نام و نام خانوادگی:

دبیر: آقای حدادی

نام آزمون: ریاضی ۲

دبیرستان: فاخران

اقای نعمتی

۱ - مجموع ریشه های حقیقی معادله‌ی $(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0$ کدام است؟

(۱) 4 (۲) -2 (۳) 2 (۴) -4

۲ - به ازای کدام مقادیر a معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2+ax+a-\frac{3}{2}=0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است؟

(۱) $a<2$ یا $a>6$ (۲) $a<3$ یا $a>4$ (۳) $2<a<6$ (۴) $3<a<4$

۳ - اگر یکی از منحنی‌های تابع درجه‌ی دوم $y=(a-1)x^2+x+3$ نسبت به خط $x=2$ متقارن باشد، این منحنی محور x ها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

(۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 6

۴ - به ازای کدام مقدار m، ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2+3x+m^2=2$ ، معکوس یک‌دیگرند؟

(۱) -2 (۲) -1 (۳) 1 (۴) 2

۵ - اگر a و b ریشه‌های معادله‌ی $x^2-10x+0/1=0$ باشند، حاصل $\log a+\log b-\log(a+b)$ کدام است؟

(۱) -2 (۲) -1 (۳) 0 (۴) 1

۶ - به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادله‌ی $mx^2-(m+3)x+5=0$ ، برابر ۶ می باشد؟

(۱) $-\frac{9}{5}$ (۲) 1 (۳) $-\frac{9}{5},1$ (۴) $-1,\frac{9}{5}$

۷ - ریشه‌های کدام معادله از دو برابر ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-5x+1=0$ یک واحد کمتر است؟

(۱) $x^2-3x-1=0$ (۲) $x^2-3x-2=0$ (۳) $2x^2-3x+1=0$ (۴) $2x^2-x-2=0$

۸ - به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(2-m)x^2+3x+m^2=0$ معکوس یکدیگرند؟

(۱) 1 (۲) $-1,2$ (۳) -2 (۴) $-2,1$

۹ - به ازای کدام مجموعه مقادیر m منحنی به معادله‌ی $y=x^2-(m-1)x+4$ در بالای محور xها است؟

(۱) $-3<m<5$ (۲) $-2<m<4$ (۳) $-3<m<4$ (۴) $-1<m<4$

۱۰ - به ازای کدام مقدار m، منحنی تابع $y=(m+2)x^2+4x+m-1$ همواره بالای محور xهاست؟

(۱) $m>2$ (۲) $m>-2$ (۳) $m<-3$ (۴) $-3<m<2$

۱۱ - به ازای کدام مقدار m، رابطه‌ی $x_1x_2+x_1+x_2=4$ بین ریشه های حقیقی معادله‌ی $mx^2+(2m-1)x=5$ برقرار است؟

(۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) هیچ مقدار m

۱۲ - اگر ریشه‌های معادله‌ی $x^2-7x+c=0$ از دو برابر ریشه‌های معادله‌ی $2x^2+bx+2=0$ ، به اندازه‌ی یک واحد بیشتر باشند، $b-c$ کدام است؟

(۱) -5 (۲) 15 (۳) -15 (۴) 5

۱۳ - بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم با ضابطه‌ی $f(x)=ax^2+4x+5$ برابر ۹ است. معادله‌ی محور تقارن این تابع کدام است؟

(۱) $x=-1$ (۲) $x=2$ (۳) $x=3$ (۴) $x=4$

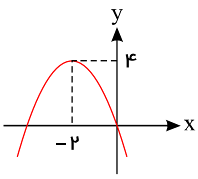
۱۴ - به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر k، خط $y=-2$ در بالاترین نقطه‌ی سهمی $f(x)=kx^2+2\sqrt{2}x+k-1$ بر سهمی مماس است؟

(۱) $\{-1\}$ (۲) $\{-2\}$ (۳) $\{-2,1\}$ (۴) $\varnothing$

۱۵- اگر α , β ریشه‌های معادله‌ی $x^2+kx+1=0$ باشند، به ازای کدام مقدار k، ریشه‌های معادله‌ی $x^2-4x+1=0$ به صورت $(\sqrt{\alpha}\ ,\ \sqrt{\beta})$ است؟

① -12 ② -14 ③ -10 ④ -8

۱۶- با توجه به نمودار تابع $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$، مقدار a کدام است؟



① 1 ② -1 ③ -2 ④ 2

۱۷- به ازای کدام مقدار m، در معادله‌ی $x^2+8mx+4m+8=0$، یکی از جواب‌ها، ۳ برابر جواب دیگر است؟

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{3}{2}$ ④ $-\frac{2}{3}$

۱۸- اگر بیشترین مقدار تابع $f(x)=(k+3)x^2-4x+k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟

① -4 ② -1 ③ 1 ④ 4

۱۹- مجموع جواب‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2+3x+1)^2+x^2+3x=1$ کدام است؟

① -3 ② -6 ③ 6 ④ صفر

۲۰- ریشه‌های معادله‌ی $3x^2+ax+b=0$ از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2-4x-1=0$ یک واحد بیشتر است. b کدام است؟

① -5 ② 2 ③ 4 ④ 6

۲۱- به ازای چه حدودی از a تابع درجه‌ی دوم $f(x)=(a-1)x^2-2\sqrt{3}x+(a+1)$، از ناحیه‌ی سوم و چهارم نمی گذرد؟

① $a\ge 2$ ② $1\le a\le 2$ ③ R ④ $a>1$

۲۲- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2-5x+2=0$ باشند، حاصل $A=(\alpha+\frac{2}{\beta})^2+(\beta+\frac{2}{\alpha})^2$ کدام است؟

① 20 ② 32 ③ 40 ④ 84

۲۳- به هر یک از جواب‌های معادله $x^2+2x-5=0$ دو واحد اضافه می‌کنیم. به حاصل‌ضرب آنها چند واحد اضافه می‌شود؟

① 4 ② 2 ③ 8 ④ مقداری اضافه نمی‌شود.

۲۴- اگر مجموع مربعات جواب‌های معادله‌ی $x^3+m(x^2+1)+2x=m$ برابر ۱۲ باشد، m کدام است؟

① ± 2 ② $\pm\sqrt{5}$ ③ ± 4 ④ $\pm\sqrt{3}$

۲۵- به ازای چه مقادیری از m معادله‌ی $(m-2)x^2-2x+(m-3)=0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی، یکی مثبت و دیگری منفی است؟

① $m<1$ ② $m>1$ ③ $2<m<5$ ④ $2<m<3$

۲۶- اگر محل تلاقی نمودار یک سهمی با محور xها، نقاطی به طول‌های ۱ و ۲ باشد و سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۴ قطع کند، طول رأس سهمی کدام است؟

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2

۲۷- حاصل‌ضرب جواب‌های حقیقی معادلهٔ $(x^2+3)^2-5x^2-11=0$ کدام است؟

① 4 ② -1 ③ 1 ④ -4

۲۸- اگر نمودار تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ فقط از ناحیهٔ اول محورهای مختصات عبور نکند، علامت a، b و c چگونه‌اند؟

① $a<0$ ، $b<0$ و $c\ge 0$ ② $a<0$ ، $b\ge 0$ و $c<0$ ③ $a>0$ ، $b\le 0$ و $c>0$ ④ $a<0$ ، $b<0$ و $c\le 0$

۲۹- اگر کمترین (بیشترین) مقدار سهمی $y=(2a-1)x^2-8x+6$ روی محور x ها واقع باشد، معادلهٔ محور تقارن سهمی کدام است؟

① $x=\frac{3}{4}$ ② $x=\frac{3}{2}$ ③ $x=\frac{8}{3}$ ④ $x=\frac{11}{6}$

۳۰- معادلهٔ $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-20=0$ چند جواب حقیقی دارد؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۳۱- به ازای کدام مقادیر m، ازمعادله‌ی $mx-3\sqrt{x}+m-2=0$ فقط یک جواب برای x حاصل می شود؟

① $-\frac{3}{2}<m<2$ ② $0<m<2$ ③ $\frac{3}{2}<m<\frac{5}{2}$ ④ $2<m<\frac{3}{2}$

۳۲- اگر قدر مطلق تفاضل ریشه‌های تابع $f(x)=-x^2+x-m$ برابر ۳ باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

① بیش‌ترین مقدار تابع $\frac{9}{4}$ است. ② کم‌ترین مقدار تابع $\frac{9}{4}$ است. ③ بیش‌ترین مقدار تابع $\frac{9}{2}$ است. ④ کم‌ترین مقدار تابع $\frac{9}{2}$ است.

