 2m = 8 \Rightarrow m = 4$$

توجه کنید که $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$؛ با جایگذاری $m = 4$ در معادله، آن را حل می‌کنیم:

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{x(x + 4)} = \frac{x}{(x + 4)(x - 1)} \Rightarrow \frac{x + 4 + 2}{2x(x + 4)} = \frac{x}{(x + 4)(x - 1)}$$

$$\rightarrow (x + 6)(x - 1) = 2x^2 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 2x^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

۱۸ - گزینه ۱ $x^2 - 3x$ را برابر A در نظر می‌گیریم.

$$\frac{1}{A - 2} + \frac{1}{A + 2} = \frac{1}{A} \xrightarrow{\times A(A+2)(A-2)} A(A + 2) + A(A - 2) = (A + 2)(A - 2)$$

$$\rightarrow A^2 + 2A + A^2 - 2A = A^2 - 4 \rightarrow A^2 = -4 : \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد}$$

بنابراین معادله‌ی داده شده دارای جواب نمی‌باشد.

۱۹ - گزینه ۱

$$\frac{x + 1}{x - 1} + \frac{2x}{x + 2} = \frac{3x^2}{x^2 + x - 2} \rightarrow \frac{x + 1}{x - 1} + \frac{2x}{x + 2} = \frac{3x^2}{(x + 2)(x - 1)}$$

$$\xrightarrow{\times(x+2)(x-1)} (x + 2)(x + 1) + 2x(x - 1) = 3x^2 \rightarrow x^2 + x + 2x + 2 + 2x^2 - 2x = 3x^2$$

$$\rightarrow 3x^2 + x + 2 = 3x^2 \rightarrow x = -2$$

این جواب غیر قابل قبول می‌باشد زیرا مخرج کسر را صفر می‌کند.

۲۰ - گزینه ۳ برای حل طرف اول معادله را $f(x)$ فرض می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(3 - x)^2}$$

باتوجه به فرض داریم:

$$f(x) = f(3 - x)$$

لذا اگر α ریشه‌ی معادله باشد $3 - \alpha$ هم ریشه‌ی معادله خواهد بود:

$$f(\alpha) = f(3 - \alpha) \xrightarrow{\alpha = \frac{1}{2}} f(\frac{1}{2}) = f(\frac{5}{2})$$

پس ریشه‌ی دوم معادله $\frac{۵}{۲}$ است.

۲۱ - گزینه ۲ می‌توان با ساده کردن معادله، معادله را راحت‌تر حل کرد.

$$\frac{۷}{t-۱}+\frac{۳t}{t^۲+t}=-۴\xrightarrow{t\neq ۰}\frac{۷}{t-۱}+\frac{۳}{t+۱}=-۴$$

$$\xrightarrow{\times(t-۱)(t+۱)}۷(t+۱)+۳(t-۱)=-۴(t+۱)(t-۱)\rightarrow ۱۰t+۴=-۴t^۲+۴$$

$$\rightarrow ۴t^۲+۱۰t=۰\rightarrow t(۴t+۱۰)=۰\rightarrow\begin{cases}t=۰ & \text{غ ق ق}\\ t=-\frac{۵}{۲}\end{cases}$$

پس معادله یک ریشه دارد.

۲۲ - گزینه ۲ ابتدا ساختار معادله را تغییر می‌دهیم

$$\frac{(x+۱)^۲}{(x-۳)^۲}-۲=\frac{x+۱}{x-۳}\rightarrow\left(\frac{x+۱}{x-۳}\right)^۲-۲=\frac{x+۱}{x-۳}$$

حال با تغییر متغیر $t=\frac{x+۱}{x-۳}$ داریم:

$$t^۲-۲=t\rightarrow t^۲-t-۲=۰\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases}t=-۱\\ t=۲\end{cases}$$

حالا به جای t عبارت مورد نظر را جایگذاری می‌نمائیم

$$\frac{x+۱}{x-۳}=-۱\rightarrow ۲x+۱=-x+۳\rightarrow x=۲\rightarrow x=۱\ \checkmark$$

$$\frac{x+۱}{x-۳}=۲\rightarrow ۲x-۶=x+۱\rightarrow x=۷\ \checkmark$$

با جایگذاری ریشه‌ها مشاهده می‌شود هر دو ریشه صدق می‌نمایند پس داریم:

$$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=۱+\frac{۱}{۷}=\frac{۸}{۷}$$

