نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: ریاضی۲

تاریخ آزمون: ۱۳۹۸/۱۱/۱۳

دبیر: آقای حدادی

فاخران

۱) دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x^۲-x-۲}-\sqrt{۲-x}$ کدام است؟

۱) $\{۲\}$ ۲) $[-۱,۲)$ ۳) $[-\infty,۲)$ ۴) $(-\infty,-۱]\cup\{۲\}$

۲) در نمودار تابع $f(x)=x^۲$ به ترتیب چهار عمل انجام می‌دهیم؛ انتقال ۴ واحد به طرف x های منفی - قرینه نسبت به محور x ها- دو برابر کردن برد- انتقال ۳ واحد به طرف y های منفی- معادله‌ی نمودار حاصل کدام است؟

۱) $y=۲x^۲-۸x-۱۱$ ۲) $y=۲x^۲-۱۶x-۲۹$ ۳) $y=-۲x^۲-۱۶x-۳۵$ ۴) $y=-۲x^۲+۱۶x-۳۵$

۳) دامنهٔ تابع $f(x)=۲x^۲-۷x+۳$ به‌صورت $D_f=(a,b)$ تعریف شده و وارون f، یک تابع است. (a,b) کدام‌یک از بازه‌های زیر می تواند باشد؟

۱) $(۰,۳)$ ۲) $(-۱,۲)$ ۳) $(-۲,۱)$ ۴) $(۱,۴)$

۴) اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $f=\{(x,-۲x+۷)|x\in A\}$ باشد، آن‌گاه حاصل $f^{-۱}(۳)+f(۱)$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۲ ۴) -۲

۵) اگر $f=\{(a^۲+۱,۳),(-۱,۷),(b+۱,۷),(۵,۳),(۳,۰),(۳,a+۲)\}$ تابعی یک‌به‌یک باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) -۴

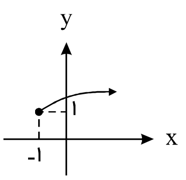
۶) اگر داشته باشیم $f(x)=\sqrt{۳-x}$ و $g(x)=\sqrt{x-۱}$، دامنهٔ تابع $h(x)=\dfrac{f(x)+g(x)}{g(x)}$ شامل چند عدد صحیح می‌باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷) اگر $f(x)=\begin{cases} x & , \ x<-۳ \\ ۲x^۲ & , \ x>۱ \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} x & , \ |x|<۲ \\ \dfrac{۱}{x} & , \ x<-۵ \end{cases}$ باشد، تابع $f\times g$ کدام است؟

۱) $\begin{cases} ۱ & , \ ۱<x<۲ \\ ۲x^۳ & , \ x<-۵ \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x^۲ & , \ -۱<x<۲ \\ ۲x & , \ x<-۵ \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} ۲x^۳ & , \ ۱<x<۲ \\ ۱ & , \ x<-۵ \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} ۲x^۳ & , \ ۱<x<۲ \\ ۱ & , \ x<-۳ \end{cases}$

۸) نمودار تابع $f(x)=a+\sqrt{x+b}$ به‌صورت زیر است. $f(\frac{۵}{۴})$ کدام است؟

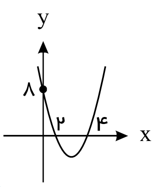


۱) ۲ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۷}{۲}$

۹) نمودار تابع $f(x)=|x|$ را ابتدا یک واحد به چپ منتقل کرده و سپس نسبت به محور xها قرینه کرده و در نهایت یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع g حاصل شود. حاصل $g(\sqrt{۲}-۱)$ کدام است؟

۱) $۲-\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}-۲$ ۳) $\sqrt{۲}-۱$ ۴) $۱-\sqrt{۲}$

۱۰) اگر وارون تابع $g(x)=ax+b$ نمودار سهمی زیر را در نقاطی به طول‌های ۱ و ۳ قطع کند، آن‌گاه جواب معادلهٔ $g^{-۱}(x)=g(x)$ کدام است؟



۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱۰}{۳}$

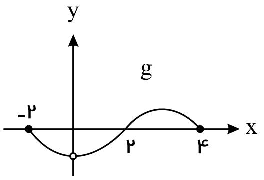
۱۱) اگر $f=\{(-۱,a),(۰,۱),(۱,b)\}$ و $\frac{۴}{f^۲}=\{(۰,۴),(-۱,۱)\}$ باشد، آنگاه $a^۲-b^۲$ کدام است؟

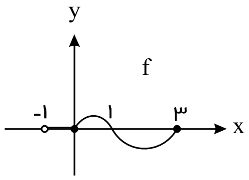
۱) ۴ ۲) -۴ ۳) ۳ ۴) -۳

۱۲) توابع $f(x)=\frac{x+۱}{x}$ و $g(x)=\frac{x^۲+۱}{x}$ مفروض‌اند، برد تابع $f-g$ کدام است؟

۱) $R-\{۰\}$ ۲) $R-\{۱\}$ ۳) $R-\{-۱\}$ ۴) R

۱۳) با توجه به نمودار توابع f و g، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{(\frac{f}{g})(x)}$ کدام است؟





۱) $(-۱,۰)\cup[۱,۲)\cup\{۳\}$ ۲) $(-۱,۳)-\{۰\}$ ۳) $(۱,۲)$ ۴) $(-۱,۰)$

۱۴) اگر تابع $f(x)=\begin{cases}۲x-۱ & , \quad x\geq ۲\\ x+a & , \quad x<۲\end{cases}$ وارون‌پذیر باشد، حدود a کدام است؟

۱) $a=۲$ ۲) $a\geq ۱$ ۳) $a\leq ۱$ ۴) $a\geq ۰$

۱۵) اگر $f(x)=\sqrt{x+۳}$, $g(x)=\sqrt{a-x}+۲b$, $D_{f-g}=[-۳,۱۰]$ و $(f+g)(۶)=۶$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

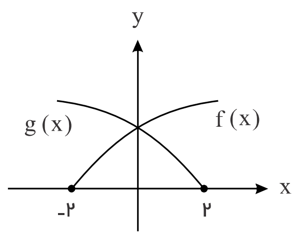
۱) $\frac{۱۹}{۲}$ ۲) ۱۰ ۳) $\frac{۲۱}{۲}$ ۴) ۱۱

۱۶) اگر f و g دو تابع خطی باشند و $(f+g)(x)=۳x+۱$, $(f-g)(x)=۲-x$ باشد، مقدار $\left(\frac{f}{g}\right)(۶)$ کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۱۱}$ ۲) $\frac{۲۵}{۱۸}$ ۳) $\frac{۱۷}{۱۴}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲۳}$

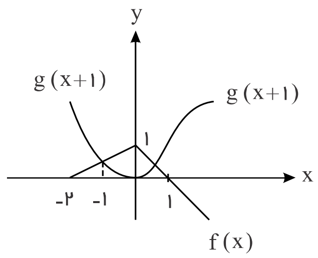
۱۷) نمودارهای f و g به‌صورت زیر است. در دامنهٔ تابع $\frac{(f+g)(x)}{(f-g)(x)}$ چند مقدار صحیح وجود دارد؟

۱) بی‌شمار ۲) ۵
۳) ۳ ۴) ۴



۱۸) نمودار تابع $y_۱=f(x)$ و $y_۲=g(x+۱)$ به شکل زیر است. اگر $h(x)=(f+g)(x)$ باشد، آنگاه حاصل $h(۰)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲



۱۹) اگر نمودار تابع خطی f، نمودار وارون خود را فقط در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کند و $f(۱)=۲$ باشد، نمودار تابع $f^{-۱}$، محور xها را در کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

۲۰) اگر $f(x)=\sqrt{n-۳x}$ و $g(x)=\sqrt{x-۳m}$ و تابع $f+g$ به‌صورت $\{(۱,a)\}$ باشد، آن‌گاه مقدار $am+n$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۳ ۳) صفر ۴) ۱

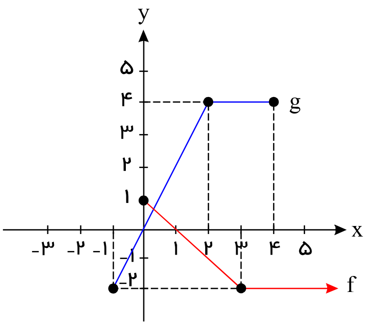
۲۱ تابع $f(x) = x|x|$، وارون خود را در چند نقطه قطع می‌کند؟