۳۳- اگر α , β جواب های معادله‌ی $x^2-3x-1=0$ بوده و داشته باشیم ، $P=\alpha\beta$ و $S=\alpha+\beta$ به ازای کدام مقدار k جواب های معادله‌ی $25x^2-5kx-1=0$ برابر $\frac{\beta}{3S+4P}$, $\frac{\alpha}{2S+P}$ است؟

① -۱ ② ۳ ③ -۳ ④ ۱

۳۴- اگر مساحت مثلثی که راس‌های آن نقاط برخورد منحنی به معادله‌ی $y=x^2-kx+1$ با محورهای مختصات است، برابر یک واحد مربع باشد، k کدام است؟

① ± 2 ② ± 4 ③ $\pm 2\sqrt{2}$ ④ $\pm\sqrt{2}$

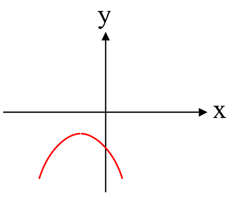
۳۵- به ازای کدام مقادیر a، معادله‌ی $x^3+(a-1)x^2+(4-a)x=4$ دارای سه ریشه‌ی حقیقی متمایز <u>مثبت</u> است؟

① $a<-4$ ② $a>-4$ ③ $a<4$ ④ $a>4$

۳۶- اگر ریشه‌های معادله‌ی $9x^2+ax+b=0$، از مربع معکوس ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-3x-9=0$، دو واحد کم‌تر باشد، a کدام است؟

① ۲۰ ② ۳۱ ③ ۴۲ ④ ۱۷

۳۷- به ازای چه حدودی از m، نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=mx^2+4\sqrt{2}\,x+m-2$ به صورت مقابل است؟



① $(-\infty,-2)$ ② $(-\infty,-1)$ ③ $(4,+\infty)$ ④ $\varnothing$

۳۸- اگر نمودار سهمی $f(x)=ax^2+4x+a-3$، محور xها را در دو نقطه‌ی متمایز با طول مثبت قطع کند، راس سهمی به ازای کدام مقادیر a، زیر محور xها قرار دارد؟

① $(-1,0)$ ② $\varnothing$ ③ $(-\infty,0)$ ④ $(-\frac{1}{2},0)$

۳۹- اگر مجموع مجذورات سه ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی $(x-2)(x^2+mx+m+3)=0$ برابر ۱۳ باشد، مجموعه‌ی مقادیر m چند عضو دارد؟

① صفر ② یک ③ دو ④ سه

۴۰- اگر α,β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $2x^2+(c+2)x+8=0$ باشد، آنگاه ریشه‌های معادلهٔ $x^2+bx+c=0$ به صورت $\sqrt{\alpha\beta}$ و $2\sqrt{\alpha\beta}$ خواهد بود. حاصل $\alpha+\beta$ کدام است؟

① -5 ② ۵ ③ ۴ ④ -4

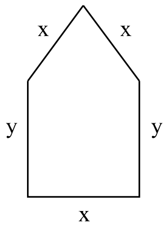
۴۱- اگر α,β ریشه‌های معادلهٔ $-3x^2-4x+6=0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله به صورت $\{3\alpha-1,3\beta-1\}$ است؟

① $x^2-2x-4=0$ ② $x^2-6x-13=0$ ③ $x^2+6x-13=0$ ④ $x^2+2x-4=0$

۴۲ - سهمی به معادلهٔ $f(x) = -mx^۲ + ۲x + m - ۱$ فقط از ناحیهٔ اول و مبدأ نمی‌گذرد، حدود m کدام است؟

① $m > ۰$ ② $m < ۰$ ③ $۰ < m < ۱$ ④ هیچ مقداری برای m یافت نمی‌شود.

۴۳ - می‌خواهیم پنجره‌ای به شکل مستطیل با یک مثلث متساوی‌الاضلاع در بالای آن بسازیم. اگر محیط پنجره ۶ متر باشد، ابعاد مستطیل چند متر باشد تا پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد؟ ($\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ را ۰٫۵ فرض کنید)



① $\frac{۳}{۴}, \frac{۳}{۵}$ ② $\frac{۳}{۲}, \frac{۳}{۴}$ ③ $\frac{۳}{۲}, \frac{۲}{۵}$ ④ $\frac{۱}{۵}, \frac{۳}{۴}$

۴۴ - کدام معادله، تعداد جواب‌های کمتری نسبت به معادلهٔ بقیهٔ گزینه‌ها دارد؟

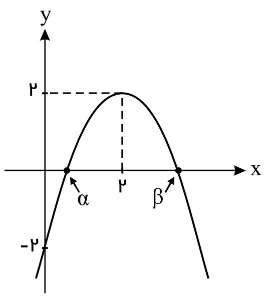
① $x^۴ - ۷x^۲ + ۱۲ = ۰$ ② $x^۴ + ۸x^۲ + ۷ = ۰$

③ $(x^۲ + x)^۲ - ۱۴(x^۲ + x) + ۲۴ = ۰$ ④ $۴x^۶ + ۱ = ۵x^۳$

۴۵ - یکی از ریشه‌های معادلهٔ $a(x-۲)^۲ = x$ از ۱۰ برابر ریشهٔ دیگر سه واحد کمتر است. مقدار مثبت a کدام است؟

① $\frac{۹}{۵}$ ② $\frac{۴}{۵}$ ③ $\frac{۵}{۹}$ ④ $\frac{۴}{۵}$

۴۶ - با توجه به نمودار سهمی $f(x) = ax^۲ + bx + c$، حاصل عبارت $\alpha\beta^۳ + ۲\alpha^۲$ کدام است؟



① ۲۴
② ۴۲
③ ۱۲
④ ۴۰

۴۷ - رأس سهمی $y = -x^۲ + ۴x - ۳$ و نقطه‌های برخورد این سهمی با محور xها به ترتیب سه رأس A، B و C از مثلث ABC را تشکیل می‌دهند، طول میانهٔ CM کدام است؟ (نقطهٔ B نسبت به نقطهٔ C، به مبدأ نزدیک‌تر است.)

① $\sqrt{۱۰}$ ② $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$ ③ $۲\sqrt{۱۰}$ ④ $\frac{\sqrt{۱۰}}{۴}$

۴۸ - اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۲x - ۶ = ۰$ باشند، آن‌گاه حاصل عبارت $(\alpha^۲ - ۶)^۳ + ۸\beta^۳$ کدام است؟

① ۸۸ ② ۲۶۴ ③ ۴۴ ④ ۳۵۲

۴۹ - معادلهٔ $mx^۲ + (m-۴)x - \frac{۴}{m} = ۰$ با ریشه‌های α و β مفروض است. اگر $\alpha^۲ + \beta^۲$ برابر ۱ باشد، آن‌گاه حاصل $۳\alpha^۲ - ۲\alpha - \beta$ کدام است؟

① ۵ ② ۱ ③ -۵ ④ -۳

۵۰ - مجموع مربعات ریشه‌های معادلهٔ $(x-۱)^۴ + ۲x = x^۲ + ۷$ کدام است؟

① ۶ ② ۸ ③ ۱۰ ④ ۱۲

ریاضی 2

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۲

$$(x^۲+x)^۲-۱۸(x^۲+x)+۷۲=۰ \xrightarrow{x^۲+x=A} A^۲-۱۸A+۷۲=۰ \Rightarrow (A-۱۲)(A-۶)=۰$$

$$\left.\begin{array}{l} A=۱۲ \Rightarrow x^۲+x-۱۲=۰ \xrightarrow{\Delta>۰} \alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=-۱ \\ A=۶ \Rightarrow x^۲+x-۶=۰ \xrightarrow{\Delta>۰} \alpha'+\beta'=-\dfrac{b}{a}=-۱ \end{array}\right. \Rightarrow \alpha+\beta+\alpha'+\beta'=-۲$$

۲ ـ گزینه ۱

اگر بخواهیم دو ریشه ی متمایز داشته باشیم Δ باید بزرگتر از صفر باشد پس داریم:

$$۲x^۲+ax+a-\frac{۳}{۲}=۰$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=a^۲-۸a+۱۲>۰ \Rightarrow (a-۲)(a-۶)>۰$$

$\rightarrow$

a	$-\infty$		۲		۶		$+\infty$
عبارت>0		+	۰	−	۰	+	

$$\Rightarrow \begin{cases} a>۶ \\ a<۲ \end{cases}$$

۳ ـ گزینه ۴

خط $x=۲$ محور تقارن تابع درجه‌ی دوم داده شده است.

$$x=\frac{-b}{۲a} \Rightarrow x=۲=-\frac{۱}{۲a-۲} \Rightarrow ۴a-۴=-۱ \Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

$$y=-\frac{۱}{۴}x^۲+x+۳ \xrightarrow[y=۰]{\times(-۴)} y=۰x^۲-۴x-۱۲=۰ \Rightarrow (x-۶)(x+۲)=۰ \begin{cases} x=-۲ \\ x=۶ \end{cases}$$

چون طول مثبت را خواسته پس $x=۶$ جواب مسأله است.