۲۳ - گزینه ۲

برای حل ابتدا از اتحاد فرعی استفاده می‌نماییم: $a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab$

$$۷(x+\frac{۱}{x})=۹+۲(x^۲+\frac{۱}{x^۲})\rightarrow ۷(x+\frac{۱}{x})=۹+۲\left((x+\frac{۱}{x})^۲-۲\right)$$

حال تغییر متغیر زیر را اعمال می‌نمائیم:

$$x+\frac{۱}{x}=t$$

$$۷t=۹+۲(t^۲-۲)\rightarrow ۷t=۹+۲t^۲-۴\rightarrow ۲t^۲-۷t+۵=۰$$

مجموع ضرایب معادله‌ی درجه دو صفر است پس: $t_۱=۱\ ,\ t_۲=\frac{c}{a}=\frac{۵}{۲}$

حال عبارت $x+\frac{۱}{x}$ را به جای t قرار می‌دهیم:

$$t_۱=۲۰\rightarrow x+\frac{۱}{x}=۱\xrightarrow{\times x}x^۲-x+۱=۰\rightarrow\Delta=-۳<۰\rightarrow \text{فاقد ریشه}$$

$$t_۲=\frac{۵}{۲}\rightarrow x+\frac{۱}{x}=\frac{۵}{۲}\xrightarrow{\times ۲x}۲x^۲-۵x+۲=۰\quad\begin{cases}x=\alpha\\ x=\beta\end{cases}\rightarrow P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=۱$$

۲۴ - گزینه ۳ برای حل تعداد اسباب‌بازی‌ها را x و قیمت هر کدام را y فرض می‌نمائیم. پس می‌توان دو معادله نوشت:

$$(I)\ xy=۱۲۰۰۰$$

$$(II)\ (x+۴)(y-۱۰۰)=۱۲۰۰۰$$

از معادله‌ی شماره‌ی (I) داریم: $y=\frac{۱۲۰۰۰}{x}$

پس در معادله‌ی شماره‌ی (II) , y را جایگذاری می‌نمائیم:

$$(x+۴)(\frac{۱۲۰۰۰}{x}-۱۰۰)=۱۲۰۰۰\rightarrow ۱۰۰(\frac{۱۲۰}{x}-۱)(x+۴)=۱۲۰۰۰$$

$$\rightarrow(\frac{۱۲۰}{x}-۱)(x+۴)=۱۲۰\rightarrow ۱۲۰+\frac{۴۸۰}{x}-x-۴=۱۲۰$$

$$\rightarrow ۴۸۰-x^۲-۴x=۰\rightarrow x^۲+۴x-۴۸۰=۰\rightarrow(x+۲۴)(x-۲۰)=۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=-۲۴ \text{ غ ق ق} \\ x=۲۰ \quad \rightarrow \quad y=\dfrac{۱۲۰۰۰}{۲۰}=۶۰۰ \end{cases}$$

۲۵ - گزینه ۲ برای حل مسئله باید میزان کار انجام شده در یک روز را در حالتهای مختلف محاسبه کرد:

هر دو با هم ۱۸ روز $\rightarrow$ مقدار کار انجام شده در یک روز $=\dfrac{۱}{۱۸}$

فرض می‌کنیم کارگر اول در x روز کار را انجام دهد پس:

کار انجام شده بوسیله‌ی کارگر اول در یک روز $=\dfrac{۱}{x}$

کارگر دوم در $x+۱۵$ روز کار را انجام می‌دهد، پس:

مقدار کار انجام شده بوسیله‌ی کارگر دوم در یک روز $=\dfrac{۱}{x+۱۵}$

حال می‌توان معادله‌ی زیر را تشکیل داد:

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۱۵}=\frac{۱}{۱۸}\xrightarrow{۱۸x(x+۱۵)}۱۸(x+۱۵)+۱۸x=x(x+۱۵)$$

$$\rightarrow ۱۸x+۲۷۰+۱۸x=x^۲+۱۵x\rightarrow x^۲-۲۱x-۲۷۰=۰\rightarrow(x-۳۰)(x+۹)=۰$$

$$\rightarrow\begin{cases} x=۳۰ \ \checkmark \\ x=\ -۹ \text{ غیرقابل قبول} \end{cases}$$

۲۶ - گزینه ۴ اگر بین عبارت طرف اول مخرج مشترک بگیریم داریم:

$$\frac{(x+۱)(x+۲)+(x-۱)(x-۲)}{x^۲-۴}=\frac{x^۲+۵x}{x^۲-۴}\rightarrow\frac{۲x^۲+۴}{x^۲-۴}=\frac{x^۲+۵x}{x^۲-۴}$$

باتوجه به برابر بودن مخرج‌ها، صورتها نیز باید با هم برابر باشند، پس:

$$۲x^۲+۴=x^۲+۵x\rightarrow x^۲-۵x+۴=۰\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases} x=۱ \\ x=\dfrac{c}{a}=۴ \end{cases}$$

هر دو ریشه هم قابل قبول می‌باشند، لذا داریم:

$$\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}\ \underline{\underline{\alpha=۴\ ,\ \beta=۱}}\ \ ۴\sqrt{۱}+۱\sqrt{۴}=۶$$

۲۷ - گزینه ۴ می‌توان به x دو مقدار دلخواه به جز ریشه‌های مخرج اختصاص داد، اگر $x=۰$ قرار دهیم داریم:

$$۰-\frac{۱}{۳}=-\frac{n}{۹}\rightarrow n=۳$$

حال اگر $x=-۱$ باشد داریم:

$$\frac{-۱}{۲}=\frac{-m+n}{-۸}\xrightarrow{n=۳}\ -\frac{۱}{۲}=\frac{-m+۳}{-۸}\rightarrow -m+۳=۴\rightarrow m=-۱$$

پس داریم: $\dfrac{n}{m}=\dfrac{۳}{-۱}=-۳$

۲۸ - گزینه ۱ برای حل می‌توان معادله را به فرم ساده‌تری تبدیل کرد.

$$\frac{۱}{x^۲(x+۱)}=\frac{۲}{x+۱}$$

می‌توان عامل را از دو طرف ساده کرد، چون این عامل به دلیل حضور در مخرج کسر الزاماً $x+۱\neq ۰$ می‌باشد.

$$\frac{۱}{x^۲}=۲\rightarrow x^۲=\frac{۱}{۲}\rightarrow x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

مجموع دو ریشه قرینه‌ی صفر می‌باشد.

۲۹ - گزینه ۱ می‌توان عبارت را به فرم دیگری بازنویسی کرد:

$$\sqrt{x^۲+۳x}=۳x-۱\xrightarrow{(\ )^۲}x^۲+۳x=۹x^۲-۶x+۱$$

مجموع ضرایب معادله صفر می‌باشد پس:

$$۸x^۲-۹x+۱=۰\rightarrow\begin{cases} x=۱ \\ x=\frac{۱}{۸} \end{cases}$$

با جایگذاری ریشه در معادله فقط $x=۱$ در معادله صدق می‌کند.

۳۰ - گزینه ۴ با فاکتورگیری معادله به شکل ساده‌تری تبدیل می‌شود

$$\sqrt{۴-x^۲}(x+۳)=۰\rightarrow\begin{cases} x+۳=۰\rightarrow x=-۳ \\ \sqrt{۴-x^۲}=۰\rightarrow ۴-x^۲=۰\rightarrow x=\pm۲ \end{cases}$$

با جایگذاری این ریشه‌ها در معادله مشخص می‌شود که $x = -۳$ در معادله صدق نمی‌نماید و فقط $x = \pm ۲$ قابل قبول هستند و مجموع آنها برابر صفر است.

