۱- استدلال استنتاجی:
روش نتیجه‌گیری با استفاده از واقعیت‌هایی است که درستی آن‌ها اثبات شده است یا حقایقی که درستی آنها را پذیرفته‌ایم، را استدلال استنتاجی گوییم، در این صورت مطمئن هستیم که نتیجه‌گیری با استفاده از این روش همواره درست است. دقت کنیم در این روش استدلال می‌توانیم از اثبات بازگشتی، مثال نقض، برهان خلف، نیز کمک بگیریم که پیش‌تر به آن‌ها خواهیم پرداخت.

۲- نشان دهید که چرا مجموع دو عدد زوج همیشه زوج است؟

۳- با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید حاصل جمع دو عدد فرد، یک عدد زوج است.

۴- ثابت کنید اگر x و y گویا باشند $x - y$ نیز گویاست.

۵- با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید مربع یک عدد فرد، یک عدد فرد است.

۶- با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید که اگر ۷ برابر یک عدد زوج را با یک عدد فرد جمع کنیم حاصل همواره عددی فرد است.

۷- با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر از حاصلضرب دو عدد فرد، یک واحد کم کنیم عدد حاصل بر ۲ بخش پذیر است.

۸- با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، مجموع سه عدد زوج متوالی مضرب ۳ است.

۹- با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید: اگر به حاصل‌ضرب دو عدد فرد، ۱ واحد اضافه کنیم عددی زوج به‌دست می‌آید.

۱۰- با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر از مربع یک عدد فرد یک واحد کم کنیم، یک عدد زوج حاصل می‌شود.

۱۱- با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر از مکعب یک عدد فرد، یک واحد کم کنیم عددی زوج بدست می‌آید.

۱۲- ثابت کنید حاصل‌ضرب ۴ عدد طبیعی متوالی بعلاوه یک مربع کامل است.

۱۳- ثابت کنید حاصل‌ضرب K عدد متوالی مضرب $K!$ است.

۱۴- ثابت کنید مجموع مکعبات سه عدد صحیح متوالی مضرب ۹ باشد.

۱۵- ثابت کنید مربع هر عدد فرد، فرم $8t+1$ دارد.

۱۶- با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید مجموع سه عدد صحیح زوج متوالی مضربی از ۶ است.

۱۷- به روش استدلال استنتاجی نشان دهید که حاصل جمع سه برابر هر عدد زوج با یک عدد فرد همواره فرد است.

۱۸- با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، اگر به مربع یک عدد فرد ۳ واحد اضافه کنیم، عددی مضرب ۴ به‌دست می‌آید.

۱۹- با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، مجموع مربعات دو عدد فرد، یک عدد زوج است.

۲۰- با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید حاصل‌ضرب سه عدد صحیح زوج متوالی مضرب ۲۴ است.

۲۱- با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید حاصل‌ضرب دو عدد فرد، یک عدد فرد است.

۲۲- با استدلال استنتاجی ثابت کنید اگر ۳ واحد به سه برابر عددی فرد اضافه کنیم، عدد حاصل‌ضرب ۶ می‌باشد.

۲۳- با استدلال استنتاجی ثابت کنید که اگر x یک عدد صحیح و مضرب ۳ باشد، آن‌گاه $x(x+۳)$ مضرب ۱۸ است.

۲۴- با استفاده از استدلال ثابت کنید ۳ برابر مربع یک عدد فرد منهای ۳ ، مضرب ۱۲ است.

۲۵- با استدلال استنتاجی، نشان دهید حاصل‌ضرب دو عدد صحیح زوج متوالی، مضرب ۸ است.

۲۶- با استفاده از استدلال استنتاجی، ثابت کنید مجموع هر سه عدد طبیع متوالی همواره مضربی از ۳ است.

۲۷- با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید مجموع مربعات هر دو عدد فرد همواره عددی زوج است.

۲۸- اگر مجموع عده‌ی اضلاع و عده‌ی اقطار یک چندضلعی کوژ برابر ۲۱ باشد، عده‌ی اضلاع آن کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۱۰

۲۹- یک نه ضلعی محدب حداکثر چند زاویه حاده داخلی می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۰- در تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۷ باقیمانده‌ی تقسیم از مربع خارج قسمت آن ۲ واحد کمتر است، بزرگترین مقدار a مضرب کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۳۱- اگر مجموع مکعب‌های اعداد طبیعی متوالی شروع از ۱، برابر با مربع مجموع آن اعداد باشد، حاصل $۱۰^{۳}+۱۲^{۳}+۱۴^{۳}+\dots+۳۰^{۳}$ کدام است؟

۱) ۱۱۴۱۰۰ ۲) ۱۱۴۲۰۰ ۳) ۱۱۴۳۰۰ ۴) ۱۱۴۴۰۰

۳۲- می‌دانیم مجموع مکعب‌های اعداد متوالی شروع از ۱ برابر است با مربع مجموع آن اعداد. مجموع مکعب‌های اعداد فرد متوالی شروع از ۱ و ختم به ۱۹، کدام است؟