۴ ـ گزینه ۲ معادله را به صورت $mx^۲+۳x+m^۲-۲=۰$ مرتب می‌کنیم.

$$x'=\frac{۱}{x''} \Rightarrow x'x''=۱ \Rightarrow \frac{c}{a}=۱ \Rightarrow \frac{m^۲-۲}{m}=۱ \Rightarrow m^۲-۲=m \Rightarrow m^۲-m-۲=۰$$

$$\Rightarrow (m-۲)(m+۱)=۰ \Rightarrow m=۲\ ,\ m=-۱$$

$m=۲ \xrightarrow{\text{معادله}} ۲x^۲+۳x+۲=۰ \Rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=۹-۱۶=-۷<۰$ غیر قابل قبول

$m=-۱ \xrightarrow{\text{معادله}} -x^۲+۳x-۱=۰ \Rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=۹-۴=۵>۰$ قابل قبول

۵ ـ گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}\ ,\ \log_k^a-\log_k^b=\log_k^{\frac{a}{b}}\ ,\ \log_k^{a^n}=n\log_k^a}$

$$a+b=S=-\frac{b}{a}=۱۰\ ,\ ab=P=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۱۰}$$

$$\log a+\log b-\log(a+b)=\log\frac{ab}{a+b}=\log\frac{\frac{۱}{۱۰}}{۱۰}=\log\frac{۱}{۱۰۰}=\log ۱۰^{-۲}=-۲$$

۶ ـ گزینه ۱ اگر x' و x'' ریشه های معادله باشند داریم:

$$x'+x''=-\frac{b}{a}=\frac{m+۳}{m}\ ,\ x'x''=\frac{c}{a}=\frac{۵}{m}$$

فرض مسأله: $x'^۲+x''^۲=۶ \Rightarrow (x'+x'')^۲-۲x'x''=۶ \Rightarrow (\dfrac{m+۳}{m})^۲-\dfrac{۱۰}{m}-۶=۰$

$$\Rightarrow \frac{m^۲+۶m+۹}{m^۲}-\frac{۱۰}{m}-۶=۰ \xrightarrow{\times m^۲} m^۲+۶m+۹-۱۰m-۶m^۲=۰$$

$$\Rightarrow 5m^2+4m-9=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} m=1 \xrightarrow{\text{معادله}} x^2-4x+5=0 : \quad \Delta=16-20<0 \quad \text{غ ق ق} \\ m=-\dfrac{9}{5} \rightarrow \text{با توجه به گزینه ها } \Delta>0 \text{ است و نیازی به چک کردن گزینه ها نیست} \end{cases}$$

۷ - گزینه ۲ ابتدا معادله‌ی درجه‌ی دومی را می‌نویسیم که ریشه‌هایش دو برابر ریشه‌های معادله داده شده باشد و سپس معادله‌ای می‌نویسیم که ریشه‌هایش یک واحد کمتر از ریشه‌های معادله‌ی نوشته شده باشد. برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k برابر ریشه‌های معادله‌ی داده شده‌ای باشد باید b را در k و c را در k^2 ضرب کنیم و برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k واحد کمتر از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده‌ای باشد، باید x را به $x+k$ تبدیل کنیم.

$$2x^2-5x+1=0 \xrightarrow[2^2 \text{ در } c]{2 \text{ در } b} 2x^2-10x+4=0 \xrightarrow{x\to x+1} 2(x+1)^2-10(x+1)+4=0$$

$$\rightarrow 2x^2+4x+2-10x-10+4=0 \;\rightarrow\; 2x^2-6x-4=0 \;\rightarrow\; x^2-3x-2=0$$

۸ - گزینه ۱ اگر دو ریشه، معکوس یکدیگر باشند حاصل ضربشان یک است.

$$x'x''=1 \rightarrow \frac{c}{a}=1 \rightarrow \frac{m^2}{2-m}=1 \rightarrow m^2+m-2=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} m=1 \\ m=\dfrac{c}{a}=-2 \end{cases}$$

$$m=1 \xrightarrow{\text{معادله}} x^2+3x+1=0 \quad : \quad \Delta=b^2-4ac=9-4>0 \quad : \quad \text{ق ق}$$

$$m=-2 \xrightarrow{\text{معادله}} 4x^2+3x+4=0 \quad : \quad \Delta=b^2-4ac=9-64<0 \quad : \quad \text{غ ق ق}$$

۹ - گزینه ۱ شرط آنکه یک عبارت درجه‌ی دوم همواره مثبت باشد آن است که $a>0$ و $\Delta<0$ باشد.

$I:\ a>0 \rightarrow 1>0$ همواره برقرار است

$$II:\ \Delta<0 \rightarrow b^2-4ac<0 \rightarrow (m-1)^2-16<0 \rightarrow (m-1)^2<16$$

$$\rightarrow -4<m-1<4 \rightarrow -3<m<5$$

۱۰ - گزینه ۱ y همواره مثبت است و می دانیم شرط مثبت بودن یک عبارت درجه‌ی دوم آن است که $a>0\ ,\ \Delta<0$ باشد.

$$I:a>0 \rightarrow m+2>0 \rightarrow m>-2$$

$$II:\ \Delta<0 \rightarrow 16-4(m+2)(m-1)<0 \rightarrow 16-4m^2+4m-8m+8<0$$

$$\rightarrow 4m^2+4m-24>0 \rightarrow m^2+m-6>0 \rightarrow (m+3)(m-2)>0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m<-3, m>2$$

از اشتراک $I\ ,\ II$ به جواب $m>2$ می رسیم.

۱۱ - گزینه ۴ معادله‌ی درجه‌ی دوم را مرتب می کنیم: $mx^2+(2m-1)x-5=0$

$$x_1x_2+x_1+x_2=4 \rightarrow -\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=4 \rightarrow \frac{1-2m}{m}-\frac{5}{m}=4$$

$$\xrightarrow{\times m} 1-2m-5=4m \rightarrow 6m=-4 \rightarrow m=-\frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله}} -\frac{2}{3}x^2-\frac{7}{3}x-5=0 \rightarrow \Delta<0 \ : \text{غ ق ق}$$

۱۲ - گزینه ۳ ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bkx+ck^2=0$، k برابر ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ می باشند.

و ریشه‌های معادله‌ی $a(x-k)^2+b(x-k)+c=0$، k واحد بیشتر از ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ می باشند.

روش اول:

$$2x^2+bx+2=0 \xrightarrow[2^2 \text{ در } c \text{ و } 2 \text{ در } b]{\text{دو برابر}} 2x^2+2bx+8=0 \Rightarrow x^2+bx+4=0$$

$$\xrightarrow[x\to x-1]{\text{یک واحد بیشتر}} (x-1)^2+b(x-1)+4=0 \Rightarrow x^2+1-2x+bx-b+4=0$$

$$\Rightarrow x^2+(b-2)x-b+5=0 \quad \text{مقایسه با} \quad x^2-7x+c=0$$

پس: $b-2=-7 \Rightarrow b=-5\ ,\ -b+5=c \Rightarrow c=10 \rightarrow b-c=-15$

روش دوم:

اگر y، ریشه‌ی جدید و x ریشه‌ی قدیم باشد داریم:

$$y=2x+1 \Rightarrow x=\frac{y-1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله قرار می دهیم}} 2\left(\frac{(y-1)^2}{4}\right)+b\left(\frac{y-1}{2}\right)+2=0 \rightarrow \frac{y^2-2y+1}{2}+\frac{by-b}{2}+2=0$$

$$y^2-2y+1+by-b+4=0 \rightarrow y^2+(b-2)y-b+5=0$$

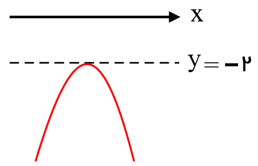
ادامه‌ی حل مسئله مشابه روش اول است.

۱۳ - گزینه ۲ می‌دانیم که بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم ($a<0$) برابر عرض رأس آن است. پس اگر رأس منحنی تابع f را S بنامیم، داریم:

$$y_s=\frac{4ac-b^2}{4a}=9 \rightarrow \frac{20a-16}{4a}=9 \rightarrow 36a=20a-16 \rightarrow 16a=-16 \rightarrow a=-1$$

پس خط به معادله‌ی $x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-(۴)}{۲(-۱)} = ۲$ محور تقارن این تابع درجه‌ی دوم است.