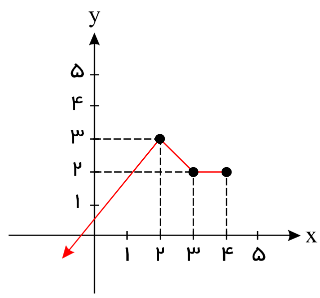
۱) صفر ۲) دو ۳) سه ۴) پنج

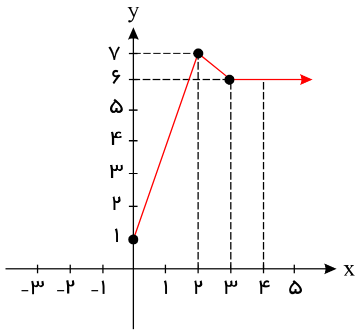
۲۲ اگر $f(x) = \sqrt{4 - x}$ و $g = \{(1,2), (4,7), (3,5), (0,-4), (2,0)\}$ باشد، آن‌گاه دامنهٔ تابع $\frac{f}{g^{-1}}$ کدام است؟

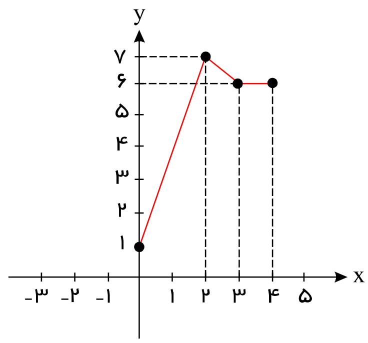
۱) $\{0, 2, 4\}$ ۲) $\{0, 2\}$ ۳) $\{0, -4\}$ ۴) $\{1, 2, -4\}$

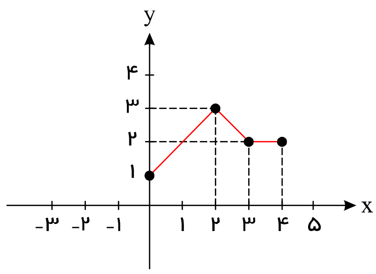
۲۳ هرگاه نمودار دو تابع f و g به‌صورت زیر باشد، نمودار تابع $f + 2g$ کدام است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


۲۴ تابع خطی f مفروض است. اگر نمودار دو تابع f و f^{-1} محور xها را در نقطه‌ای به‌طول یک قطع کنند، $f^{-1}(2)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۲۵ اگر $f(x) = \begin{cases} x & , x \geq 1 \\ 1 & , x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = \sqrt{2 - x^2}$، آنگاه تعداد صفرهای تابع $f + g$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۶ اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = 1 + \sqrt{x}$ باشد، آنگاه برد تابع $(g - f)(x)$ کدام است؟

۱) $(-\infty, 1]$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $[-1, +\infty)$ ۴) $[0, +\infty)$

۲۷ تابع $f(x) = |\frac{x}{2} + a|$ در بازهٔ $(-2, 1)$ یک‌به‌یک است. حدود a کدام است؟

۱) $[-\frac{1}{2}, 1]$ ۲) $\mathbb{R} - (-\frac{1}{2}, 1)$ ۳) $\mathbb{R} - (-4, 2)$ ۴) $[-4, 2]$

۲۸ اگر $f(x) = \sqrt{x} + 2x + 1$ باشد، آن‌گاه حاصل $f^{-1}(1) + f^{-1}(4)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۳

۲۹) نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x+۲}{x+۱}$ از کدام ناحیه (نواحی) محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

۱) دوم ۲) دوم و چهارم ۳) چهارم ۴) از همهٔ نواحی عبور می‌کند.

۳۰) توابع $f(x)=۲x-|x|$ و $g(x)=x-|۲x|$ از نظر یک‌به‌یک بودن به ترتیب از راست به چپ چگونه‌اند؟

۱) یک‌به‌یک - یک‌به‌یک ۲) یک‌به‌یک - غیر یک‌به‌یک ۳) غیر یک‌به‌یک - یک‌به‌یک ۴) غیر یک‌به‌یک - غیر یک‌به‌یک

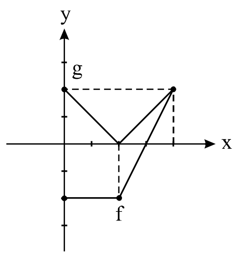
۳۱) به‌ازای کدام مقدار a، وارون تابع $f(x)=\dfrac{۱-۲x}{۳x+۴}$ از نقطهٔ $(a+۴,a)$ می‌گذرد؟

۱) -۵ و -۱ ۲) ۲ و -۱ ۳) ۲ و ۱ ۴) ۵ و ۱

۳۲) اگر $f(x)=x^۲+|x|$ و $g(x)=\dfrac{۱}{x}$، آنگاه برد تابع $(f\cdot g)(x)$ چند عدد صحیح را شامل نمی‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۳) با توجه به نمودار دو تابع f و g، ضابطهٔ تابع $y=(f+g)(x)$ کدام است؟



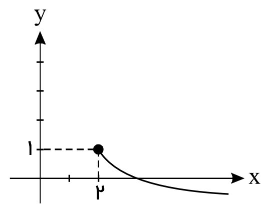
۱) $y=\begin{cases}-x & ,\ ۰\le x\le ۲\\ ۳x-۸ & ,\ ۲<x\le ۴\end{cases}$

۲) $y=\begin{cases}x-۴ & ,\ ۰\le x\le ۲\\ ۳x-۸ & ,\ ۲<x\le ۴\end{cases}$

۳) $y=\begin{cases}-x & ,\ ۰\le x\le ۲\\ x-۶ & ,\ ۲<x\le ۴\end{cases}$

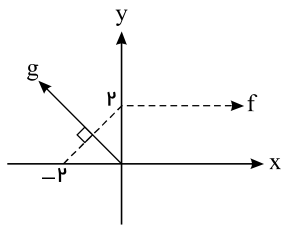
۴) $y=\begin{cases}x-۴ & ,\ ۰\le x\le ۲\\ x-۶ & ,\ ۲<x\le ۴\end{cases}$

۳۴) شکل زیر نمودار تابع $y=b-\sqrt{x+a}$ است، مقدار $۲a+b$ کدام است؟



۱) -۳ ۲) -۱ ۳) ۵ ۴) ۳

۳۵) اگر نمودارهای f و g به‌صورت زیر باشند، برد تابع $f+۲g$ کدام است؟ (تابع f به‌صورت خط‌چین و تابع g با خط پر برای تمایز دو تابع رسم شده است.)



۱) $[-۲,۰]$

۲) $[۲,۴]$

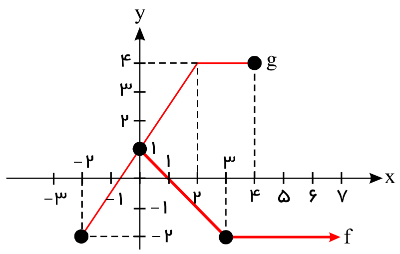
۳) $[۲,۵)$

۴) $[-۲,۲]$

۳۶) کم‌ترین مقدار k کدام باشد تا تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲-۲x+k & ,\ x<۰\\ -۲x+۳ & ,\ x\ge ۰\end{cases}$ یک‌به‌یک باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳۷) اگر نمودار دو تابع f و g به‌صورت زیر باشد، بیش‌ترین مقدار تابع $f+۲g$ کدام است؟



۱) ۴

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۷

۳۸) اگر $f(x)=ax+b$ تابع خطی و $f^{-۱}(x)=\dfrac{۴}{۹}(f(x))-\dfrac{۷۰}{۹}$ باشد، حاصل $f^{-۱}(۶)$ کدام است؟ $(b>۰, a\neq ۰)$

۱) ۱۶ ۲) $-\dfrac{۲}{۳}$ ۳) ۷ ۴) $\dfrac{۳}{۲}$

۳۹) اگر توابع f و g وارون‌پذیر باشند و داشته باشیم: $f(۳x-۱)=۲g(x+۲)-۱$ و $g^{-۱}(۲)=۴$، آنگاه مقدار $f^{-۱}(۳)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) -۱ ۴) ۱

۴۰) تابع $f(x)=|۲x-۳|+۱$ با دامنهٔ $[-۱,۱]$ مفروض است. وارون تابع f کدام است؟

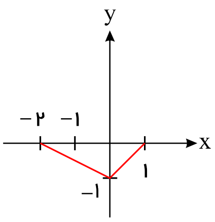
۱) $f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۲}x+۲; D_{f^{-۱}}=[-۱,۱]$ ۲) $f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۲}x+۲; D_{f^{-۱}}=[۲,۶]$