۱) ۱۸۸۰۰ ۲) ۱۹۸۰۰ ۳) ۱۹۸۰۰ ۴) ۱۹۹۰۰

۳۳- علی، احمد، روزبه، داود و حامد برحسب اندازه قد مرتب می‌شوند. می‌دانیم که حداقل دو نفر آنان از علی کوتاه‌تر هستند - داود از روزبه کوتاه‌تر است - احمد کوتاه‌ترین پسر نیست - داود از علی بلندتر است. کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) روزبه بلندتر از علی ۲) داود بلندتر از احمد
۳) احمد بلندتر از حامد ۴) احمد بلندتر از علی

۳۴- مثال نقض:
نوعی استدلال استنتاجی است که برای از بین بردن حکمی کلی استفاده می‌شود.

۳۵- مثال) اگر $x > y$ آنگاه $\text{Sin}\,x > \text{Sin}\,y$.

مثال نقض: $x = \pi\,,\ y = \frac{\pi}{۶}:\ \begin{cases} \text{Sin}\,x = ۰ \\ \text{Sin}\,x = \frac{۱}{۲} \end{cases} : \text{Sin}\,x \not> \text{Sin}\,y$

۳۶- اگر $y\,,\,x$ دو عدد گنگ باشند آنگاه $x + y^{۲}$ نیز عددی گنگ است.

مثال نقض: $\begin{cases} x = ۲ - \sqrt{۲} \\ y = \sqrt[۴]{۲} \end{cases}$

$$\Rightarrow x + y^{۲} = \left(۲ - \sqrt{۲}\right) + \left(\sqrt[۴]{۲}\right)^{۲} = \left(۲ - \sqrt{۲}\right) + \sqrt{۲} = ۲ \in Q$$

۳۷- مثال) اگر n عدد طبیعی باشد، آنگاه به‌ازای جمیع مقادیر $n \neq ۳k$ عدد $n^{۲} - ۲n + ۳۹$ عددی اول است.
مثال نقض:

$$n = ۴۱ \Rightarrow ۴۱^{۲} - ۲\times ۴۱ + ۳۹ = ۴۱ \times \underbrace{(۴۱ - ۲)}_{۳۹} + ۳۹ = ۳۹ \times ۴۲$$ عدد اول نیست.

۳۸- مثال) هر عدد فرد که فرم $۸t + ۱$ دارد و یکان آن عدد ۹ می‌باشد، مربع کامل است.
مثال نقض:

مربع کامل نیست: $n = ۸۹ \begin{cases} ۸t + ۱ \\ \text{یکان ۹} \end{cases}$

۳۹- آیا تفاضل هر دو عدد گنگ x و y ، گنگ است؟ چرا؟

۴۰- اگر α و β گنگ باشند آیا $\alpha + ۳\beta$ نیز گنگ است؟

۴۱- اگر x و y عدد گنگ باشند آیا x^y عددی گنگ است؟

۴۲- اگر a و b و c سه عدد گنک باشند، آیا $abc^۲$ یک عدد گنگ است؟ چرا؟

۴۳- کدام‌یک از عبارت زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ در صورت درست‌بودن آن را ثابت کنید و در صورت نادرست بودن یک مثال نقض پیدا کنید.

الف) مربع هر عدد حقیقی از مکعب آن کوچک‌تر است.

ب) حاصل ضرب هر دو عدد زوج، عددی زوج است.

۴۴- با ذکر دلیل بنویسید آیا $(۴ + ۳^n)$ همیشه یک عدد اول است؟

۴۵- عبارت زیر درست است یا نادرست ؟ برای عبارت نادرست مثال نقض بیاورید.

مربع هر عدد فرد به اضافه یک، عددی زوج است.

۴۶- کدام‌یک از احکام زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ برای احکام نادرست مثال نقض ارائه دهید.

الف) هر دو زاویه متقابل به راس با هم برابرند.

ب) برای هر عدد طبیعی n ، $۲^n + ۱$ عددی اول است.

۴۷- کدام عدد حکمیت «هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت» را نقض می‌کند؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۶ ۳) ۵۶ ۴) ۶۴

۴۸- کدام گزینهٔ زیر مثال نقض دارد؟

۱) هر مربع یک لوزی است.
۲) هر عدد اول و بزرگتر از ۲ فرد است.
۳) هر مثلث متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین است.
۴) توان دوم هر عدد طبیعی بزرگتر از توان سوم آن است.