۱۴ - گزینه ۲ با توجه به شکل زیر بالاترین نقطه‌ی سهمی یا همان عرض ماکسیمم تابع برابر -۲ است. در نتیجه:



$$\frac{۴ac-b^۲}{۴a} = -۲ \to \frac{۴(k)(k-۱)-۸}{۴k} = -۲ \to ۴k^۲-۴k-۸ = -۸k \Rightarrow ۴k^۲+۴k-۸ = ۰$$

$$\to k^۲+k-۲=۰ \Rightarrow (k+۲)(k-۱)=۰ \Rightarrow k=۱ \ , \ k=-۲$$

اما چون تابع ماکسیمم دارد، باید ضریب $x^۲$ منفی باشد، یعنی: $k<۰$. پس تنها $k=-۲$ قابل قبول است.

۱۵ - گزینه ۲ با توجه به معادله‌ی $x^۲+kx+۱=۰$ داریم:

$$\text{حاصل‌جمع ریشه‌ها} : S = \alpha+\beta = -\frac{b}{a} = -k \qquad \text{و} \qquad \text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها} : P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = ۱$$

چون ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۴x+۱=۰$، به صورت $\{\sqrt{\alpha}\ ,\ \sqrt{\beta}\}$ است.

بنابراین:

$$S' = \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} = \frac{-b}{a} = ۴ \xrightarrow{\text{توان ۲}} \alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta} = ۱۶$$

$$\to -k+۲\sqrt{۱} = ۱۶ \Rightarrow -k = ۱۴ \Rightarrow k=-۱۴$$

۱۶ - گزینه ۲ طول رأس سهمی برابر $x_s = -۲$ است و چون تابع درجه‌ی دوم از مبدأ مختصات گذشته پس یکی از نقاط برخورد تابع با محور xها $x_۱ = ۰$ است بنابراین محل دیگر برخورد تابع با محور xها $x_۲ = -۴$ است $\left(x_S = \frac{x_۱+x_۲}{۲}\right)$

$$f(x) = a(x-x_۱)(x-x_۲) \xrightarrow[x_۲=-۴]{x_۱=۰} f(x) = a(x-۰)(x+۴) \to f(x) = ax(x+۴)$$

چون نقطه‌ی $\begin{vmatrix} -۲ \\ ۴ \end{vmatrix}$ روی سهمی قرار دارد پس مختصاتش در معادله‌ی سهمی صدق می‌کند.

$$\begin{vmatrix} -۲ \\ ۴ \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} ۴ = -۲a(-۲+۴) \to ۴ = -۴a \to a = -۱$$

۱۷ - گزینه ۴ شرط آنکه در یک معادله‌ی درجه‌ی دوم، یک ریشه‌ی معادله، k برابر ریشه‌ی دیگر باشد آن است که داشته باشیم: $\frac{b^۲}{ac} = \frac{(k+۱)^۲}{k}$

$$\frac{۶۴m^۲}{۴m+۸} = \frac{۱۶}{۳} \to \frac{۴m^۲}{۴m+۸} = \frac{۱}{۳} \to ۱۲m^۲ = ۴m+۸ \to ۱۲m^۲-۴m-۸ = ۰$$

$$\xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} m = ۱ \\ m = \frac{c}{a} = \frac{-۸}{۱۲} = \frac{-۲}{۳} \end{cases}$$

هر دو جواب بدست آمده قابل قبول هستند چون به ازای آنها $\Delta > ۰$ است.

۱۸ - گزینه ۱ بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم همان عرض رأس سهمی است.

$$y_S = ۰ \frac{۴ac-b^۲}{۴a} = ۰ \to ۴ac-b^۲ = ۰ \to ۴(k+۳)(k) - ۱۶ = ۰$$

$$\to ۴k^۲+۱۲k-۱۶ = ۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} k = ۱ \\ k = \frac{c}{a} = -۴ \end{cases}$$

تابع درجه‌ی دوم وقتی دارای Max است که ضریب $x^۲$ منفی باشد پس فقط $k=-۴$ قابل قبول است.

۱۹ - گزینه ۱

$$(x^۲+۳x+۱)^۲ + x^۲+۳x-۱ = ۰ \to (x^۲+۳x+۱)^۲ + x^۲+۳x+۱-۲ = ۰$$

$$\xrightarrow{x^۲+۳x+۱=A} A^۲+A-۲ = ۰ \to (A+۲)(A-۱) = ۰$$

$A=-۲ \to x^۲+۳x+۱=-۲ \to x^۲+۳x+۳=۰ \to \Delta = b^۲-۴ac = ۹-۱۲<۰$ ریشه‌ی حقیقی ندارد:

$A=۱ \to x^۲+۳x+۱=۱ \to x^۲+۳x=۰ \to x(x+۳)=۰ \to x=۰\ ,\ x=-۳ \to$ مجموع ریشه‌ها $=-۳$

۲۰ - گزینه ۴

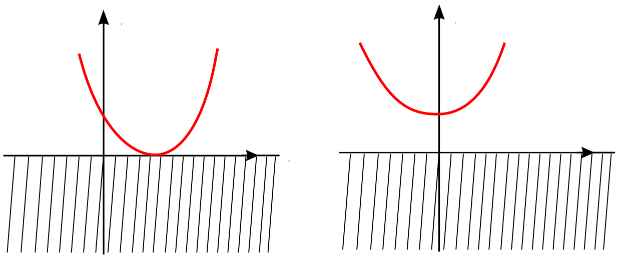
$$۳x^۲-۴x-۱ = ۰ \xrightarrow{x\to x-۱} ۳(x-۱)^۲ - ۴(x-۱) - ۱ = ۰$$

$$\to ۳(x^۲+۱-۲x) - ۴x+۴-۱ = ۰ \to ۳x^۲+۳-۶x-۴x+۴-۱ = ۰$$

$$\to ۳x^۲-۱۰x+۶ = ۰ \xrightarrow{\text{مقایسه با } ۳x^۲+ax+b=۰} a=-۱۰\ ,\ b=۶$$

دقت کنید که ریشه‌های معادله‌ی $a(x-k)^۲+b(x-k)+c=۰$، k واحد بیشتر از ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ است.

۲۱ - گزینه ۱ سهمی که از ناحیه‌های سوم و چهارم عبور نمی‌کند باید به یکی از صورت‌های زیر است.



برای اینکه یک سهمی مینیمم داشته باشد باید ضریب $x^۲$ مثبت باشد. برای اینکه سهمی بر محور xها مماس شود و یا ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد باید $\Delta \leq ۰$ باشد.

$Min \Rightarrow$ ضریب $x^۲ > ۰ \Rightarrow a-۱>۰ \rightarrow a>۱ \qquad (I)$

$\Delta \leq ۰ \rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = (-۲\sqrt{۳})^۲ - ۴(a-۱)(a+۱) \leq ۰$

$\Rightarrow ۱۲ - ۴a^۲ + ۴ \leq ۰ \Rightarrow ۴a^۲ \geq ۱۶ \Rightarrow a^۲ \geq ۴$

$\Rightarrow a \leq -۲$ یا $a \geq ۲ \qquad (II)$

از اشتراک I و II به جواب $a \geq ۲$ می‌رسیم.

۲۲ ـ گزینه ۴

می‌دانیم $P = \alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{۲}{۱} = ۲$ و $S = \alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} = ۵$ است.

$$A = (\alpha + \frac{۲}{\beta})^۲ + (\beta + \frac{۲}{\alpha})^۲ = (\frac{\alpha\beta + ۲}{\beta})^۲ + (\frac{\alpha\beta+۲}{\alpha})^۲$$

$$\Rightarrow A = (\frac{۲+۲}{\beta})^۲ + (\frac{۲+۲}{\alpha})^۲ = \frac{۱۶}{\beta^۲} + \frac{۱۶}{\alpha^۲} = \frac{۱۶(\alpha^۲+\beta^۲)}{(\alpha\beta)^۲} = \frac{۱۶((\alpha+\beta)^۲ - ۲\alpha\beta)}{(\alpha\beta)^۲} = \frac{۱۶(۲۵-۴)}{۴} = ۸۴$$

۲۳ ـ گزینه ۴

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ + ۲x - ۵ = ۰$ باشند، در این صورت:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -۲ \ , \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = -۵$$

سوال، حاصلضرب $(\alpha+۲)(\beta+۲)$ را خواسته است بنابراین:

$$(\alpha+۲)(\beta+۲) = \alpha\beta + ۲\alpha + ۲\beta + ۴ = \alpha\beta + ۲(\alpha+\beta) + ۴ = \alpha\beta - ۴ + ۴ = \alpha\beta$$

پس به حاصلضرب مقداری اضافه نمی‌شود.