۳۱ - گزینه ۱

قبل از حل معادله ابتدا دامنه‌ی معادله را تعیین می‌نمائیم

$$(I)\ \frac{x+۲}{x-۳} \geq ۰ \qquad \begin{array}{c|ccccc} x & & -۲ & & ۳ & \\ \hline P & + & \circ & - & \infty & + \\ & ج & ج & & & ج \end{array} \qquad D_۱ = (-\infty, -۲] \cup (۳, +\infty)$$

$$(II)\ \frac{x+۳}{x-۳} \geq ۰ \qquad \begin{array}{c|ccccc} x & & -۳ & & ۳ & \\ \hline P & + & \circ & - & \infty & + \\ & ج & ج & & & ج \end{array} \qquad D_۲ = (-\infty, -۳] \cup [۳, +\infty)$$

$$(III)\ ۱ - x^۲ \geq ۰ \quad x^۲ \leq ۱ \rightarrow |x| \leq ۱ \rightarrow D_۳ = [-۱, +۱]$$

حال باید بین آنها اشتراک گرفت

$$D_۱ \cap D_۲ \cap D_۳ = \varnothing$$

در نتیجه معادله هیچ ریشه‌ای ندارد

۳۲ - گزینه ۲ ابتدا عبارت را به فرمی تبدیل می‌نمائیم که ساده‌تر محاسبات قابل انجام باشد:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-۱} + \frac{x}{\sqrt{x}+۱} = ۲x + ۲$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{x + \sqrt{x} + x\sqrt{x} - x}{x-۱} = ۲x + ۲ \rightarrow \frac{\sqrt{x} + x\sqrt{x}}{x-۱} = ۲x + ۲$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{x}(x+۱)}{x-۱} = (x+۱) \times ۲$$

به خاطر وجود $\sqrt{x}$ الزاماً $x \geq ۰$ پس $x + ۱ > ۰$ و می‌توان از دو طرف معادله آن را حذف نمود.

$$\rightarrow \frac{\sqrt{x}}{x-۱} = ۲ \ \rightarrow \sqrt{x} = ۲(x-۱)$$

$$\xrightarrow{(\ )^۲} x = ۴x^۲ - ۸x + ۴ \rightarrow ۴x^۲ - ۹x + ۴ = ۰$$

با توجه به تولید معادله‌ی درجه دوم حاصلضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ خواهد شد.

$$P = x_۱ \cdot x_۲ = \frac{c}{a} = ۱$$

دقت کنید جمع ریشه‌های درجه دوم $S = -\frac{b}{a}$ پس: $S = x_۱ + x_۲ = \frac{۹}{۲}$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها مثبت و مجموع ریشه‌ها هم مثبت است پس هر دو ریشه مثبت و مخالف یک می‌باشد و قابل قبول هستند.

۳۳ - گزینه ۴ می‌توان از تعیین دامنه برای حل معادله استفاده کرد، زیرا دو عبارت قرینه داخل رادیکال با فرجه‌ی زوج وجود دارد.

$$\sqrt[۵]{x + \underset{\downarrow}{\sqrt{x-۲}}} = \sqrt[۴]{\underset{\downarrow}{۲-x}} + \sqrt[۵]{۲x-۲}$$

$$\begin{array}{ll} (I)\ x - ۲ \geq ۰ & (II)\ ۲ - x \geq ۰ \\ \quad x \geq ۲ \quad \cap & \quad x \leq ۲ \quad \rightarrow x = ۲ \end{array}$$

حال می‌توان با جایگذاری $x = ۲$ از وجود ریشه مطلع شد. با جایگذاری در معادله داریم:

$$x = ۲ \rightarrow \sqrt[۵]{۲} = \sqrt[۵]{۲}$$

باتوجه به تساوی برقرار شد پس $\alpha = ۲$ ریشه است و عبارت مورد نظر سوال برابر است با: $\alpha^۵ + \alpha^۳ = ۴۰$

۳۴ - گزینه ۲ برای محاسبه‌ی عبارت متناوب مطرح شده آن را برابر یک پارامتر مانند A قرار می‌دهیم:

$$A = \sqrt{۳ + ۲\sqrt{۳ + ۲\sqrt{۳ + ۲\sqrt{۳ + \cdots}}}}$$

$$\xrightarrow{(\ )^۲} A^۲ = ۳ + ۲\underbrace{\sqrt{۳ + ۲\sqrt{۳ + ۲\sqrt{۳ + ۲\sqrt{۳ + \cdots}}}}}_{A} \rightarrow A^۲ = ۳ + ۲A$$

$$A^۲ - ۲A - ۳ = ۰ \rightarrow (A-۳)(A+۱) = ۰ \rightarrow \begin{cases} A = ۳ \\ A = -۱ \end{cases}$$

باتوجه به اینکه A برابر رادیکال فرجه ۲ قرار گرفته لذا الزاماً باید مثبت باشد پس $A = ۳$ می‌باشد.