۴۹- کدام عدد کلیت حکم «هر عدد طبیعی را می‌توان به‌صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت» را نقض می‌کند؟

۱) ۵۶ ۲) ۶۴ ۳) ۷۲ ۴) ۷۴

۵۰- کدام عدد کلیت حکم در رقم سمت راست هر عددی که به پنج و سه قابل قسمت باشد صفراست را نقض می‌کند؟

۱) ۱۱۵ ۲) ۱۲۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۲۵

۵۱- مثال نقض برای گزارهٔ «مربع هر عدد حقیقی از آن عدد بزرگتر است» کدام است؟

۱) $\frac{-۱}{۲}$ ۲) ۰/۹ ۳) ۱/۱ ۴) $\sqrt{۲}$

۵۲- کدام دو عدد کلیت حکم «حاصلضرب دو عدد گنگ عددی است گنگ» را نقض می‌کند؟

۱) $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ - ۲ و $\sqrt{۲}$ + ۱

۳) $\sqrt{۲}$ - ۱ و $\sqrt{۲}$ + ۱ ۴) $\sqrt{۲}$ - ۱ و $\sqrt{۲}$

۵۳- کدام عدد کلیت حکم «مربع هر عدد صحیح، مضرب ۷ به علاوه یک است» را نقض می‌کند؟

۱) ۸ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷

۵۴- بر روی دایره‌ای ۶ نقطه انتخاب می‌کنیم تمام وترهای حاصل از اتصال دو به دو نقاط سطح دایره را به چند قطعه تقسیم می‌کند؟

۱) ۲۶ ۲) ۲۸ ۳) ۳۰ ۴) ۳۲

۵۵- کدام گزینه زیر مثال نقض دارد؟

۱) هر مربع، یک لوزی است.
۲) هر عدد اول و بزرگ‌تر از ۲، فرد است.
۳) هر مثلث متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین است.
۴) توان سوم هر عدد مثبت، بزرگ‌تر از توان دوم آن است.

۵۶- کدام گزینه‌ی زیر، مثال نقض دارد؟

۱) توان دوم هر عدد بزرگ‌تر از توان سوم آن است.
۲) هر مثلث متساوی‌الاضلاع متساوی‌الساقین است.
۳) هر عدد اول و بزرگ‌تر از ۲، فرد است.
۴) هر مربع یک لوزی است.

۵۷- کدام عدد کلیت حکم «هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت» را نقض می‌کند؟

۱) ۵۶ ۲) ۶۴
۳) ۷۲ ۴) ۷۴

۵۸- کدام عدد حکمیت «هر عدد طبیعی را می‌توان به‌صورت مجموع سه مربع کامل نوشت.» را نقض می‌کند؟

۱) ۱۴ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۵۹

۵۹- کدام عدد کلیت حکم «هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع سه مربع کامل نوشت» را نقض می‌کند؟

۱) ۶۱ ۲) ۴۲ ۳) ۲۸ ۴) ۲۴

۶۰- برهان خلف:
گاهی اثبات حکمی به‌صورت مستقیم دشوار است، در این موارد از روشی به‌نام برهان خلف یا اثبات غیرمستقیم استفاده می‌کنیم، به این ترتیب که فرض می‌کنیم حکم مورد نظر درست نباشد، سپس با استفاده از استدلال استنتاجی به تناقضی می‌رسیم که یا با فرض‌های درست مسئله یا با بدیهیات ریاضی در تضاد است، سپس نتیجه می‌گیریم که حکم اولیه درست است.

۶۱- ثابت کنید $\sqrt{۵}$ عددی گنگ است.

حل: فرض خلف : $\sqrt{۵}$ گنگ نیست $\Rightarrow$ $\sqrt{۵}$ گویا $\sqrt{۵} = \frac{a}{b},\ \begin{cases} a \text{ و } b \in Z \\ \text{بزرگترین مقسوم علیه مشترک} \\ a \text{و} b \text{ عدد ۱ می باشد} \\ \text{(یعنی دیگر ساده نشوند.)} \end{cases}$

$$\sqrt{۵} = \frac{a}{b} \xrightarrow{\uparrow ۲} ۵ = \frac{a^۲}{b^۲} : a^۲ = ۵b^۲ \Rightarrow ۵|a^۲ \rightarrow ۵|a : a = ۵k$$

$$\xrightarrow{\text{جاگذاری}} ۲۵k^۲ = ۵b^۲ \Rightarrow b^۲ = ۵k^۲ \rightarrow ۵|b^۲ \Rightarrow ۵|b : b = ۵k'$$

چون $b\ ,\ a$ هر دو مضرب ۵ شدند یعنی حداقل بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک آنها، ۵ می‌باشد که تناقض با فرض اولیه مسئله دارد پس $\sqrt{۵}$ گنگ است.

۶۲- مثال) ثابت کنید $\sqrt{۲} - ۳\sqrt{۵}$ عدد گنگ است.