۲۴ ـ گزینه ۳ ابتدا معادله‌ی داده شده را مرتب می‌کنیم.

$$x^۳ + mx^۲ + m + ۲x - m = ۰ \rightarrow x^۳ + mx^۲ + ۲x = ۰$$

$$\rightarrow x(x^۲ + mx + ۲) = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x^۲ + mx + ۲ = ۰ \end{cases}$$

چون یک ریشه‌ی معادله برابر صفر است، بنابراین مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ + mx + ۲ = ۰$ برابر ۱۲ است پس اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم فوق باشند. داریم:

$$x' + x'' = \frac{-b}{a} = -m \ , \quad x'x'' = \frac{c}{a} = ۲$$

مجموع مربعات ریشه‌ها $= ۱۲ \rightarrow x'^۲ + x''^۲ = ۱۲ \rightarrow (x' + x'')^۲ - ۲x'x'' = ۱۲$

$$\rightarrow m^۲ - ۴ = ۱۲ \rightarrow m^۲ = ۱۶ \rightarrow m = \pm ۴$$

هر دو جواب بدست آمده قابل قبول هستند زیرا دلتای معادله‌ی درجه‌ی دوم را منفی نمی‌کنند.

۲۵ ـ گزینه ۴ برای وجود دو ریشه‌ی حقیقی مختلف‌العلامت باید $\Delta > ۰$ و $P < ۰$ باشد. در مورد S نمی‌توان اظهارنظر کرد. ضمناً توجه داشته باشید که شرط $P < ۰$ شرط $\Delta > ۰$ را تأمین می‌نماید.

$$(m-۲)x^۲ - ۲x + (m-۳) = ۰$$

$$P < ۰ \rightarrow \frac{c}{a} < ۰ \rightarrow \frac{m-۳}{m-۲} < ۰$$

جواب: $۲ < m < ۳$

m		۲		۳	
m ـ ۳	−		−	۰	+
m ـ ۲	−	۰	+		+
P	+	∞	− (ج)		+

۲۶ ـ گزینه ۳ محل تلاقی سهمی با محور xها، همان صفرهای تابع درجهٔ دوم‌اند.

یعنی $x_۱ = ۱ , x_۲ = ۲$ صفرهای تابع درجه دوم‌اند، از طرفی معادلهٔ سهمی در این حالت به صورت $y = a(x-۱)(x-۲)$ در می‌آید.

نقطهٔ $(۰,۴)$ روی سهمی است.

حال عرض از مبدأ سهمی ۴ است پس داریم $f(۰) = ۴$

$$y = a(x-۱)(x-۲) \Rightarrow ۴ = a(۰-۱)(۰-۲) \Rightarrow a = ۲$$

$$\Rightarrow y = ۲(x-۱)(x-۲) = ۲x^۲ - ۶x + ۴$$

طول رأس سهمی: $x_۰ = -\dfrac{b}{۲a} = -\dfrac{(-۶)}{۲(۲)} = \dfrac{۳}{۲}$

راه حل دوم: فرم کلی تابع درجهٔ ۲ به‌صورت $f(x) = ax^۲ + bx + c$ می‌باشد. مبدأ همان $f(۰)$ است پس داریم:

$$f(۰) = ۴ \rightarrow c = ۴$$

ریشه‌های سهمی اعداد $x=1$, $x=2$ می‌باشد پس داریم:

$$f(1)=0\rightarrow a(1)^2+b(1)+4=0\rightarrow a+b=-4$$
$$f(2)=0\rightarrow a(2)^2+b(2)+4=0\rightarrow 4a+2b=-4\rightarrow 2a+b=-2$$
$$\begin{cases}2a+b=-2\\ -a-b=+4\end{cases}$$
$$a=2\rightarrow 2+b=-4\rightarrow b=-6\rightarrow f(x)=2x^2-6x+4$$

طول رأس $x_S=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-6}{2(2)}=+\dfrac{3}{2}$

روش سوم:

اگر نقطه $A\left(x_1\ ,\ 0\right)$ و $B\left(x_2\ ,\ 0\right)$ محل تلاقی نمودار سهمی با محورxها باشند، طول رأس سهمی $\left(x_s\right)$ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$x_s=\frac{x_1+x_2}{2}$$

$$\rightarrow x_s=\frac{1+2}{2}\rightarrow x_s=\frac{3}{2}$$

۲۷ – گزینه ۲ روش اول: با توجه به معادله، با یک معادلهٔ درجهٔ ۴ برخورد کرده‌ایم؛ می‌توان با یک تغییر متغیر آن را به یک معادلهٔ درجه ۲ تبدیل کرد.

$$\left(x^2+3\right)^2-5x^2-11=0\xrightarrow[x^2=t-3]{x^2+3=t}t^2-5(t-3)-11=0$$

$$t^2-5t+15-11=0\rightarrow t^2-5t+4=0\rightarrow (t-1)(t-4)=0$$

$$\begin{cases}t=1\rightarrow x^2+3=1\rightarrow x^2=-2 & \text{غیر قابل قبول}\\ t=4\rightarrow x^2+3=4\rightarrow x^2=1\rightarrow x\pm 1\rightarrow x_1\cdot x_2=-1\end{cases}$$

روش دوم:

$$\left(x^2+3\right)^2-5x^2-11=0\rightarrow x^4+6x^2+9-5x^2-11=0$$

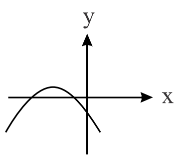
$$\rightarrow x^4+x^2-2=0\xrightarrow{x^2=t}t^2+t-2=0$$

$$\rightarrow (t-1)\,(t+2)=0\begin{cases}t=1\rightarrow x^2=1\rightarrow x_1=1\ ,\ x_2=-1\\ t=-2\rightarrow x^2=-2\rightarrow \text{جواب ندارد}\end{cases}$$

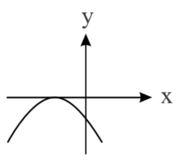
$$\rightarrow x_1\cdot x_2=-1$$

۲۸ – گزینه ۴ برای آن‌که نمودار تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ از ناحیهٔ اول عبور نکند باید دارای ماکزیمم و به صورت باشد، یعنی باید ضریب x^2 منفی باشد. $(a<0)$

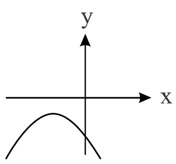
حال به بررسی حالت‌های احتمالی می‌پردازیم:



$\Delta>0$



$\Delta=0$



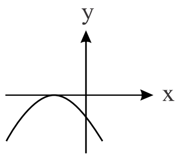
$\Delta<0$

در حالت اول که $\Delta>0$ است: (β و α ریشه‌های تابع موردنظر هستند.)

$$\alpha+\beta<0\Rightarrow\frac{-b}{a}<0\xrightarrow{a<0}b<0$$

$$\alpha\cdot\beta\geq 0\Rightarrow\frac{c}{a}\geq 0\xrightarrow{a<0}c\leq 0$$

و حالت‌های $\Delta=0$ و $\Delta<0$ قابل‌قبول نیستند، زیرا در این حالت از ناحیه دوم نیز نمودار عبور نمی‌کند. اما باید توجه داشت که اگر $a<0$ و $b=0$ و $c=0$ باشند، نمودار به صورت شکل زیر خواهد بود که قابل قبول نیست:



۲۹ – گزینه ۲ کمترین (بیشترین) مقدار سهمی روی محور x ها باشد یعنی $\Delta=0$ است و داریم:

ریاضی2

$$\Delta=(-8)^2-4(2a-1)(6)=0\to 64-24(2a-1)=0$$
$$\xrightarrow{\div 8} 8-3(2a-1)=0\to 8=3(2a-1)\to 2a-1=\frac{8}{3}$$
$$\to y=\frac{8}{3}x^2-8x+6\to \text{محور تقارن سهمی } x=\frac{-b}{2a}=-\frac{-8}{2(\frac{8}{3})}\to \boxed{x=\frac{3}{2}}$$

۳۰ - گزینه ۲

$$x^2+x+1=t\to t(t+1)-20=0\to t^2+t-20=0$$

$$(t+5)(t-4)=0\to \begin{cases} t=-5\to x^2+x+1=-5\to x^2+x+6=0\to \Delta=1-24<0\to \text{ریشهٔ حقیقی ندارد.} \\ t=4\to x^2+x+1=4\to x^2+x-3=0\to \Delta=1+12>0\to \text{۲ ریشهٔ متمایز دارد.} \end{cases}$$

۳۱ - گزینه ۲

$$mx-3\sqrt{x}+m-2=0\ \Rightarrow\ m(\sqrt{x})^2-3\sqrt{x}+m-2=0\ (I)$$
$$\xrightarrow{\sqrt{x}=t}\ mt^2-3t+m-2=0$$

اگر این معادله دارای یک ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی باشد معادله‌ی I فقط یک ریشه دارد (زیرا امکان ندارد $\sqrt{x}$ برابر یک مقدار منفی باشد) و شرط آن‌که یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی متمایز مختلف‌العلامت باشد آن است که $\frac{c}{a}<0$ باشد.

$$\frac{c}{a}<0\ \Rightarrow\ \frac{m-2}{m}<0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}0<m<2$$

دقت کنید اگر معادله‌ی $mt^2-3t+m-2=0$ دارای یک ریشه‌ی مضاعف مثبت باشد، نیز معادله‌ی I فقط یک جواب دارد.

$$\begin{cases} \Delta=0\ \Rightarrow\ b^2-4ac=0\ \Rightarrow\ 9-4m(m-2)=0\ \Rightarrow\ 4m^2-8m-9=0 \begin{cases} m=\dfrac{2+\sqrt{13}}{2} \\ m=\dfrac{2-\sqrt{13}}{2} \end{cases} \\ \underset{\text{ریشه مضاعف}}{\underset{\downarrow}{\dfrac{-b}{2a}}}>0\ \Rightarrow\ \dfrac{3}{2m}>0\ \Rightarrow\ m>0 \end{cases}$$

پس جواب می‌شود: $0<m<2\cup\left\{\frac{2+\sqrt{13}}{2}\right\}$. بنابراین گزینه‌ی دوم می‌تواند صحیح باشد.