۳) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲}x+۱; D_{f^{-۱}}=[-۱,۱]$ ۴) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲}x+۱; D_{f^{-۱}}=[-۴,۰]$

۴۱) به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر a، تابع $f(x)=-x^۲-ax+۱$ در فاصلهٔ $[-۲,۱]$ یک‌به‌یک است؟

۱) $(-۴,۲)$ ۲) $\mathbb{R}-(-۴,۲)$ ۳) $(-۲,۴)$ ۴) $\mathbb{R}-(-۲,۴)$

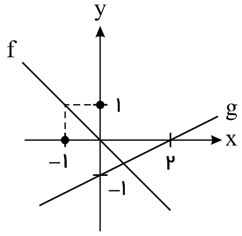
۴۲) اگر نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت زیر باشد، دامنهٔ تابع $y=\dfrac{f(-۱-x)+۱}{f(x)}$ کدام است؟

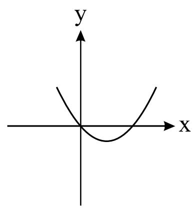
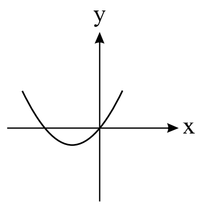
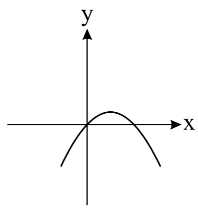
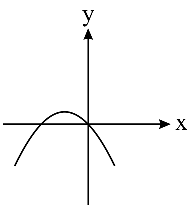


۱) $[-۲,۱)$ ۲) $(-۲,۱]$

۳) $[-۲,۱]$ ۴) $(-۲,۱)$

۴۳) اگر نمودارهای توابع f و g به‌صورت مقابل باشند، نمودار تابع $f\times g^{-۱}$ شبیه کدام است؟



۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

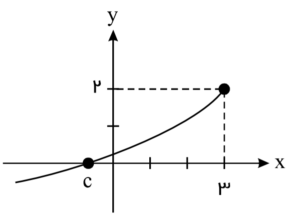
۴۴) برای دو تابع خطی f و g داریم: $(f+g)(x)=۲x-۱$ و $(g-f)(x)=۸x-۳$. حاصل $(f\cdot g)(۱)$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۶ ۳) -۶ ۴) -۱۵

۴۵) اگر تابع خطی $f(x)=ax+۳$ محور x ها را در نقطه‌ای به طول $\frac{۳}{۴}$ قطع کند، ضابطهٔ تابع وارون f کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۴}x-\frac{۳}{۴}$ ۲) $f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۴}x+\frac{۳}{۴}$ ۳) $f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۳}x-۳$ ۴) $f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۳}x+\frac{۳}{۴}$

۴۶) اگر شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=a-\sqrt{b-x}$ باشد، مقدار abc کدام است؟



۱) ۶ ۲) ۴

۳) -۴ ۴) -۶

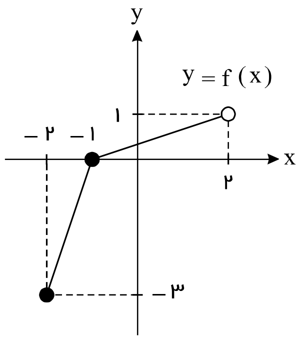
۴۷) اگر $f(x)=۲|۳-x|-۱$ باشد، تابع f را با محدود کردن دامنه‌اش در کدام بازهٔ زیر نمی‌توان به یک تابع یک به یک تبدیل کرد؟

۱) $(-۱,۴)$ ۲) $(۳,۱۰)$ ۳) $(۰,۳)$ ۴) $(-۴,۰)$

۴۸ اگر $f=\{(-۲,۱),(-۱,۰),(۰,۲),(۱,-۲)\}$ و $g=\{(-۱,۲),(۰,-۲),(۱,۰),(۲,-۱)\}$ باشد، مجموع اعضای برد تابع $\left(\frac{g^{-۱}}{f^{-۱}}\right)^{-۱}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) ۱

۴۹ نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است، اگر تابع $g(x)=(f+f^{-۱})(x)$ باشد، حاصل $g(-۱)$ کدام است؟



۱) $-\frac{۵}{۳}$

۲) $-\frac{۴}{۳}$

۳) -۶

۴) $-\frac{۲}{۳}$

۵۰ تابع خطی f مفروض است. اگر نمودار f محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲ و نمودار $f^{-۱}$ را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کند، حاصل $f^{-۱}(-۳)$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۲

پاسخنامه تشریحی

۱ ۱ ۲ ۳ **۴** زیر هر دو رادیکال باید بزرگ‌تر مساوی صفر باشد.

$$x^2 - x - 2 \geq 0 \to (x-2)(x+1) \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x \leq -1\ x \geq 2 (I)$$

$$2 - x \geq 0 \to x \leq 2 \quad (II)$$

از اشتراک I , II نتیجه می‌شود $x \leq -1$ یا $x = 2$ یعنی $x \in (-\infty, -1] \cup \{2\}$.

۲ ۱ ۲ **۳** ۴

به ترتیب اعمال مورد نظر را انجام می‌دهیم:

$$f(x) = x^2 \xrightarrow{\text{انتقال ۴ واحد به طرف } x \text{های منفی}} f_1(x) = (x+4)^2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ها}} f_2(x) = -(x+4)^2$$

$$\xrightarrow{\text{دو برابر کردن برد}} f_3(x) = -2(x+4)^2 \xrightarrow{\text{انتقال ۳ واحد به طرف } y \text{های منفی}} f_4(x) = -2(x+4)^2 - 3$$

$$f_4(x) = -2(x^2 + 8x + 16) - 3 \to y = -2x^2 - 16x - 35$$

۳ ۱ ۲ **۳** ۴ اگر وارون یک تابع، خود یک تابع باشد، آنگاه تابع یک‌به‌یک است، پس f باید یک‌به‌یک باشد.

از آنجا که نمودار تابع f یک سهمی است، برای یک به یک بودن، بازهٔ (a,b) نباید شامل رأس سهمی باشد.

$$x_{\text{رأس سهمی}} = \frac{-b}{2a} = -\frac{(-7)}{2 \times (2)} = \frac{7}{4} = 1/75$$

از بین گزینه‌ها، تنها گزینهٔ (۳) شامل رأس سهمی نمی‌باشد.

۴ **۱** ۲ ۳ ۴ با قرار دادن اعضای مجموعهٔ A به جای x، تابع f را می‌نویسیم:

$$f = \{(1,5), (2,3), (3,1), (4,-1)\} \Rightarrow f^{-1}(3) = 2\ ,\ f(1) = 5 \Rightarrow f^{-1}(3) + f(1) = 2 + 5 = 7$$

۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\begin{cases} (a^2+1, 3) \in f \\ (5,3) \in f \end{cases} \xrightarrow{f \text{ یک‌به‌یک}} a^2 + 1 = 5 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-1,7) \in f \\ (b+1, 7) \in f \end{cases} \xrightarrow{f \text{ یک‌به‌یک}} b + 1 = -1 \Rightarrow b = -2$$

اگر $a = 2$ باشد دو زوج‌مرتب $(3,4)$ و $(3,0)$ را داریم که شرط تابع بودن را نقض می‌کند.

اگر $a = -2$ باشد تابع f به‌صورت $f = \{(-1,7), (5,3), (3,0)\}$ می‌شود و یک‌به‌یک است، پس:

$$a + b = -2 - 2 = -4$$

۶ ۱ ۲ **۳** ۴

قدم اول محاسبهٔ توابع f و g می‌باشد:

$$f(x) = \sqrt{3 - x} \Rightarrow 3 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow D_f = (-\infty, 3]$$

$$g(x) = \sqrt{x - 1} \Rightarrow x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_g - [1, +\infty)$$

در تابع h دامنهٔ صورت کسر اشتراک دامنهٔ توابع f و g می‌باشد.

$$\Rightarrow D_f \cap D_g = [1, 3]$$

اما در رابطه با مخرج کسر تابع h، باید ریشه‌های g را از آن دامنه کم کنیم.

$$g(x) \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

در نهایت دامنهٔ تابع h، برابر است با: $D_h = (1, 3]$

که این بازه شامل ۲ عدد صحیح می‌باشد.