حل: با این فرض مسئله را حل می‌کنیم که $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۵}$ اعدادی گنگ هستند.

$$\text{فرض خلف}: \sqrt{۲} - ۳\sqrt{۵}\ \text{گنگ نیست} \Rightarrow \sqrt{۲} - ۳\sqrt{۵} = \text{گویا}: \sqrt{۲} - ۳\sqrt{۵} = \frac{a}{b}, a, b \in Z$$

$$۳\sqrt{۵} = \frac{a}{b} - \sqrt{۲} \xrightarrow{\uparrow ۲} ۴۵ = \frac{a^۲}{b^۲} + ۲ - \frac{۲a\sqrt{۲}}{b} : \frac{۲a\sqrt{۲}}{b} = \frac{a^۲}{b^۲} - ۴۳$$

$$\Rightarrow \sqrt{۲} = \frac{b}{۲a}\left(\frac{a^۲}{b^۲} - ۴۳\right) = \frac{a}{۲b} - \frac{۴۳b}{۲a} \in Q$$

چون همگی اعداد عضو Z هستند پس حاصل تساوی عددی است گویا.

$$\text{متناقض با گنگ بودن}\ \sqrt{۲} : \sqrt{۲} \in Q \Leftarrow$$

پس فرض خلف غلط است یعنی $\sqrt{۲} - ۳\sqrt{۵}$ عددی گنگ است.

۶۳- مثال) اگر d, c, b, a چهار عدد فرد باشند، ثابت کنید تساوی زیر جواب ندارد: $\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} + \frac{۱}{d} = ۱$ تساوی برقرار باشد.

حل: فرض خلف:

$$\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} + \frac{۱}{d} = ۱ \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{bcd + acd + abd + abc}{abcd} = ۱ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow bcd + acd + abd + abc = abcd$$

می‌دانیم ضرب اعداد فرد، فرد است. پس سمت راست عددی فرد است، از طرفی مجموع ۴ عدد فرد، عددی زوج است پس سمت چپ عددی زوج است. پس این تساوی هیچ‌گاه برقرار نمی‌باشد. پس تناقض. فرض خلف غلط است یعنی تساوی هیچ‌گاه برقرار نخواهد بود.

۶۴- با استفاده از روش استدلالی برهان خلف، حکم زیر را ثابت کنید:

اگر n عددی صحیح و $n^۲$ فرد باشد، نشان دهید n نیز فرد است.

۶۵- با استفاده از روش استدلالی برهان خلف، حکم زیر را ثابت کنید:
اگر n^2 مضربی از ۳ باشد، نشان دهید که n نیز مضربی از ۳ است.

۶۶- با استفاده از روش استدلالی برهان خلف، حکم زیر را ثابت کنید:
اگر n^2 مضربی از ۱۰ باشد، نشان دهید که n نیز مضربی از ۱۰ است.

۶۷- ثابت کنید $\sqrt{3}$ گنگ است.

۶۸- ثابت کنید $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$ گنگ است.

۶۹- می‌دانیم $\sqrt{3}$ عدد گنگ است. ثابت کنید عدد $\sqrt{3}+1$ گنگ است. (برهان خلف)

۷۰- ثابت کنید $\sqrt{5}$ گنگ است. (برهان خلف)

۷۱- می‌دانیم $\sqrt{2}$ گنگ است. ثابت کنید $\sqrt{\sqrt{2}+1}$ نیز گنگ است. (برهان خُلف)

۷۲- اگر n^2 زوج باشد نشان دهید n نیز زوج است. (برهان خلف)

۷۳- می‌دانیم $\sqrt{۳}$ گنگ است، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $۷\sqrt{۳}$ گنگ است.

۷۴- می‌دانیم $\sqrt{۵}$ عددی گنگ است. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید: $\sqrt{۵}+۶$ یک عدد گنگ است.

۷۵- اگر n عدد طبیعی و $n^{۲}$ مضرب ۷ باشد، آنگاه n مضرب ۷ است. (برهان خلف)

۷۶- اگر $n\in IN$ و $n^{۳}+۳$ فرد باشد، ثابت n زوج است.

۷۷- ثابت $Log_{۲}۳$ عددی گنگ است.

۷۸- با برهان خلف ثابت کنید:

$$\frac{n^{۲}}{n^{۲}+۱}<\frac{n^{۲}+۱}{n^{۲}+۲}$$

۷۹- اگر a و b اعدادی گویا باشند و c عددی اصم باشد ثابت کنید $a+bc$ اصم است.

۸۰- می‌دانیم $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۷}$ اعدادی گنگ هستند. نشان دهید عدد $\frac{۱}{\sqrt{۷}+\sqrt{۳}}$ نیز عددی گنگ است.

۸۱- می‌دانیم $\sqrt{5}$ گنگ است. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید عدد $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ نیز گنگ است.

۸۲- با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر n^2 مضربی از ۵ باشد، n نیز مضربی از ۵ است.