۳۵ – گزینه ۲ ریشه‌های یک معادله در معادله صدق می‌کند، لذا کافیست $x=۱$ را در معادله قرار دهیم.

$$\frac{۱}{x+۲}+\frac{۶}{k}=\frac{۳x}{x-۲}\xrightarrow{x=۱}\frac{۱}{۳}+\frac{۶}{k}=-۳\xrightarrow{\times ۳k}k+۱۸=-۹k$$

$$\rightarrow -۱۰k=۱۸\rightarrow k=-\frac{۱۸}{۱۰}=-۱/۸$$

۳۶ – گزینه ۲ ابتدا توان منفی را وارون می‌نماییم تا به توان مثبت تبدیل شود.

$$\frac{x}{a-x}-\frac{a-x}{x}=ax^{-۱}\rightarrow\frac{x}{a-x}-\frac{a-x}{x}=\frac{a}{x}$$

با فرض a و $x\neq ۰$ طرفین را در $x(a-x)$ ضرب می‌نمائیم:

$$\xrightarrow{x(a-x)}x^۲-(a-x)^۲=a(a-x)\rightarrow x^۲-(a^۲-۲ax+x^۲)=a^۲-ax$$

$$\rightarrow ۳ax-۲a^۲=۰\rightarrow a(۳x-۲a)=۰\begin{cases}a\neq ۰\\ ۳x-۲a=۰\rightarrow x=\frac{۲a}{۳}\end{cases}$$

۳۷ – گزینه ۲ ابتدا باید پارامترهای موجود را به یکدیگر مرتبط کرده و یک معادله بنویسیم.

طول مسیر $\ell=۶۰km$ ، سرعت مسیر رفت $=V$

حال با توجه به صورت سوال داریم:

زمان رفت $t=\frac{۶۰}{V}\ (۱)$

زمان برگشت $t'=\frac{۶۰}{V-۱۰}(۲)$

$$t'=t+۰/۵\xrightarrow{(۱),(۲)}\frac{۶۰}{V-۱۰}=\frac{۶۰}{V}+\frac{۱}{۲}$$

با فرض ۱۰ و $V\neq ۰$ طرفین را در $۲V(V-۱۰)$ ضرب می‌نمائیم:

$$\xrightarrow{\times ۲V(V-۱۰)}۱۲۰V=۱۲۰(V-۱۰)+V(V-۱۰)$$

$$\rightarrow ۱۲۰V=۱۲۰V-۱۲۰۰+V^۲-۱۰V$$

$$\rightarrow V^۲-۱۰V-۱۲۰۰=۰\rightarrow (V-۴۰)(V+۳۰)=۰$$

$$\begin{cases}V=۴۰\rightarrow V'=V-۱۰=۴۰-۱۰=۳۰{}^{km}/_{h}\rightarrow V'=۳۰{}^{km}/_{h}\\ V=-۳۰\quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۳۸ – گزینه ۴ ریشه‌های معادله در معادله صدق می‌نماید، قدم اول جایگذاری ریشه در معادله می‌باشد.

$$\frac{a}{x+۱}=\frac{a-۲x}{x^۳+۱}+\frac{۳a-۱}{x^۲-x+۱}$$

$$\xrightarrow{x=۲}\frac{a}{۳}=\frac{a-۴}{۹}+\frac{۳a-۱}{۳}\xrightarrow{\times ۹}۳a=a-۴+۹a-۳\rightarrow ۷=۷a\rightarrow a=۱$$

حال $a=۱$ را در معادله قرار می‌دهیم و معادله را به طور کامل حل می‌نماییم.