۷ ۱ ۲ **۳** ۴ برای تشکیل $f \times g$ ابتدا باید دامنهٔ مشترک f و g را مشخص نماییم سپس در هر بخش ضابطه‌ها را در هم ضرب نماییم.

$$\left.\begin{matrix} D_f = (-\infty, -3) \cup (1, +\infty) \\ D_g = (-\infty, -5) \cup (-2, 2) \end{matrix}\right\} D_{f \times g} = D_f \cap D_g = (-\infty, -5) \cup (1, 2)$$

حال در هر بخش از دامنهٔ مشترک ضابطه‌های مرتبط را در هم ضرب می‌نماییم:

$$(f \times g)(x) \begin{cases} (x)(2x^2) & 1 < x < 2 \\ x \cdot (\frac{1}{x}) & x < -5 \end{cases} \to (f \times g)(x) \begin{cases} 2x^3 & 1 < x < 2 \\ 1 & x < -5 \end{cases}$$

۸ ۱ **۲** ۳ ۴ برای محاسبهٔ پارامتر b می‌توان از دامنه استفاده کرد.

$$D_f = [-1, +\infty) \to x \geqslant -1$$

$$f(x)=a+\sqrt{x+b}\to x+b\geq ۰\to x\geq -b\xrightarrow{x\geq -۱} -b=-۱ \quad \boxed{b=۱}$$

برای محاسبه پارامتر a مختصات نقطهٔ $(-۱,۱)$ در تابع جایگذاری می‌نماییم

$$۱=a+\sqrt{-۱+۱}\to a=۱\to f(x)=۱+\sqrt{x+۱}$$

$$f(\frac{۵}{۴})=۱+\sqrt{\frac{۵}{۴}+۱}=۱+\sqrt{\frac{۹}{۴}}=۱+\frac{۳}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

۹ ۱ ۲ ۳ **۴** تعداد درون تابع منحنی را در راستای محور xها و خلاف جهت جابه‌جا می‌نماید و اعداد بیرون تابع که با تابع جمع جبری شوند نمودار را در راستای محور yها و هم جهت جابه‌جا می‌نماید. ضمناً قرینه شدن نسبت به محور xها به علت وجود منفی پشت تابع می‌باشد.

$$f(x)=|x|\xrightarrow{\text{یک واحد به چپ}} f(x+۱)=|x+۱|$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} -f(x+۱)=-|x+۱|\xrightarrow{\text{یک واحد بالا}} -f(a+۱)+۱=-|x+۱|+۱$$

$$g(x)=-|x+۱|+۱\to g(\sqrt{۲}-۱)=-\left|\sqrt{۲}-۱+۱\right|+۱=-\sqrt{۲}+۱$$

۱۰ **۱** ۲ ۳ ۴ ابتدا معادلهٔ سهمی را به دست می‌آوریم. $x=۲$ و $x=۴$ ریشه‌های تابع درجه دوم هستند:

$$f(x)=a'(x-۲)(x-۴)$$

$$\xrightarrow{\text{نقطه } (۰,۸) \text{ در معادله صدق می‌کند.}} ۸=a'(۰-۲)(۰-۴)\Rightarrow ۸a'=۸\Rightarrow a'=۱\Rightarrow f(x)=(x-۲)(x-۴)$$

وارون g، نمودار را در نقاط ۱ و ۳ قطع می‌کند، پس:

$$x=۱\Rightarrow f(۱)=(۱-۲)(۱-۴)=(-۱)(-۳)=۳\Rightarrow (۱,۳)\in g^{-۱}$$

$$x=۳\Rightarrow f(۳)=(۳-۲)(۳-۴)=۱(-۱)=-۱\Rightarrow (۳,-۱)\in g^{-۱}$$

حال معادلهٔ خط $g^{-۱}$ را می‌یابیم:

$$m=\frac{۳-(-۱)}{۱-۳}=\frac{۴}{-۲}=-۲\Rightarrow y-۳=-۲(x-۱)$$

$$\Rightarrow y=-۲x+۵\Rightarrow g^{-۱}(x)=-۲x+۵$$

حال وارون $g^{-۱}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$y=-۲x+۵\Rightarrow ۲x=۵-y$$

$$\Rightarrow x=\frac{۵-y}{۲}\Rightarrow g(x)=\frac{۵-x}{۲}, g^{-۱}(x)=g(x)\Rightarrow -۲x+۵=\frac{۵-x}{۲}\Rightarrow x=\frac{۵}{۳}$$

۱۱ **۱** ۲ ۳ ۴ ابتدا دامنه تابع $\frac{۴}{f^{۲}}$ را بررسی می‌نماییم. دامنه این تابع همان دامنه f است. به‌جز ریشه‌های مخرج یا همان ریشه‌های $f^{۲}$، دامنه شامل $\{۰,-۱\}$ می‌باشد، لذا $f(۱)=۰$ خواهد بود.

$$f(۱)=۰\to \boxed{b=۰}$$

$$(\frac{۴}{f^{۲}})(-۱)=۱\to \frac{۴}{f^{۲}(-۱)}=۱\to f^{۲}(-۱)=۴\to \boxed{a^{۲}=۴}$$

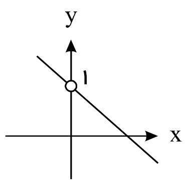
$$a^{۲}-b^{۲}=۴-۰=۴$$

۱۲ ۱ **۲** ۳ ۴ برای محاسبه برد ابتدا تابع $f-g$ را تشکیل می‌دهیم.

$$\left.\begin{matrix}D_f=\mathbb{R}-\{۰\}\\ D_g=\mathbb{R}-\{۰\}\end{matrix}\right\}\to D_{f-g}=\mathbb{R}-\{۰\}$$

$$f(x)-g(x)=\frac{x+۱}{x}-\frac{x^{۲}+۱}{x}=\frac{x+۱-x^{۲}-۱}{x}=\frac{x-x^{۲}}{x}=\frac{x(۱-x)}{x}\overset{\text{با فرض } x\neq ۰}{=\!=\!=\!=} ۱-x$$

حال خط $y=۱-x$ را با توجه به دامنه $D_{f-g}=\mathbb{R}-\{۰\}$ رسم می‌نماییم.



$$D_{f-g}=\mathbb{R}-\{۱\}$$

۱۳ **۱** ۲ ۳ ۴ باید عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$(\frac{f}{g})(x)\geq ۰$$

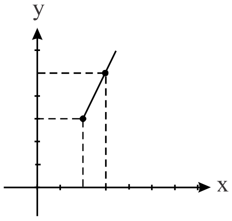
از تعیین علامت استفاده می‌کنیم:

x	۲-		۱-		۰		۱		۲		۳		۴
f			صفر ت ن		○	+	○	−		−	○		
g	○	−		−	ت ن	−		−	○	+		+	○
$\frac{f}{g}$			ت ن		ت ن صفر	−	○	+	ت ن	−	○		

با توجه به جدول تعیین علامت داریم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \geq ۰ \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (-۱, ۰) \cup [۱, ۲) \cup \{۳\}$$

(۱۴) (۴) (۳) (۲) (۱) با رسم تابع f به‌ازای $x \geq ۲$ داریم:



برای یک‌به‌یک بودن می‌بایست، هر خط موازی محور xها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند، این ویژگی زمانی برقرار است که در ضابطهٔ دوم به‌ازای $x < ۲$ مقادیر $x + a$ کوچکتر از ۳ باشد، پس باید $a \leq ۱$ باشد.