۳۲ - گزینه ۱ اگر ریشه‌ها را x_1 و x_2 در نظر بگیریم، آنگاه:

$$\text{قدر مطلق تفاضل ریشه‌ها}=|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{1-4(-1)(-m)}}{|-1|}=3$$
$$\Rightarrow\sqrt{1-4m}=3\Rightarrow 1-4m=9\Rightarrow 4m=-8\Rightarrow m=-2$$

پس معادله‌ی تابع به صورت $f(x)=-x^2+x+2$ است.

چون ضریب x^2 ، (a) منفی است بنابراین تابع ماکسیمم دارد و بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم، همان عرض راس سهمی یعنی $\frac{4ac-b^2}{4a}$ می‌باشد.

$$\text{عرض ماکسیمم}=\frac{4(-1)(2)-1}{4(-1)}=\frac{9}{4}$$

۳۳ - گزینه ۲ برای تشکیل معادله جدید به حاصل جمع (S') و حاصل ضرب (P') نیاز داریم بنابراین :

$$S'=\frac{\alpha}{2S+P}+\frac{\beta}{3S+4P}\xrightarrow[P=\frac{c}{a}=-1]{S=-\frac{b}{a}=3}\frac{\alpha}{2(3)-1}+\frac{\beta}{3(3)+4(-1)}=\frac{\alpha}{5}+\frac{\beta}{5}=\frac{\alpha+\beta}{5}=\frac{S}{5}=\frac{3}{5}$$
$$P'=\frac{\alpha}{2S+P}\times\frac{\beta}{3S+4P}=\frac{\alpha}{5}\times\frac{\beta}{5}=\frac{\alpha\beta}{25}=\frac{P}{25}=\frac{-1}{25}$$

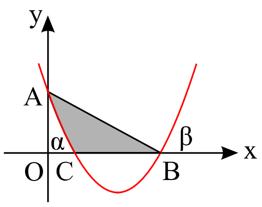
حال با داشتن (S') و (P') معادله‌ی جدید را مینویسیم:

$$x^2-S'x+P'=0\to x^2-\frac{3}{5}x-\frac{1}{25}=0\xrightarrow{\times 25}25x^2-15x-1=0$$

با مقایسه‌ی معادله‌ی حاصل با معادله‌ی $25x^2-5kx-1=0$ داریم:

$$-5k=-15\to k=3$$

۳۴ - گزینه ۳ به نمودار فرضی زیر توجه کنید: باتوجه به شکل در نقطه‌ی برخورد منحنی با محور yها، $x=0$ است.



$x=0 \xrightarrow{\text{تابع}} y_A=1$

نقاط برخورد منحنی با محور xها هم، همان ریشه‌های تابع هستند. حال برای محاسبه‌ی مساحت مثلث به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$S=\frac{(BC)(OA)}{2}\xrightarrow[BC=|\alpha-\beta|]{OA=1} S=\frac{|\alpha-\beta|(1)}{2}=\frac{|\alpha-\beta|}{2}$$

چون مساحت مثلث برابر یک است و قدر مطلق تفاضل ریشه‌ها در تابع درجه‌ی دوم برابر $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است بنابراین:

$$1=\frac{\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}{2}\Rightarrow 2|a|=\sqrt{\Delta}\Rightarrow 2=\sqrt{k^2-4}\Rightarrow 4=k^2-4\Rightarrow k=\pm 2\sqrt{2}$$

۳۵ - گزینه ۱

$$x^3+(a-1)x^2+(4-a)x-4=0$$

چون جمع ضرایب این معادله صفر است پس حتماً یک ریشه‌ی معادله $x=1$ است و معادله بر $x-1$ بخش‌پذیر است.

$$\begin{array}{l|l}
x^3+(a-1)x^2+(4-a)x-4 & x-1 \\
\underline{-x^3+x^2} & x^2+ax+4 \\
ax^2+(4-a)x-4 & \\
\underline{-ax^2+ax} & \\
4x-4 & \\
\underline{-4x+4} & \\
\text{صفر} &
\end{array}$$

بنابراین عبارت درجه‌ی سوم به صورت $(x-1)(x^2+ax+4)=0$ تجزیه می‌شود یک ریشه‌ی این معادله $x=1$ است پس معادله‌ی درجه‌ی دوم در پرانتز دوم باید دارای ۲ ریشه‌ی متمایز مثبت باشد (چون سوال گفته معادله دارای ۳ ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت باشد)

$$\Delta>0\to b^2-4ac>0\to a^2-16>0\to a^2>16\to a>4 \text{ یا } a<-4 \quad (I)$$

$$S>0\to -\frac{b}{a}>0\to -a>0\to a<0 \quad (II)$$

$$P>0\to \frac{c}{a}>0\to 4>0 \text{ همواره برقرار است} (III)$$

از اشتراک $I\,,\,II\,,\,III$ به جواب $a<-4$ می‌رسیم.

۳۶ - گزینه ۲

کافی است ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-3x-9=0$ را به دست آوریم.

$$\Delta=b^2-4ac=9-4(2)(-9)=9+72=81\to x_1,x_2=\frac{3\pm 9}{4}=3,-\frac{3}{2}$$

$$x'_1=\frac{1}{x_1^2}-2=\frac{1}{9}-2=-\frac{17}{9} \quad \text{و} \quad x'_2=\frac{1}{x_2^2}-2=\frac{1}{\frac{9}{4}}-2=\frac{4}{9}-2=-\frac{14}{9}$$

$$x^2-Sx+P=0\to x^2-(-\frac{17}{9}-\frac{14}{9})x+\underbrace{(-\frac{17}{9})(-\frac{14}{9})}_{P}=0\to x^2+\frac{31}{9}x+P=0$$

$$\xrightarrow{\times 9} 9x^2+31x+9P=0\xrightarrow{\text{مقایسه با } 9x^2+ax+b=0} a=31$$

۳۷ - گزینه ۴

$$Max\to x^2 \text{ ضریب } <0\to m<0:I$$

$$\text{تابع، محور طول را قطع نمی‌کند}\to\Delta<0\to b^2-4ac<0\to 32-4m(m-2)<0\to 32-4m^2+8m<0$$

$$\to 4m^2-8m-32>0\to m^2-2m-8>0\to(m-4)(m+2)>0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m<-2 \text{ یا } m>4:II$$

از طرفی طول رأس سهمی یعنی $\frac{-b}{2a}$ منفی می‌باشد.

$$\frac{-b}{2a}<0\to\frac{-4\sqrt{2}}{2m}<0\to m>0:III$$

که اشتراک جواب‌های I و II و III تهی می‌باشد.

۳۸ - گزینه ۲ چون نمودار سهمی، محور xها را در دو نقطه با طول‌های مثبت قطع می‌کند پس $\Delta>0$ و $\frac{-b}{a}>0$ (جمع ۲ ریشه) و $\frac{c}{a}>0$ (ضرب دو ریشه) است.

$$I)\Delta>0\to b^2-4ac>0\to 16-4a(a-3)>0\to 16-4a^2+12a>0$$

$$\to 4a^2-12a-16<0\to a^2-3a-4<0\to(a-4)(a+1)<0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1<a<4$$

$II)\dfrac{-b}{a}>0\rightarrow\dfrac{-4}{a}>0\rightarrow a<0$

$III)\dfrac{c}{a}>0\rightarrow\dfrac{a-3}{a}>0\rightarrow$

a	$-\infty$		0		3		$+\infty$
عبارت >0		$+$	ن	$-$	0	$+$	

$\rightarrow a<0$ یا $a>3$

از اشتراک این سه جواب به $-1<a<0$ می‌رسیم، چون رأس سهمی زیر محور xها قرار دارد بنابراین عرض رأس سهمی یعنی $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ باید منفی باشد.

$$\frac{4ac-b^2}{4a}<0\rightarrow\frac{\overbrace{b^2-4ac}^{+}}{4a}>0\rightarrow 4a>0\rightarrow a>0$$

و توجه کنید که $a>0$ و $-1<a<0$ اشتراکی با هم ندارند.