۸۳- با استفاده از برهان خلف ثابت کنید: اگر $x \neq 4$ و $x^3 + y^3 = 65$، آن‌گاه $y \neq 1$ است.

۸۴- می‌دانیم $\sqrt{3}$ عددی گنگ و a^2 یک عدد گویا است. ثابت کنید $a^2 + \sqrt{3}$ عدد گنگ است. (برهان خلف)

۸۵- می‌دانیم $\sqrt{2}$ عدد گنگ است. ثابت کنید عدد $x = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$ گنگ است. (برهان خلف)

۸۶- اگر n عدد طبیعی و $(3n + 2)$ عددی فرد باشد، با استدلال برهان خلف، نشان دهید که n نیز عددی فرد است.

۸۷- با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید اگر n یک عدد طبیعی و $(5n+3)$ زوج باشد آن‌گاه n یک عدد فرد است.

۸۸- با استدلال برهان خلف ثابت کنید که اگر $\sqrt{۳}$ عددی گنگ است، $\sqrt{\sqrt{۳ + ۲}}$ نیز عددی گنگ است.

۸۹- با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر x و y دو عدد حقیقی، $x \neq ۳$ و $x + ۴y^{۲} = ۷$ آن‌گاه $y \neq -۱$ است.

۹۰- با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید اگر x گویا و y گنگ باشد، آن‌گاه $(x + y)$ گنگ است.

۹۱- با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر $y \neq ۱$ و $x^{۳} + ۲y = ۱۰$ آن‌گاه $x \neq ۲$ است.

۹۲- اگر داشته باشیم $p_{۱}p_{۲} = ۲(q_{۱} + q_{۲})$ باشد ثابت کنید حداقل یکی از معادلات زیر دارای ریشه حقیقی است.

$$x^{۲} + p_{۱}x + q_{۱} = ۰ \,,\, x^{۲} + p_{۲}x + q_{۲} = ۰$$

۹۳- ده نفر در طول روز با هم شطرنج بازی می‌کنند و اگر کلاً ۲۱ بازی انجام شده باشد، ثابت کنید دست‌کم یکی از افراد ۵ بار بازی کرده است.

۹۴- با برهان خلف ثابت کنید:

$$\frac{۲}{\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}} \leq \sqrt{ab}$$

۹۵- ثابت کنید دست‌کم یکی از اعداد $a_1, a_2, \ldots, a_n$ از میانگین اعداد بزرگتر مساوی است.

۹۶- n عدد طبیعی و مجموع مقسوم‌علیه‌های مثبت آن $n+1$ می‌باشد، ثابت کنید n عددی اول است.

۹۷- اگر P یک عدد اول فرد بوده و $N = 2 \times 3 \times \cdots \times P + 1$ باشد، آنگاه:

۱) N نمی‌تواند عدد اول باشد.

۲) اگر N اول نباشد، آنگاه تمام عوامل اول آن کمتر از P هستند.

۳) N حتماً عدد اول است.

۴) اگر N اول نباشد آنگاه تمام عوامل اول آن بیشتر از P هستند.

۹۸- برای اثبات یک قضیه به روش برهان خلف ابتدا ...

۱) فرض قضیه را نادرست در نظر می‌گیریم و به تناقص می‌رسیم.

۲) عکس قضیه را ثابت می‌کنیم.

۳) حکم قضیه را نادرست در نظر گرفته و به تناقض می‌رسیم.

۴) حکم قضیه را نادرست در نظر گرفته و ثابت می‌کنیم فرض قضیه نادرست است.

۹۹- اثبات کدام قضیه‌ی زیر احتیاج به استدلال به روش برهان خلف ندارد؟

۱) عدد $\sqrt{5}$ گنگ است.

۲) از یک نقطه فقط یک خط موازی خط مفروض می‌توان رسم کرد.

۳) در یک صفحه از نقطه مفروض فقط یک خط می‌توان بر خط مفروض عمود کرد.

۴) مربع هر عدد طبیعی فرد از مضرب ۸ یک واحد بیشتر است.

۱۰۰- در روش اثبات یک حکم به برهان خلف:

۱) مفروضات را نادرست فرض می‌کنیم	۲) خلاف حکم را درست فرض می‌کنیم
۳) حکم را درست فرض می‌کنیم	۴) درستی عکس حکم را ثابت می‌کنیم

۱۰۱- در اثبات $\sqrt{۲}$ عدد گنگ است. کدام استدلال به‌کار می‌رود؟

۱) برهان خلف ۲) استنتاجی ۳) استقرای ریاضی ۴) بازگشتی

۱۰۲- به حاصل‌ضرب عوامل اول فرد کوچک‌تر از ۱۰۰، یک واحد اضافه کرده‌ایم، عدد جدید چند عامل اول کوچک‌تر از ۱۰۰ دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰۳- چند مورد از موارد زیر را می‌توان با برهان خلف ثابت نمود؟

الف- اگر $n^{۲}$ مضربی از ۳ باشد، نشان دهید که n نیز مضربی از ۳ است.