(۱۵) (۴) (۳) (۲) (۱) برای حل سوال ابتدا باید دامنهٔ هر دو ضابطه را تعیین نماییم و بین آن‌ها اشتراک بگیریم:

$$f(x) = \sqrt{x + ۳} \to x + ۳ \geq ۰ \to x \geq -۳$$

$$g(x) = \sqrt{a - x} \to a - x \geq ۰ \to x \leq a$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = [-۳, a] = [-۳, ۱۰] \to \boxed{a = ۱۰}$$

حال برای محاسبهٔ پارامتر b باید تابع $f + g$ را بسازیم:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x + ۳} + \sqrt{a - x} + ۲b$$

$$(f + g)(۶) = f(۶) + g(۶) = \sqrt{۶ + ۳} + \sqrt{۱۰ - ۶} + ۲b$$

$$۳ + ۲ + ۲b = ۶ \to ۲b = ۱ \to \boxed{b = \frac{۱}{۲}}$$

پس جواب نهائی برابر است با:

$$a + b = ۱۰ + \frac{۱}{۲} = \frac{۲۱}{۲}$$

(۱۶) (۴) (۳) (۲) (۱) برای محاسبه f و g می‌توان یک دستگاه تشکیل داد:

$$\begin{array}{l} (f + g)(x) = ۳x + ۱ \to \\ (f - g)(x) = ۲ - x \to \end{array} \begin{cases} f(x) + g(x) = ۳x + ۱ \\ f(x) - g(x) = ۲ - x \end{cases}$$

$$\boxed{+} \quad ۲f(x) = ۲x + ۳$$

$$\boxed{f(x) = \frac{۲x + ۳}{۲}}$$

$$g(x) = (۳x + ۱) - f(x) = ۳x + ۱ - \frac{۲x + ۳}{۲}$$

$$g(x) = \frac{۴x - ۱}{۲} \to \boxed{g(x) = ۲x - \frac{۱}{۲}}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(۶) = \frac{f(۶)}{g(۶)} = \frac{\frac{۱۵}{۲}}{\frac{۲۳}{۲}} = \frac{۱۵}{۲۳}$$

(۱۷) (۴) (۳) (۲) (۱)

$$\begin{cases} D_f : x \geq -۲ \\ D_g : x \leq ۲ \end{cases} \Rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-۲, ۲]$$

همچنین $D_{f-g} = [-۲, ۲]$.

از طرفی $(f - g)(x) = ۰$ نتیجه می‌دهد: $f(x) = g(x)$، بنابراین $x = ۰$ است. در نتیجه:

$$D_{\frac{f+g}{f-g}} = [-۲, ۲] - \{۰\}$$

دامنهٔ تابع مورد نظر شامل ۴ عدد صحیح است.

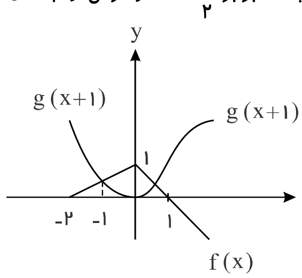
۱۸ ۴ **۳** ۲ ۱

$h(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow h(۰) = f(۰) + g(۰)$

با توجه به نمودار $f(۰) = ۱$ است. با توجه به اینکه نمودار $g(x+۱)$ را داریم، برای پیدا کردن $g(۰)$ باید x را برابر -۱ بگذاریم. ضابطهٔ پاره‌خطی که $g(۰)$ روی آن است را پیدا می‌کنیم.

شیب خط برابر $m = \frac{۱}{۲}$ و عرض از مبدأ آن ۱ است.

$$y = \frac{۱}{۲}x + ۱ \xrightarrow{x=-۱} y = -\frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۱}{۲} = g(۰)$$



پس: $h(۰) = f(۰) + g(۰) = ۱ + \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲}$

۱۹ ۴ **۳** ۲ ۱ چون تابع f، وارون خود را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کرده است، پس نقطهٔ $A(۳,۳)$ روی f و $f^{-۱}$ قرار دارد.

$$\begin{matrix} (۱,۲) \in f \\ (۳,۳) \in f^{-۱} \end{matrix} \rightarrow (۲,۱) \in f^{-۱}$$

از طرفی چون f تابعی خطی است وارون آن هم تابعی خطی خواهد بود.

$$f^{-۱}(x) = ax + b$$

$$\begin{matrix} f^{-۱}(۲) = ۱ \rightarrow \\ f^{-۱}(۳) = ۳ \rightarrow \end{matrix} \quad - \begin{cases} ۲a + b = ۱ \\ ۳a + b = ۳ \end{cases}$$

$$-a = -۲ \rightarrow \boxed{a = ۲} \rightarrow ۲(۲) + b = ۱ \rightarrow \boxed{b = -۳}$$

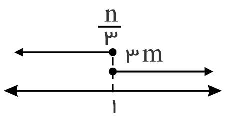
$$\boxed{f^{-۱}(x) = ۲x - ۳} \xrightarrow[y=۰]{\text{برخورد با محور } x\text{ها}} ۲x - ۳ = ۰ \rightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

۲۰ ۴ ۳ **۲** ۱ ابتدا باید دامنهٔ $f + g$ را محاسبه کرده و برابر عدد ۱ قرار دهیم.

$$f(x) = \sqrt{n - ۳x} \rightarrow n - ۳x \geq ۰ \rightarrow x \leq \frac{n}{۳}$$

$$g(x) = \sqrt{x - ۳m} \rightarrow x - ۳m \geq ۰ \rightarrow x \geq ۳m$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{۱\} \rightarrow$$



$$\frac{n}{۳} = ۳m = ۱ \rightarrow \begin{cases} n = ۳ \\ m = \frac{۱}{۳} \end{cases}$$

حال توابع f و g را مشخص می‌نماییم.

$$f(x) + g(x) = \sqrt{۳ - ۳x} + \sqrt{x - ۳(\frac{۱}{۳})} = \sqrt{۳ - ۳x} + \sqrt{x - ۱}$$

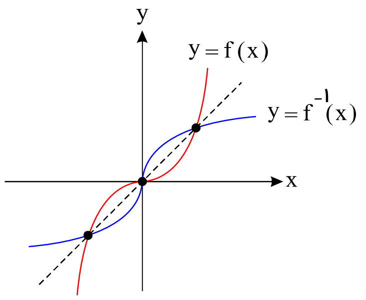
$$\xrightarrow{x=۱} f(۱) + g(۱) = ۰ + ۰ = ۰ \rightarrow a = ۰$$

پس: $am + n = ۰ \times \frac{۱}{۳} + ۳ = ۳$

۲۱ ۴ **۳** ۲ ۱ یکی از روش‌های حل این سوال رسم می‌باشد:

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^۲ & x \geq ۰ \\ -x^۲ & x < ۰ \end{cases}$$

پس از رسم نمودار را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قرینه می‌نماییم تا منحنی تابع معکوس مشخص شود:



با توجه به منحنی سه نقطهٔ برخورد وجود دارد.

۲۲ ۴ ۳ **۲** ۱ ابتدا دامنهٔ تابع‌های f و g^{-1} را جداگانه به‌دست می‌آوریم: داریم:

$$f(x)=\sqrt{۴-x}\Rightarrow ۴-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۴\Rightarrow D_f=(-\infty,۴]$$

حال از روی تابع g که زوج مرتب‌های آن داده شده، g^{-1} را تشکیل می‌دهیم (دقت می‌کنیم که تابع g یک به یک و وارون‌پذیر بوده و لذا g^{-1} قابل تعریف است.)

$$g=\{(۱,۲),(۴,۷),(۳,۵),(۰,-۴),(۲,۰)\}$$

$$\Rightarrow g^{-1}=\{(۲,۱),(۷,۴),(۵,۳),(-۴,۰),(۰,۲)\}$$

$$\Rightarrow D_{\frac{f}{g^{-1}}}=(D_f\cap D_{g^{-1}})-\left\{x|g^{-1}(x)=۰\right\}=\{۲,۰,-۴\}-\{-۴\}=\{۰,۲\}$$

۲۳ ۴ **۳** ۲ ۱ ابتدا ضابطهٔ توابع f و g را جداگانه با توجه به نمودار هر کدام به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\begin{cases}۱-x & , \quad ۰\leq x<۳\\ -۲ & , \quad x\geq ۳\end{cases}\quad , \quad g(x)=\begin{cases}۲x & , \quad -۱\leq x<۲\\ ۴ & , \quad ۲\leq x\leq ۴\end{cases}$$

حال دامنهٔ تابع $f+۲g$ را به دست می‌آوریم:

$$D_{f+۲g}=D_f\cap D_g=[۰,+\infty)\cap[-۱,۴]=[۰,۴]$$

حال ضابطهٔ $(f+۲g)(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\Rightarrow (f+۲g)(x)=\begin{cases}۱-x+۲(۲x)=۳x+۱ & , \quad ۰\leq x<۲\\ (۱-x)+۲(۴)=۹-x & , \quad ۲\leq x<۳\\ -۲+۲(۴)=۶ & , \quad ۳\leq x\leq ۴\end{cases}$$

حال اگر نمودار $f+۲g$ که ضابطهٔ آن در بالا به دست آمد را رسم کنیم، گزینهٔ «۳» جواب صحیح است