$$\frac{۱}{x+۱}=\frac{۱-۲x}{x^۳+۱}+\frac{۲}{x^۲-x+۱}\rightarrow\frac{۱}{x+۱}-\frac{۲}{x^۲-x+۱}=\frac{۱-۲x}{x^۳+۱}$$

$$\frac{(x^۲-x+۱)-۲(x+۱)}{(x+۱)(x^۲-x+۱)}=\frac{۱-۲x}{x^۳+۱}\rightarrow\frac{x^۲-۳x-۱}{x^۳+۱}=\frac{۱-۲x}{x^۳+۱}\rightarrow$$

$$x^۲-۳x-۱=۱-۲x\rightarrow x^۲-x-۲=۰\rightarrow (x-۲)(x+۱)=۰\rightarrow\begin{cases}x_۱=-۱\\ x_۲=۲\end{cases}$$

ریشه $x=-۱$ مخرج عبارت را صفر می‌نماید پس معادله ریشه دیگری ندارد.

۳۹ – گزینه ۴ ابتدا جرم مادهٔ حل شده را به دست می‌آوریم: $\frac{m}{۵۰}=\frac{۶۰}{۱۰۰}\Rightarrow m=۳۰gr$

وقتی x گرم از مادهٔ حل شدنی به محلول اضافه می‌شود، غلظت آن از تابع گویای $f(x)=\frac{۳۰+x}{۵۰+x}$ به‌دست می‌آید.

$$f(x)=\frac{۸۰}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{۳۰+x}{۵۰+x}=\frac{۸۰}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{۳۰+x}{۵۰+x}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow ۱۵۰+۵x=۲۰۰+۴x\Rightarrow x=۵۰gr$$

۴۰ - گزینه ۱

$$\frac{۲x}{x^۲-۱}+\frac{۲}{x+۱}=\frac{۲-x}{x^۲-x}$$

$$\to \left(\frac{۲x}{(x-۱)(x+۱)}+\frac{۲}{(x+۱)}=\frac{۲-x}{x(x-۱)}\right)\times x(x-۱)(x+۱)$$

$$\to ۲x^۲+۲x(x-۱)=(۲-x)(x+۱)\to ۲x^۲+۲x^۲-۲x=۲x+۲-x^۲-x$$

$$\to ۵x^۲-۳x-۲=۰\xrightarrow{۵-۳-۲=۰}\begin{cases} x=۱ \ \text{. غیر قابل قبول چون ریشهٔ مخرج است} \\ x=\frac{c}{a}\to \boxed{x=-\frac{۲}{۵}} \end{cases}$$

۴۱ - گزینه ۱

$$\sqrt{x^۴-۴x^۲}+\sqrt{۴x-x^۳}=۰$$

چون مجموع دو رادیکال با فرجهٔ ۲، صفر شده است پس هر دو رادیکال باید صفر باشند و جواب مشترک دو معادله، جواب تست است.

$$\begin{cases} x^۴-۴x^۲=۰\to x^۲(x^۲-۴)=۰\to x=۰,۲,-۲ \\ ۴x-x^۳=۰\to x(۴-x^۲)=۰\to x=۰,۲,-۲ \end{cases} \ \text{. هر سه جواب قابل قبول است}$$

$$\to ۰+۲+(-۲)=۰$$

۴۲ - گزینه ۳

$$\frac{m+۱}{۳x}=\frac{۵-x}{۴x-x^۲}\longrightarrow \frac{m+۱}{۳x}=\frac{x-۵}{x(x-۴)}$$

$$\to (m+۱)(x-۴)=۳(x-۵)\longrightarrow (m+۱)x-۴m-۴=۳x-۱۵$$

$$\longrightarrow (m-۲)x=۴m-۱۱\longrightarrow x=\frac{۴m-۱۱}{m-۲}$$

از آن‌جایی‌که $x=۰$ و $x=۴$ مخرج معادله را صفر می‌کنند، اگر جواب به‌دست آمده یکی از این اعداد باشد معادله جواب ندارد. پس داریم:

$$x=۰\longrightarrow ۴m-۱۱=۰\longrightarrow m=\frac{۱۱}{۴}$$

$$x=۴\longrightarrow \frac{۴m-۱۱}{m-۲}=۴\longrightarrow ۴m-۱۱=۴m-۸\longrightarrow -۱۱=-۸\longrightarrow \ \text{غیر ممکن}$$

همچنین اگر $m-۲=۰$ باشد، معادله ریشه ندارد، یعنی در حالت $m=۲$ نیز ریشه وجود ندارد.