۳۹ ـ گزینه ۲

$$(x-2)(x^2+mx+m+3)=0\rightarrow\begin{cases}x=2\\x^2+mx+m+3=0\end{cases}$$

یک ریشه‌ی معادله $x=2$ است و اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2+mx+m+3=0$ را α و β در نظر بگیریم طبق صورت مسأله $\underbrace{\alpha^2+\beta^2+2^2}_{\text{مجموع مجذورات ریشه‌ها}}=13$ است.

$$\alpha^2+\beta^2+4=13\rightarrow\alpha^2+\beta^2=9\rightarrow(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=9\xrightarrow[\alpha\beta=\frac{c}{a}=m+3]{\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-m}$$

$$m^2-2(m+3)=9\rightarrow m^2-2m-15=0\rightarrow(m-5)(m+3)=0$$

$$\rightarrow\begin{cases}m=5\xrightarrow{\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم}}x^2+5x+8=0\rightarrow\Delta=b^2-4ac=25-32<0\rightarrow\ \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد}\\m=-3\xrightarrow{\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم}}x^2-3x=0\rightarrow x(x-3)=0\rightarrow x=0,x=3\end{cases}$$

بنابراین فقط $m=-3$ قابل قبول است.

۴۰ ـ گزینه ۱ برای حل مسئله ابتدا مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادلهٔ اول را محاسبه می‌نماییم.

$$2x^2+(c+2)x+8=0\Rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{-(c+2)}{2}\quad(I)\\P=\alpha\cdot\beta=\dfrac{c}{a}=\dfrac{8}{2}=4\end{cases}$$

حال سراغ معادلهٔ دوم برویم: $\begin{cases}x_1=\sqrt{\alpha\beta}\\x_2=2\sqrt{\alpha\beta}\end{cases}$, $x^2+bx+c=0$

$S_{\text{جدید}}=x_1+x_2=\sqrt{\alpha\beta}+2\sqrt{\alpha\beta}=3\sqrt{\alpha\beta}=3\sqrt{P}=3\sqrt{4}=6$

$P_{\text{جدید}}=x_1\cdot x_2=\sqrt{\alpha\beta}\times2\sqrt{\alpha\beta}=2\alpha\beta=2(4)=8$

حال می‌توان با فرمول زیر معادله را بازنویسی کرد: $x^2-Sx+P=0$.

$$\left.\begin{array}{l}x^2-6x+8=0\\x^2+bx+c=0\end{array}\right\}\Rightarrow c=8\xrightarrow{(I)}\alpha+\beta=\frac{-(c+2)}{2}=\frac{-10}{2}=-5$$

۴۱ ـ گزینه ۳ برای محاسبه معادلهٔ جدید ابتدا S و P معادلهٔ اولیه را محاسبه می‌کنیم.

$$-3x^2-4x+6=0\Rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{-(-4)}{-3}=-\dfrac{4}{3}\\P=\alpha\cdot\beta=\dfrac{c}{a}=\dfrac{6}{-3}=-2\end{cases}$$

حال S و P معادلهٔ مجهول را بررسی می‌نماییم.

$S_{\text{جدید}}=(3\alpha-1)+(3\beta-1)=3(\alpha+\beta)-2=3(-\dfrac{4}{3})-2=-6$

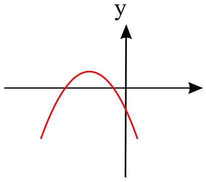
$P_{\text{جدید}}=(3\alpha-1)(3\beta-1)=9\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+1=9(-2)-3(-\dfrac{4}{3})+1=-13$

حال با رابطهٔ $x^2-Sx+P=0$ معادله را می‌نویسیم:

$$x^2-(-6)x+(-13)=0\rightarrow x^2+6x-13=0$$

۴۲ ـ گزینه ۴

روش اول: شکل تقریبی سهمی به صورت زیر است:



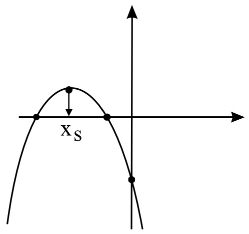
باید معادلهٔ $f(x)=0$ دو ریشهٔ منفی داشته باشد:

$\Delta > ۰ \Rightarrow ۴ - ۴(-m)(m-۱) > ۰ \Rightarrow ۴ + ۴m^۲ - ۴m > ۰ \Rightarrow \underbrace{m^۲ - m + ۱ > ۰}_{\Delta < ۰} \Rightarrow$ همواره برقرار است

$$\left.\begin{array}{l} P > ۰ \Rightarrow \frac{m-۱}{-m} > ۰ \Rightarrow ۰ < m < ۱ \\ S < ۰ \Rightarrow \frac{۲}{m} < ۰ \Rightarrow m < ۰ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \varnothing$$

روش دوم: ابتدا یک تصویر کلی از نمودار رسم می‌نماییم:

با توجه به نمودار داریم:



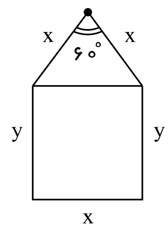
$$\begin{cases} a < ۰ \\ b < ۰ \\ c < ۰ \end{cases}$$

با توجه به معادلهٔ $y = -mx^۲ + ۲x + m + ۱$ پارامتر $b = ۲$ بوده و به هیچ وجه با شرایط $b < ۰$ سازگار نیست.

توجه: می‌توان علامت a و b و c را به صورت زیر تعیین نمود:

$$f(x) = \overset{\text{تقعر}}{\overset{\uparrow}{a}}\, x^۲ + \underset{\text{در } x=۰}{\underset{\text{شیب خط مماس}}{\underset{\downarrow}{bx}}} + \overset{\text{عرض از مبدأ}}{\overset{\uparrow}{c}}$$

۴۳ - گزینه ۲ برای حداکثر نوردهی باید مساحت $\max$ باشد. لذا ابتدا باید معادله‌ای بسازیم که بیانگر مساحت بر حسب x یا y باشد.



محیط پنجره $= ۶ \rightarrow ۳x + ۲y = ۶ \rightarrow y = -\frac{۳}{۲}x + ۳$

مساحت کل پنجره $S = S_{\text{مستطیل}} + S_{\text{مثلث}}$

$$S = x \cdot y + \frac{\sqrt{۳}x^۲}{۴}$$

$$S = x \cdot (-\frac{۳}{۲}x + ۳) + \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲ \xrightarrow{\frac{\sqrt{۳}}{۴} = ۰٫۵} S = -\frac{۳}{۲}x^۲ + ۳x + ۰٫۵x^۲$$

$$\Rightarrow S = -x^۲ + ۳x$$

با توجه به معادلهٔ مساحت که تابع درجهٔ ۲ شده است، کافیست رأس سهمی را تعیین نماییم.

رأس $x = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۳}{-۲} = \frac{۳}{۲}$

$$y = -\frac{۳}{۲}x + ۳ = -\frac{۳}{۲}(\frac{۳}{۲}) + ۳ = \frac{۳}{۴}$$

۴۴ - گزینه ۲ برای یافتن گزینه‌ی صحیح ابتدا با استفاده از تغییر متغیر هر چهار معادله را حل می‌نماییم.

گزینهٔ «۱»: با فرض $x^۲ = t$ داریم:

$$x^۴ - ۷x^۲ + ۱۲ = ۰$$

$$\Rightarrow t^۲ - ۷t + ۱۲ = ۰ \Rightarrow (t-۴)(t-۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۳ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۳} \\ t = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲ \end{cases}$$

چهار جواب دارد.

گزینهٔ «۲»: با فرض $x^۲ = t$ داریم:

$$t^۲ + ۸t + ۷ = ۰ \Rightarrow (t+۱)(t+۷) = ۰ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} t = -۷ \Rightarrow x^۲ = -۷ \\ t = -۱ \Rightarrow x^۲ = -۱ \end{array}\right\} \text{جواب ندارد.}$$

گزینهٔ «۳»: با فرض $x^۲ + x = t$ داریم:

$$t^۲ - ۱۴t + ۲۴ = ۰ \Rightarrow (t-۲)(t-۱۲) = ۰ \left\{\begin{array}{l} t = ۲ \Rightarrow x^۲ + x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \text{ یا } -۲ \\ t = ۱۲ \Rightarrow x^۲ + x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \text{ یا } -۴ \end{array}\right\} \text{۴ جواب دارد.}$$

گزینهٔ «۴»: با فرض $x^۳ = t$ داریم:

$$۴x^۶ + ۱ = ۵x^۳ \Rightarrow ۴t^۲ - ۵t + ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۱ \Rightarrow x = ۱ \\ t = \frac{۱}{۴} \Rightarrow x = \sqrt[۳]{\frac{۱}{۴}} \end{cases}$$

دو جواب دارد.