ب- از یک نقطه خارج یک خط نمی‌توان بیش از یک خط بر آن عمود کرد.

ج- ثابت کنید $\sqrt{۳}$ گنگ است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰۴- معادله‌ی $p^{۳} = ۴q^{۳}$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح چند دسته جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بیشمار

۱۰۵- می‌خواهیم با برهان خلف ثابت کنیم اگر n^{m} مضرب m باشد، آن‌گاه n مضرب m است. m کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۷

۴) ۱۰

۱۰۶- اثبات کدام قضیه‌ی زیر نیازی به استنتاج از برهان خلف ندارد؟
۱) از یک نقطه فقط یک خط به موازات خط مفروضی می‌توان رسم کرد.
۲) $\sqrt{۵}$ گنگ است.
۳) مربع اعداد زوج نمی‌تواند $۴k + ۲$ باشد.
۴) اگر در مثلث ABC، AD نیمساز باشد و $BD \neq CD$، آن‌گاه $AB \neq AC$.

۱۰۷- در اثبات این که «$\sqrt{۳}$ عددی گنگ است»، از کدام روش استفاده می‌شود؟
۱) برهان خلف ۲) رابطه لگاریتم ۳) بازگشتی ۴) استقرایی

۱۰۸- برای اثبات این‌که «$\sqrt{۳}$-$\sqrt{۲}$ عددی گنگ است.» بهتر است از کدام استدلال ریاضی استفاده کنیم؟
۱) استدلال استنتاجی ۲) مثال نقض ۳) برهان خلف ۴) اثبات بازگشتی

۱۰۹- برای اثبات کدام‌یک از احکام زیر الزاماً نباید از برهان خلف استفاده کرد؟
۱) اگر x گویا و y گنگ باشد، آن‌گاه $x + y$ گنگ است.
۲) عدد $\sqrt{۳} - \sqrt{۲}$ عددی گنگ است.
۳) اگر $۲, ۳, ۵, \ldots, p$ تمام اعداد اول کوچک‌تر یا مساوی با p باشند، عدد $N = (۲ \times ۳ \times \ldots \times p) + ۱$ یا اول است یا عامل اول بزرگ‌تر از p دارد.
۴) در یک صفحه از نقطه‌ای بیرون یک خط نمی‌توان بیش از یک خط بر آن عمود کرد.

۱۱۰- اثبات درستی کدام حکم به روش برهان خلف نمی‌باشد؟
۱) اگر $n^۲$ فرد باشد، آن‌گاه n نیز فرد است.
۲) اگر x عددی گویا و y عددی گنگ باشد، آن‌گاه $۲x - y$ عددی گنگ است.
۳) اگر $a < ۰$، آن‌گاه $a^۳ + \frac{۱}{a^۳} \leq -۲$.
۴) اگر $۲^n - ۱$ عددی اول باشد، آن‌گاه n نیز عددی اول است.

۱۱۱- در اثبات گنگ بودن $\sqrt{۲}$ با برهان خلف، به کدام تناقض می‌رسیم؟

۱) $\sqrt{۲}$ گویاست

۲) دو عدد صحیح و نسبت به هم اول، هر دو زوجند.

۳) $۲ = ۰$

۴) $a^۲ = ۲b^۲$ در Z جواب دارد.

۱۱۲- اعداد کوچک‌تر از ۳۰ را به چند دسته تقسیم کنیم تا مطمئن شویم حداقل در یکی از دسته‌ها دست‌کم ۳ عدد اول وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۱۱

۱۱۳- چندتا از عبارات زیر با روش برهان خلف اثبات می‌شوند؟

الف- $\sqrt{۳} + \sqrt{۵}$ عددی گنگ است.

ب- مربع عدد طبیعی در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده‌ی ۱ یا صفر دارد.

ج- اگر $n^۲$ مضرب ۳ باشد، آن‌گاه n مضرب ۳ است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۱۴- اثبات کدام‌یک از قضیه‌های زیر ممکن است با برهان خلف انجام نشود؟

۱) در هر مثلث زاویهٔ بزرگ‌تر رو به ضلع بزرگ‌تر است.

۲) عدد $\sqrt{۳}$ گنگ است.

۳) مجموع زوایای خارجی n ضلعی محدب ۴ قائمه است.

۴) از نقطه‌ای خارج یک خط ، بیش از یک خط عمود نمی‌توان رسم کرد.