۲۴ ۴ ۳ ۲ **۱** تابع خطی f را به‌صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می گیریم و داریم:

$$(۱,۰)\in f\to f(۱)=۰\to a(۱)+b=۰\to a+b=۰$$

$$(۱,۰)\in f^{-1}\to(۰,۱)\in f\to f(۰)=۱\to a(۰)+b=۱\to b=۱$$

$$\to\begin{cases}a+b=۰\to a=-۱\\ b=۱\end{cases}\to f(x)=-x+۱\to y=-x+۱$$

$$\to x=-y+۱\to f^{-1}(x)=-x+۱\xrightarrow{x=۲}f^{-1}(۲)=-۲+۱=-۱$$

۲۵ ۴ ۳ ۲ **۱**

$$g(x)=\sqrt{۲-x^۲}\to D_g:۲-x^۲\geq ۰\to x^۲\leq ۲\to-\sqrt{۲}\leq x\leq\sqrt{۲}$$

$D_f=\mathbb{R}$ است پس $D_{f+g}=D_f\cap D_g=[-\sqrt{۲},\sqrt{۲}]$ است.

$$(f+g)(x)=\begin{cases}۱+\sqrt{۲-x^۲} & -\sqrt{۲}\leq x<۱\\ x+\sqrt{۲-x^۲} & ۱\leq x\leq\sqrt{۲}\end{cases}$$

$$(f+g)(x)=۰\to\begin{cases}\sqrt{۲-x^۲}=-۱ \quad \text{امکان ندارد.}\\ \sqrt{۲-x^۲}=-x\to ۲-x^۲=x^۲\to x^۲=۱\to\begin{cases}x=۱ & \text{(غ ق ق (در معادله صدق نمی‌کند.)}\\ x=-۱ & \text{(غ ق ق (باتوجه به بازه)}\end{cases}\end{cases}$$

پس معادلهٔ $(f+g)(x)=۰$ ریشه ندارد.

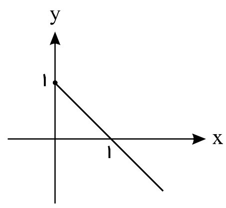
۲۶ ۴ ۳ ۲ **۱**

$$f(x)=x+\sqrt{x}\to x\geq ۰\to D_f=[۰,+\infty)$$

$$g(x)=۱+\sqrt{x}\to x\geq ۰\to D_g=[۰,+\infty)$$

$$\to D_{(g-f)}=D_g\cap D_g=[۰,+\infty)$$

$$(g-f)(x)=۱+\sqrt{x}-(x+\sqrt{x})\to(g-f)(x)=۱-x$$



$$\to R_{(g-f)}=(-\infty,۱]$$

۲۷ ۴ ۳ **۲** ۱ ابتدا محدوده‌ای را برای a محاسبه می‌کنیم که تابع در بازهٔ داده شده یک‌به‌یک نباشد سپس مجموع جواب حاصل را از $\mathbb{R}$ کم می‌کنیم. می‌دانیم اگر ریشهٔ عبارت

داخل قدرمطلق در بازهٔ $(-۲,۱)$ قرار داشته باشد تابع در آن بازه یک‌به‌یک نخواهد بود. پس:

ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق: $\frac{x}{۲}+a=۰ \Rightarrow x=-۲a \Rightarrow -۲<-۲a<۱ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}<a<۱$

بنابراین:

a محدودهٔ $=\mathbb{R}-(-\frac{۱}{۲},۱)$

۲۸ ۱

$$f^{-۱}(۱)=a \to f(a)=۱ \to \sqrt{a}+۲a+۱=۱ \to \sqrt{a}+۲a=۰$$

$$\to \sqrt{a}=-۲a \xrightarrow{\text{توان ۲}} a=۴a^{۲} \to ۴a^{۲}-a=۰ \to a(۴a-۱)=۰$$

$$\to \begin{cases} \boxed{a=۰} \to f^{-۱}(۱)=۰ \\ a=\frac{۱}{۴}\ (\text{غیر قابل قبول}) \end{cases}$$

$$f^{-۱}(۴)=b \to f(b)=۴ \to \sqrt{b}+۲b+۱=۴ \to \sqrt{b}=۳-۲b$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} b=۹-۱۲b+۴b^{۲} \to ۴b^{۲}-۱۳b+۹=۰$$

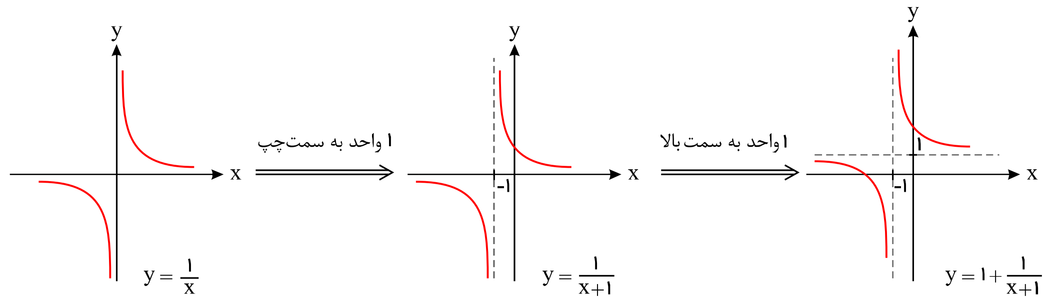
$$\xrightarrow{۴-۱۳+۹=۰} \begin{cases} \boxed{b=۱} \to f^{-۱}(۴)=۱ \\ b=\frac{۹}{۴}\ (\text{غیر قابل قبول}) \end{cases}$$

$$\to f^{-۱}(۱)+f^{-۱}(۴)=۰+۱=۱$$

۲۹ ۳

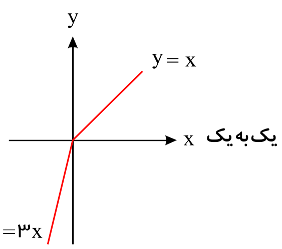
$$f(x)=\frac{x+۲}{x+۱}=\frac{x+۱}{x+۱}+\frac{۱}{x+۱} \to f(x)=\frac{۱}{x+۱}+۱$$

اکنون نمودار $f(x)=\frac{۱}{x}$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را یک واحد به سمت چپ و پس از آن یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.

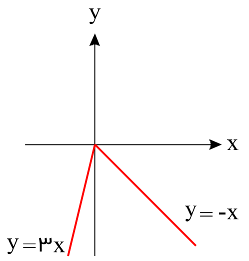


۳۰ ۲ تابعی یک‌به‌یک است که اگر هر خطی موازی طول رسم کنیم شکل را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

$$f(x)=۲x-|x|=\begin{cases} ۲x-x & ; x\geq ۰ \\ ۲x+x & ; x<۰ \end{cases} \to f(x)=\begin{cases} x & ; x\geq ۰ \\ ۳x & ; x<۰ \end{cases}$$



$$g(x)=x-|۲x|=\begin{cases}x-۲x & ;\ x\geq ۰\\ x+۲x & ;\ x<۰\end{cases}\rightarrow g(x)=\begin{cases}-x & ;\ x\geq ۰\\ ۳x & ;\ x<۰\end{cases}$$



غیر یک‌به‌یک

(۳۱) ۱ ۲ ۳ ۴ — **۱**

$$(a+۴,a)\in f^{-۱}\Rightarrow (a,a+۴)\in f\rightarrow f(a)=a+۴$$

$$\rightarrow \frac{۱-۲a}{۳a+۴}=a+۴\rightarrow (۱-۲a)=(۳a+۴)(a+۴)$$

$$\rightarrow ۱-۲a=۳a^{۲}+۱۲a+۴a+۱۶\rightarrow ۳a^{۲}+۱۸a+۱۵=۰$$

$$\rightarrow ۳(a^{۲}+۶a+۵)=۰\rightarrow (a+۵)(a+۱)=۰\rightarrow \begin{cases}a=-۵\\ a=-۱\end{cases}$$

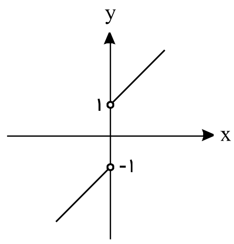
(۳۲) ۱ ۲ ۳ ۴ — **۳**

$$f(x)=x^{۲}+|x|\rightarrow D_f=\mathbb{R}\quad ,\quad ,g(x)=\frac{۱}{x}\rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$$

$$D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap(\mathbb{R}-\{۰\})=\mathbb{R}-\{۰\}$$

$$\rightarrow (f\cdot g)(x)=\frac{x^{۲}+|x|}{x}\ ,D_{f\cdot g}=\mathbb{R}-\{۰\}$$

$$\rightarrow (f\cdot g)(x)=x+\frac{|x|}{x}=\begin{cases}x+۱ & ;\ x>۰\\ x-۱ & ;\ x<۰\end{cases}$$



$\rightarrow$ برد: $R_{(f\cdot g)}=(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)$

برد تابع $(f\cdot g)(x)$ شامل ۳ عدد صحیح $\{۱,۰,-۱\}$ نمی‌باشد.