۴۳ - گزینه ۱

$$\sqrt{۴x-۳}-\sqrt{۳x+۱}=\sqrt{۲-x}\xrightarrow{\text{توان ۲}}۴x-۳+۳x+۱-۲(\sqrt{۴x-۳})(\sqrt{۳x+۱})=۲-x$$

$$\to ۷x-۲+x-۲=۲(\sqrt{۴x-۳})(\sqrt{۳x+۱})\to ۸x-۴=۲(\sqrt{۴x-۳})(\sqrt{۳x+۱})$$

$$\to ۴x-۲=(\sqrt{۴x-۳})(\sqrt{۳x+۱})\xrightarrow{\text{توان ۲}}۱۶x^۲-۱۶x+۴=۱۲x^۲+۴x-۹x-۳$$

$$\to ۴x^۲-۱۱x+۷=۰\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases} x=۱\xrightarrow{\text{معادله}}۱-۲=۱ \ \text{.امکان ندارد} \\ x=\frac{c}{a}=۱=\frac{۷}{۴}\xrightarrow{\text{معادله}}۲-\frac{۵}{۲}=\frac{۱}{۲} \ \text{.امکان ندارد} \end{cases}$$

بنابراین معادله ریشه ندارد.

۴۴ - گزینه ۲

از آن‌جایی که $x=-۱$ جواب معادله است در معادله صدق می‌کند؛ داریم:

$$\sqrt{x^۲+ax+۱۷}=ax-۲\xrightarrow{x=-۱}\sqrt{(-۱)^۲+a(-۱)+۱۷}=a(-۱)-۲$$

$$\to \sqrt{۱۸-a}=-a-۲\xrightarrow{\text{توان ۲}}۱۸-a=a^۲+۴a+۴$$

$$\to a^۲+۵a-۱۴=۰\to (a+۷)(a-۲)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+۷=۰\to a=-۷\to \sqrt{۱۸-(-۷)}=-(-۷)-۲ \checkmark \\ a-۲=۰\to a=۲\to \sqrt{۱۸-۲}=-۲-۲ \times \end{cases} \to \ \text{.جواب معادله } a=-۷ \text{ است}$$

۴۵ - گزینه ۱

$$(\sqrt{x+۲}-\sqrt{x-۲}=۲\sqrt{x-۴})^۲\Rightarrow x+۲+x-۲-۲(\sqrt{x^۲-۴})=۴(x-۴)\Rightarrow ۲x-۱۶=-۲(\sqrt{x^۲-۴})$$

$\Rightarrow -x + ۸ = \sqrt{x^{۲} - ۴} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^{۲} - ۱۶x + ۶۴ = x^{۲} - ۴ \Rightarrow -۱۶x = -۶۸ \Rightarrow x = ۴/۲۵$ قق

بنابراین جواب معادله در بازهٔ $(۴/۵, ۴]$ قرار دارد.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۸ - ۴	۱۵ - ۲	۲۲ - ۲	۲۹ - ۱	۳۶ - ۲	۴۳ - ۱
۲ - ۳	۹ - ۴	۱۶ - ۱	۲۳ - ۲	۳۰ - ۴	۳۷ - ۲	۴۴ - ۲
۳ - ۳	۱۰ - ۱	۱۷ - ۱	۲۴ - ۳	۳۱ - ۱	۳۸ - ۴	۴۵ - ۱
۴ - ۳	۱۱ - ۱	۱۸ - ۱	۲۵ - ۲	۳۲ - ۲	۳۹ - ۴	
۵ - ۲	۱۲ - ۱	۱۹ - ۱	۲۶ - ۴	۳۳ - ۴	۴۰ - ۱	
۶ - ۱	۱۳ - ۱	۲۰ - ۳	۲۷ - ۴	۳۴ - ۲	۴۱ - ۱	
۷ - ۱	۱۴ - ۲	۲۱ - ۲	۲۸ - ۱	۳۵ - ۲	۴۲ - ۳	