۱۱۵- مجموع مربعات ۸ عدد طبیعی بر ۳ بخش‌پذیر است. حداقل چه تعداد از آن‌ها، مضرب ۳ می‌باشند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۶- در اثبات حکم $\sqrt{x}+\sqrt{x+۲}\leqslant ۲\sqrt{x+۱}$ به روش برهان خلف، تناقض پدید آمده کدام‌یک از نامساوی‌های زیر است؟

۱) $۰>۱$ ۲) $x>۰$ ۳) $\sqrt{x}<۰$ ۴) $x<۰$

۱۱۷- اگر p و q دو عدد صحیح باشند، تعداد جواب‌های معادله $p^۲=۲q^۲$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

۱۱۸- در اثبات اصم بودن $\sqrt[۳]{۵}$ به روش برهان خلف، اگر فرض کنیم $\sqrt[۳]{۵}=\frac{m}{n}, n\in \mathbb{N}, (m, n)=۱$ به چه تناقضی خواهیم رسید؟

۱) m و n هر دو مضرب ۱۵ هستند.
۲) m و n هر دو مضرب ۵ هستند.
۳) m و n هر دو مضرب ۳ هستند.
۴) m و n هر دو زوج هستند.

۱۱۹- کدام‌یک از موارد زیر را نمی‌توان با برهان خلف ثابت کرد؟

۱) اگر ۱۷ کبوتر را در ۵ لانه قرار دهیم، دست‌کم یک لانه وجود دارد که حداقل ۴ کبوتر داشته باشد.
۲) اگر $d_۱ \parallel d_۲$ و $d_۲ \parallel d_۳$ باشد، آن‌گاه $d_۱ \parallel d_۳$ است. ($d_۱$ و $d_۱$ و $d_۳$ سه خط در فضا ستند.)
۳) اگر $n^۲=۵K+۱$، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی n بر ۵ برابر ۴ است.
۴) $\mathrm{Log}_۴^۵$ گنگ است.

۱۲۰- اعداد کوچک‌تر از ۳۰ را به چند دسته تقسیم کنیم تا مطمئن شویم، حداقل در یکی از دسته‌ها دست کم ۳ عدد اول وجود دارد؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۱

۱۲۱- در مربعی به ضلع ۱، حداقل چند نقطه درنظر بگیریم تا مطمئن باشیم دست‌کم ۲ نقطه وجود دارد که فاصله‌ی آن‌ها از $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ بیش‌تر نیست؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۲۲- کدام‌یک از احکام زیر را نمی‌توان با برهان خلف ثابت نمود؟

۱) $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ عددی گنگ است.

۲) $\sqrt{۷}$ عددی گنگ است.

۳) اگر x و y اعداد حقیقی مثبت باشند، $\sqrt{x+y}$ گنگ است.

۴) اگر n عددی طبیعی باشد، $n^{۲}+۱$ مربع کامل نیست.

۱۲۳- اگر به حاصل‌ضرب اعداد اول کوچک‌تر از ۵۰ ، عدد ۶ را اضافه کنیم، عدد حاصل چند عامل اول کوچک‌تر از ۵۰ دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۲۴- اثبات بازگشتی:
نوعی استدلال استنتاجی است به این ترتیب که حکم مسئله را درست فرض می‌کنیم. سپس با استنتاج به عبارتی بدیهی می‌رسیم و نتیجه می‌گیریم که می‌توان از عبارت بدیهی به سمت حکم حرکت کرد، این اثبات دو حکم را معادل می‌کند یعنی از درستی حکمی، درستی دیگری را می‌توان نتیجه گرفت.

۱۲۵- ثابت کنید $a^۲ + b^۲ - ab \geqslant ۰$.

اثبات بازگشتی $a^۲ + b^۲ - ab \geqslant ۰ \Rightarrow ۲a^۲ + ۲b^۲ - ۲ab \geqslant ۰$

$\Rightarrow a^۲ + b^۲ + \left(a^۲ + b^۲ - ۲ab\right) \geqslant ۰ \Rightarrow a^۲ + b^۲ + (a - b)^۲ \geqslant ۰$: بدیهی است.

پس می‌توان از حکم به‌دست آمده به سمت حکم مسئله برویم.

۱۲۶- ثابت کنید: $\sqrt{۶} + \sqrt{۲} > ۱ + \sqrt{۸}$

اثبات بازگشتی : $\sqrt{۶} + \sqrt{۲} > ۱ + \sqrt{۸} \xrightarrow{\uparrow ۲} ۶ + ۲ + ۲\sqrt{۱۲} > ۱ + ۸ + ۲\sqrt{۸} : ۲\sqrt{۱۲} > ۱ + ۲\sqrt{۸} \xrightarrow{\uparrow ۲}$

$۴۸ > ۱ + ۳۲ + ۴\sqrt{۸} \Rightarrow ۱۵ > ۴\sqrt{۸} \xrightarrow{\uparrow ۲} ۲۲۵ > ۱۲۸$ بدیهی است.