(۳۳) ۱ ۲ ۳ ۴ — **۱**

$$f(x)=\begin{cases}-۲ & ,\ ۰\leq x\leq ۲\\ ۲x-۶ & ,\ ۲<x\leq ۴\end{cases}\quad ,\quad g(x)=\begin{cases}-x+۲ & ,\ ۰\leq x\leq ۲\\ x-۲ & ,\ ۲<x\leq ۴\end{cases}$$

$$\rightarrow (f+g)(x)=\begin{cases}-x & ,\ ۰\leq x\leq ۲\\ ۳x-۸ & ,\ ۲<x\leq ۴\end{cases}$$

(۳۴) ۱ ۲ ۳ ۴ — **۱**

مطابق شکل $D_f=[۲,+\infty)$ ، $x+a\geq ۰\rightarrow x\geq -a\rightarrow D_f=[-a,+\infty)$

$$[۲,+\infty)=[-a,+\infty)\rightarrow ۲=-a\rightarrow \boxed{a=-۲}\rightarrow y=b-\sqrt{x-۲}$$

$$f(۲)=۱\rightarrow ۱=b-\sqrt{۲-۲}\rightarrow \boxed{b=۱}\rightarrow \boxed{۲a+b=-۳}$$

(۳۵) ۱ ۲ ۳ ۴ — **۲**

$$f(x)=\begin{cases}x+۲ & ,\ -۲\leq x\leq ۰\\ ۲ & ,\ ۰<x\end{cases}\quad ,\quad g(x)=-x\ ,\ x\leq ۰$$

($g(x)$ یک تابع خطی است که از مبدأ می‌گذرد و بر خط $y=x+۲$ عمود است، یعنی شیبش -۱ است.)

دامنهٔ : $D_{f+۲g} = D_f \cap D_g = [-۲,+\infty) \cap (-\infty, ۰] \to D_{f+۲g} = [-۲,۰]$

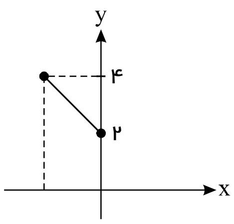
برای محاسبهٔ برد داریم:

$$(f+۲g)(x) = (x+۲) + ۲(-x) = x + ۲ - ۲x \Rightarrow (f+۲g)(x) = -x+۲$$

اکنون برد تابع را به ازای ابتدا و انتهای دامنه محاسبه می‌کنیم:

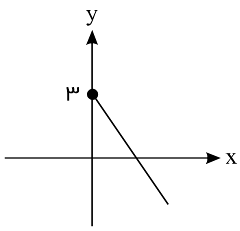
$$(f+۲g)(-۲) = ۴ \quad , \quad (f+۲g)(۰) = ۲ \to R_{f+۲g} = [۲,۴]$$

و شکل آن بدین صورت است:



۳۶ ۱ ۲ ۳ ۴

تابع f را برای $x \geq ۰$ رسم می‌کنیم، داریم:



نمودار تابع $x^۲ - ۲x + k$ سهمی رو به بالاست پس باید کم‌ترین مقدار آن بزرگ‌تر یا مساوی ۳ باشد.

$$y = x^۲ - ۲x + k = x^۲ - ۲x + ۱ + k - ۱ = (x-۱)^۲ + (k-۱)$$

کم‌ترین مقدار این تابع در نقطهٔ مرزی $x = ۰$ اتفاق می‌افتد.

$$\to (۰-۱)^۲ + k - ۱ \geq ۳ \to ۱ + k - ۱ \geq ۳ \to k \geq ۳$$

۳۷ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا ضابطهٔ f و g را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = \begin{cases} -x+۱ & , ۰ \leq x \leq ۳ \\ -۲ & , ۳ < x \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} \frac{۳}{۲}x + ۱ & , -۲ \leq x \leq ۲ \\ ۴ & , ۲ < x \leq ۴ \end{cases}$$

سپس دامنهٔ $f + ۲g$ را محاسبه می‌کنیم.

$$D_{f+۲g} = D_f \cap D_g = [۰,+\infty) \cap [-۲,۴] = [۰,۴]$$

$$\to (f+۲g)(x) = \begin{cases} -x+۱+۲(\frac{۳x}{۲}+۱) = ۲x+۳ & , ۰ \leq x \leq ۲ \\ -x+۱+۲(۴) = -x+۹ & , ۲ < x \leq ۳ \\ -۲+۲(۴) = ۶ & , ۳ < x \leq ۴ \end{cases}$$

چون ضابطه‌ها به صورت خطی هستند پس مقدار max تابع در یکی از نقاط مرزی رخ می‌دهد:

$$(f+۲g)(۰) = ۳ \, , \, (f+۲g)(۲) = ۷ \, , \, (f+۲g)(۳) = ۶ \, , \, (f+۲g)(۴) = ۶$$

$$\to y_{\max} = ۷$$

۳۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض می‌کنیم.}} x = ay + b \Rightarrow ay = x - b \Rightarrow y = \frac{x-b}{a}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x-b}{a} = \frac{۱}{a}x - \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{۱}{a}x - \frac{b}{a} = \frac{۴}{۹}ax + \frac{۴b-۷۰}{۹} \Rightarrow \frac{۱}{a} = \frac{۴}{۹}a \Rightarrow a = \pm\frac{۳}{۲}$$

$$\begin{cases} a = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۴b-۷۰}{۹} = -\frac{b}{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow -۶b = ۴b - ۷۰ \Rightarrow ۷۰ = ۱۰b \Rightarrow b = ۷ \quad \text{ق ق} \\ a = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۴b-۷۰}{۹} = -\frac{b}{-\frac{۳}{۲}} \Rightarrow ۶b = ۴b - ۷۰ \Rightarrow ۲b = -۷۰ \Rightarrow b = -۳۵ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{۲}{۳}x-\frac{۱۴}{۳}\Rightarrow f^{-1}(۶)=-\frac{۲}{۳}$$

۳۹ ۴ ۳ **۲** ۱

$$g^{-1}(۲)=۴\to g(۴)=۲\ \ ,\ \ x+۲=۴\Rightarrow x=۲$$

$$\xrightarrow{x=۲} f(۵)=۲g(۴)-۱\to f(۵)=۲(۲)-۱\to f(۵)=۳\to f^{-1}(۳)=۵$$

۴۰ ۴ ۳ **۲** ۱

$$x\in[-۱,۱]\to ۲x-۳<۰\to f(x)=-۲x+۳+۱$$

$$\to f(x)=-۲x+۴\ ,\ D_f=[-۱,۱]\ ,\ R_f=[۲,۶]$$

$$\to y=-۲x+۴\to ۲x=-y+۴\to x=-\frac{۱}{۲}y+۲\xrightarrow[\text{عوض می‌شود}]{\text{جای } y,x} f^{-1}(x)=-\frac{۱}{۲}x+۲$$

در نتیجه داریم:

دامنهٔ تابع معکوس (f^{-1}) = بُرد تابع f

$$f^{-1}(x)=-\frac{۱}{۲}x+۲\ \ ,\ \ D_{f^{-1}}=[۲,۶]$$

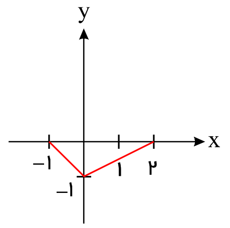
۴۱ **۴** ۳ ۲ ۱ تابع $f(x)=-x^۲-ax+۱$ یک سهمی با طول رأس سهمی $x=-\frac{a}{۲}$ است و برای این که تابع در فاصله $[-۲,۱]$ یک‌به‌یک باشد باید $-\frac{a}{۲}\notin[-۲,۱]$

پس داریم:

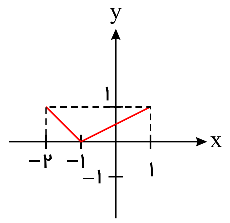
$$-۲<-\frac{a}{۲}<۱\xrightarrow{\times(-۲)}۴>a>-۲\to a\in\mathbb{R}-(-۲,۴)$$

۴۲ **۴** ۳ ۲ ۱

ابتدا نمودار $f(-x)$ را رسم می‌کنیم:



اکنون نمودار $f(-x-۱)+۱$ را با یک واحد انتقال به سمت چپ و سپس یک واحد انتقال به سمت بالا رسم می‌کنیم:



$$\Rightarrow D_{f_{(-x-۱)+۱}}=[-۲,۱]$$

دامنهٔ هر تابع کسری عبارتست از اشتراک دامنه‌های تابع صورت و تابع مخرج، منهای ریشه‌های تابع مخرج.

$$D_y=([-۲,۱]\cap[-۲,۱]-\{-۲,۱\})\to D_y=(-۲,۱)$$

۴۳ **۴** ۳ ۲ ۱ با توجه به نمودار f و g داریم:

$$(-۱,۱)\in f\ ,\ (۰,۰)\in f\Rightarrow f(x)=-x$$

$$\left.\begin{array}{l}(۲,۰)\in g\Rightarrow(۰,۲)\in g^{-1}\\(۰,-۱)\in g\Rightarrow(-۱,۰)\in g^{-1}\end{array}\right\}\Rightarrow m=\frac{۲-۰}{۰-(-۱)}=۲\to g^{-1}(x)=۲x+b$$

$$\xrightarrow{\text{نقطهٔ } (-۱,۰) \text{ در معادلهٔ } g^{-1} \text{ صدق می‌کند.}} ۰=۲(-۱)+b\to b=۲\to g^{-1}(x)=۲x+۲$$

$$\Rightarrow(f\times g^{-1})(x)=f(x)\times g^{-1}(x)=-x(۲x+۲)\Rightarrow(f\times g^{-1})(x)=-۲x^۲-۲x$$

رأس سهمی $x=-\frac{۱}{۲}$ سهمی دارای Max است و $\Rightarrow$ بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

۴۴ ۴ **۳** ۲ ۱

$$\begin{cases}(f+g)(x)=۲x-۱\\(g-f)(x)=۸x-۳\end{cases}\rightarrow \begin{cases}g(x)+\cancel{f(x)}=۲x-۱\\g(x)-\cancel{f(x)}=۸x-۳\end{cases}+$$

$$۲g(x)=۱۰x-۴\rightarrow g(x)=۵x-۲\quad (۱)$$

$$\rightarrow ۵x-۲+f(x)=۲x-۱\rightarrow f(x)=-۳x+۱\quad (۲)$$

بنابر رابطهٔ (۱) و (۲) داریم:

$$f(۱)=-۲\ ,\ \ g(۱)=۳$$

در نتیجه:

$$\rightarrow (f\cdot g)(۱)=f(۱)\cdot g(۱)=-۲\times ۳\rightarrow (f\cdot g)(۱)=-۶$$

۴۵ ۴ ۳ **۲** ۱ نقطه‌ای به طول $\frac{۳}{۴}$ روی محور x ها نقطهٔ $(\frac{۳}{۴},۰)$ است، بنابراین:

$$۰=a\times\frac{۳}{۴}+۳\Rightarrow \frac{۳}{۴}a=-۳\Rightarrow a=-۴$$

در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۴}x+\frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow f(x)=y=-۴x+۳\Rightarrow -۴x=y-۳\Rightarrow x=\frac{y-۳}{-۴}\xrightarrow{\text{عوض کردن جای } x \text{ و } y} y=\frac{x-۳}{-۴}$$

۴۶ ۱ ۲ ۳ **۴** با توجه به این‌که دامنهٔ تابع f برابر است با:

$$b-x\geq ۰\Rightarrow x\leq b$$

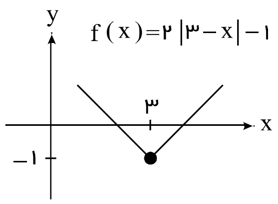
از نمودار نتیجه می‌شود $b=۳$. از طرفی چون $f(۳)=۲$ داریم:

$$f(۳)=۲\Rightarrow a-\sqrt{۳-۳}=۲\Rightarrow a=۲$$

حال در تابع $f(x)=۲-\sqrt{۳-x}$ چون $f(c)=۰$ پس:

$$۲-\sqrt{۳-x}=۰\Rightarrow ۲=\sqrt{۳-c}\Rightarrow c=-۱\Rightarrow abc=-۶$$

۴۷ ۴ ۳ ۲ **۱** با توجه به نمودار تابع $f(x)=۲|۳-x|-۱$ متوجه می‌شویم این تابع در هر بازه‌ای که $x=۳$ (ریشه داخل قدرمطلق) درون آن (به غیر از ابتدا و انتهای بازه) باشد یک‌به‌یک نیست. بنابراین گزینهٔ (۱) جواب است.



۴۸ ۴ ۳ **۲** ۱ مطابق فرض سؤال داریم:

$$\begin{cases}f=\{(-۲,۱),(-۱,۰),(۰,۲),(۱,-۲)\}\\g=\{(-۱,۲),(۰,۲),(۱,۰),(۲,-۱)\}\end{cases}$$

$f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ برابر است با:

$$\begin{cases}f^{-۱}=\{(-۲,۱),(۰,-۱),(۱,-۲),(۲,۰)\}\\g^{-۱}=\{(-۲,۰),(-۱,۲),(۰,۱),(۲,-۱)\}\end{cases}$$

در نتیجه:

$$\Rightarrow \frac{g^{-۱}}{f^{-۱}}=\{(-۲,۰),(۰,-۱)\}$$

پس:

$$\Rightarrow (\frac{g^{-۱}}{f^{-۱}})^{-۱}=\{(-۱,۰),(۰,-۲)\}$$

برد این تابع مجموعهٔ $\{-۲,۰\}$ و مجموع اعضای آن برابر -۲ است.

۴۹ ۴ ۳ **۲** ۱ ابتدا تابع f را به‌صورت یک تابع چند ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}۳x+۳ & ;\quad -۲\leq x<-۱\\ \frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۳} & ;\quad -۱\leq x<۲\end{cases}$$

حال برای وارون تابع f داریم:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۳}x-۱ \ ; & -۳\leq x<۰\\ ۳x-۱ \ ; & ۰\leq x<۱\end{cases}$$

دقت کنید که بازه‌های دامنهٔ تابع f^{-1} را از روی برد تابع f به‌دست آورده‌ایم. حال داریم:

$$D_g=D_f\cap D_{f^{-1}}=D_f\cap R_f=[-۲,۲)\cap[-۳,۱)=[-۲,۱)$$

$$g(-۱)=f(-۱)+f^{-1}(-۱)=۰+\left(-\frac{۱}{۳}-۱\right)=-\frac{۴}{۳}$$

۵۰ (۴) (۳) **(۲)** (۱) **تابع f از نقطهٔ $(۲,۰)$ می‌گذرد و نمودار f^{-1} را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع می‌کند. از طرفی نمودارهای f^{-1} و f در نقطه‌ای روی خط $y=x$ یکدیگر را قطع می‌کنند، پس داریم:**

$$\begin{cases}(۰,۲)\in f^{-1}\\ (۳,۳)\in f^{-1}\end{cases}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{۳-۲}{۳-۰}x+۲$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{۱}{۳}x+۲\Rightarrow f^{-1}(-۳)=-۱+۲=۱$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۴
۲	۳
۳	۳
۴	۱
۵	۴
۶	۳
۷	۳
۸	۲
۹	۴
۱۰	۱
۱۱	۱
۱۲	۲
۱۳	۱
۱۴	۳
۱۵	۳
۱۶	۴
۱۷	۴
۱۸	۳
۱۹	۳
۲۰	۲
۲۱	۳
۲۲	۲
۲۳	۳
۲۴	۱
۲۵	۱
۲۶	۱
۲۷	۲
۲۸	۱
۲۹	۳
۳۰	۲
۳۱	۱
۳۲	۳
۳۳	۱
۳۴	۱
۳۵	۲
۳۶	۱
۳۷	۴
۳۸	۲
۳۹	۲
۴۰	۲
۴۱	۴
۴۲	۴
۴۳	۴
۴۴	۳
۴۵	۲
۴۶	۴
۴۷	۱
۴۸	۲
۴۹	۲
۵۰	۲