۴۵ - گزینه ۳

$$a(x^۲-۴x+۴)=x \Rightarrow ax^۲-(۴a+۱)x+۴a=۰$$
$$\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{۴a+۱}{a}\\ \alpha\beta=۴\end{cases}$$
$$\alpha=۱۰\beta-۳ \xrightarrow{\times\alpha} \alpha^۲=۱۰\alpha\beta-۳\alpha \xrightarrow{\alpha\beta=۴} \alpha^۲=۴۰-۳\alpha$$
$$\Rightarrow \alpha^۲+۳\alpha-۴۰=۰ \Rightarrow (\alpha+۸)(\alpha-۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases}\alpha=-۸\\ \alpha=۵\end{cases}$$
$$\left.\begin{array}{l}\alpha=-۸ \Rightarrow a(-۸-۲)^۲=-۸ \Rightarrow ۱۰۰a=-۸ \Rightarrow a=-\frac{۲}{۲۵}\\ \alpha=۵ \Rightarrow a(۵-۲)^۲=۵ \Rightarrow ۹a=۵ \Rightarrow a=\frac{۵}{۹}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{مقدار مثبت } a} a=\frac{۵}{۹}$$

۴۶ - گزینه ۱

$$f(x)=ax^۲+bx+c$$
$$f(۰)=-۲ \rightarrow a(۰)^۲+b(۰)+c=-۲ \rightarrow \boxed{c=-۲}$$
$$f(۲)=۲ \rightarrow a(۲)^۲+b(۲)+c=۲ \rightarrow ۴a+۲b=۴$$
$$\text{رأس سهمی } x_S=۲ \rightarrow -\frac{b}{۲a}=۲ \rightarrow -b=۴a$$
$$\begin{cases}۴a+۲b=۴\\ ۴a=-b\end{cases} \rightarrow -b+۲b=۴ \rightarrow \boxed{b=۴} \quad , \quad \boxed{a=-۱}$$
$$\rightarrow f(x)=-x^۲+۴x-۲=۰ \rightarrow \text{است.} \ f(x) \ \text{ریشه‌های سهمی} \ \alpha,\beta \rightarrow \begin{cases}S=\alpha+\beta=-\frac{۴}{-۱}=۴\\ P=\alpha\beta=\frac{-۲}{-۱}=۲\end{cases}$$
$$\alpha\beta^۳+۲\alpha^۲=\alpha\beta(\beta^۲)+۲\alpha^۲=۲\beta^۲+۲\alpha^۲=۲(\alpha^۲+\beta^۲)$$
$$=۲(S^۲-۲P)=۲(۴^۲-۲(۲))=۲(۱۶-۴)=۲۴$$

۴۷ - گزینه ۲

$$y=-x^۲+۴x-۳ \rightarrow x_S=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۴}{۲(-۱)}=۲ \ , \ y_S=-(۲)^۲+۴(۲)-۳ \rightarrow y_S=۱$$
$$\rightarrow \boxed{A(۲,۱)} \quad , \quad -x^۲+۴x-۳=۰ \rightarrow x^۲-۴x+۳=۰$$
$$\rightarrow (x-۱)(x-۳)=۰ \rightarrow \begin{cases}x=۱ \rightarrow y=۰ \rightarrow \boxed{B(۱,۰)}\\ x=۳ \rightarrow y=۰ \rightarrow \boxed{C(۳,۰)}\end{cases}$$
$$AB \ \text{وسط} = M \rightarrow \begin{cases}x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۲+۱}{۲}=\frac{۳}{۲}\\ y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۱+۰}{۲}=\frac{۱}{۲}\end{cases} \rightarrow \boxed{M(\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲})}$$
$$CM=\sqrt{(x_C-x_M)^۲+(y_C-y_M)^۲}=\sqrt{(۳-\frac{۳}{۲})^۲+(۰-\frac{۱}{۲})^۲}$$
$$=\sqrt{\frac{۹}{۴}+\frac{۱}{۴}}=\sqrt{\frac{۱۰}{۴}} \longrightarrow CM=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

۴۸ - گزینه ۴

$$x^۲-۲x-۶=۰ \xrightarrow{x=\alpha} \alpha^۲-۲\alpha-۶=۰ \longrightarrow \alpha^۲-۶=۲\alpha$$
$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=-\frac{-۲}{۱}=۲ \quad , \quad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-۶}{۱}=-۶$$
$$(\alpha^۲-۶)^۳+۸\beta^۳=(۲\alpha)^۳+۸\beta^۳=۸\alpha^۳+۸\beta^۳=۸(\alpha^۳+\beta^۳)$$
$$=۸(S^۳-۳PS)=۸(۲^۳-۳(-۶)(۲))=۸(۸+۳۶)=۸\times ۴۴=۳۵۲$$

۴۹ - گزینه ۲

$$mx^۲+(m-۴)x-\frac{۴}{m}=۰ \rightarrow$$ فرض می‌کنیم α و β ریشه‌های این معادله هستند.
$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{۴-m}{m} \quad , \quad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-۴}{m^۲}$$
$$\alpha^۲+\beta^۲=۱ \rightarrow S^۲-۲P=۱ \rightarrow (\frac{۴-m}{m})^۲-۲(\frac{-۴}{m^۲})=۱$$

$$\rightarrow \frac{m^2-8m+16}{m^2}+\frac{8}{m^2}=1 \rightarrow m^2-8m+24=m^2 \rightarrow -8m+24=0$$

$$\rightarrow \boxed{m=3} \rightarrow 3x^2-x-\frac{4}{3}=0 \rightarrow \text{ریشه‌های معادله هستند.}\ \alpha,\beta \rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=\frac{1}{3} \\ \alpha\beta=\frac{-4}{9} \end{cases}$$

$$\text{معادله}: 3x^2-x-\frac{4}{3}=0 \xrightarrow{x=\alpha} 3\alpha^2-\alpha-\frac{4}{3}=0 \rightarrow \boxed{3\alpha^2-\alpha=\frac{4}{3}}$$

$$3\alpha^2-2\alpha-\beta=3\alpha^2-\alpha-\alpha-\beta=(3\alpha^2-\alpha)-(\alpha+\beta)=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1$$

۵۰ - گزینه ۲

$$(x-1)^4+2x=x^2+7 \rightarrow (x-1)^4=x^2-2x+1+6 \rightarrow (x-1)^4=(x-1)^2+6$$

$$(x-1)^2=A \rightarrow A^2=A+6 \rightarrow A^2-A-6=0 \rightarrow (A-3)(A+2)=0$$

$$\rightarrow \begin{cases} A=3 \rightarrow (x-1)^2=3 \rightarrow x-1=\pm\sqrt{3} \rightarrow \begin{cases} x=1+\sqrt{3} \\ x=1-\sqrt{3} \end{cases} \\ A=-2 \rightarrow (x-1)^2=-2 \rightarrow \text{ریشهٔ حقیقی ندارد.} \end{cases}$$

$$\text{مجموع مربعات ریشه‌ها}=(\sqrt{3}+1)^2+(-\sqrt{3}+1)^2=3+1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}=8$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۹ - ۱	۱۷ - ۴	۲۵ - ۴	۳۳ - ۲	۴۱ - ۳	۴۹ - ۲
۲ - ۱	۱۰ - ۱	۱۸ - ۱	۲۶ - ۳	۳۴ - ۳	۴۲ - ۴	۵۰ - ۲
۳ - ۴	۱۱ - ۴	۱۹ - ۱	۲۷ - ۲	۳۵ - ۱	۴۳ - ۲	
۴ - ۲	۱۲ - ۳	۲۰ - ۴	۲۸ - ۴	۳۶ - ۲	۴۴ - ۲	
۵ - ۱	۱۳ - ۲	۲۱ - ۱	۲۹ - ۲	۳۷ - ۴	۴۵ - ۳	
۶ - ۱	۱۴ - ۲	۲۲ - ۴	۳۰ - ۲	۳۸ - ۲	۴۶ - ۱	
۷ - ۲	۱۵ - ۲	۲۳ - ۴	۳۱ - ۲	۳۹ - ۲	۴۷ - ۲	
۸ - ۱	۱۶ - ۲	۲۴ - ۳	۳۲ - ۱	۴۰ - ۱	۴۸ - ۴	