۱۲۷- مثال) اگر b , a دو عدد حقیقی باشند به‌طوری‌که $a + b \geqslant ۰$ ثابت کنید:

اثبات بازگشتی $a^۳ + b^۳ \geqslant ab(a + b)$

حل: $a^۳ + b^۳ \geqslant ab(a + b) \Rightarrow (a + b)\left(a^۲ - ab + b^۲\right) - ab(a + b) \geqslant ۰$

$\Rightarrow (a + b)\underbrace{\left[\left(a^۲ - ab + b^۲\right) - ab\right]}_{a^۲ + b^۲ - ۲ab} \geqslant ۰ \Rightarrow (a + b)(a - b)^۲ \geqslant ۰$

بدیهی است پس می‌توانیم از عبارت بدیهی به سمت حکم اصلی برویم.

۱۲۸- مثال) اگر b , a دو عدد مثبت باشند، ثابت کنید: $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$

اثبات بازگشتی $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \frac{(a+b)^3}{8} \Rightarrow \frac{(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)}{2} \geq \frac{(a+b)^3}{8}$

$\Rightarrow a^2-ab+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{4}$

$4a^2-4ab+4b^2 \geq a^2+2ab+b^2 \Rightarrow 3a^2-6ab+b^2 \geq 0 : 3(a-b)^2 \geq 0$

بدیهی است. پس می‌توانیم از عبارت بدیهی به سمت حکم برویم.

۱۲۹- اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$x^2+y^2 \geq 2(x+y-1)$$

۱۳۰- برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y ثابت کنید:

$$xy \leq \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$$

۱۳۱- برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y ثابت کنید:

$$y^2+1 \geq 2x\,(y-x+1)$$

۱۳۲- هرگاه $x , y \in R^+$ ثابت کنید:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$$

۱۳۳- ثابت کنید برای هر عدد حقیقی مانند a داریم: $-\frac{۱}{۲} \leqslant \frac{a}{۱+a^{۲}} \leqslant \frac{۱}{۲}$

۱۳۴- اگر $۰ < x < y < ۱$ ثابت کنید:

$$\frac{y - x}{۱ - xy} < ۱$$

۱۳۵- اگر a و b و c و d اعداد حقیقی باشند ثابت کنید:

$$\left(a^{۲} + b^{۲}\right)\left(c^{۲} + d^{۲}\right) \geqslant (ac + bd)^{۲}$$

۱۳۶- اگر a و b اعدادی مثبت باشند ثابت کنید:

$$\frac{a^{۳} + b^{۳}}{۲} \geqslant \left(\frac{a + b}{۲}\right)^{۳}$$

۱۳۷- اگر a و b و c اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه باشند و c وتر باشد ثابت کنید:

$$a + b \leqslant \sqrt{۲}c$$

۱۳۸- اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید.

$$\frac{۱}{\sqrt{a}} + \frac{۱}{\sqrt{b}} \geqslant \frac{۴}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

۱۳۹- با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید که حاصل ضرب سه عدد زوج متوالی مضرب ۸ است.

۱۴۰- به روش اثبات بازگشتی ثابت کنید:

$$x^۲ + y^۲ + ۱ \geqslant xy + x + y$$

۱۴۱- برای هر دو عدد حقیقی و مثبت a و b ثابت کنید:

$$\frac{a}{b^۲} + \frac{b}{a^۲} \geqslant \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}$$

۱۴۲- برای هر سه عدد حقیقی و مثبت a و b و c، ثابت کنید:

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۳ \geqslant ۲(a + b + c)$$

۱۴۳- برای هر عدد حقیقی و مثبت a ، ثابت کنید:

$$a + \frac{۱}{a} \geqslant ۲$$

۱۴۴- ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند که $a+b>۰$، آنگاه رابطه‌ی زیر برقرار می‌باشد.

$$\frac{a^۳+b^۳}{a+b} \geqslant a\ b$$

۱۴۵- اگر a و b و c سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$a^۲+b^۲+c^۲+۳\geqslant ۲(a+b+c)$$

۱۴۶- اگر a و b اعداد حقیقی باشند به طوری که $(ab < ۰)$، ثابت کنید: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leqslant -۲$

۱۴۷- اگر a و b دو عدد حقیقی با شند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید:

$$۲a^۲+b^۲+۱ \geqslant ۲(a-ba)$$

۱۴۸- اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید:

$$x^۲+y^۲+۱ \geqslant xy+x+y$$

۱۴۹- اگر c, b, a سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید که:

$$a^۲+b^۲ \geqslant -۴(a+b+۲)$$

۱۵۰- اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید که رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{a}{b^۲}+\frac{b}{a^۲} \geq \frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$$

۱۵۱- اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی درستی رابطه زیر را ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۲}(x+y) \geqslant \sqrt{xy}$$

۱۵۲- اگر b , a دو عدد حقیقی مثبت باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید:

$$ab \leqslant \left(\frac{a+b}{۲}\right)^۲$$

۱۵۳- اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی ثابت کنید:

$$a^۲+b^۲ \geq ۲(b-۱)$$

۱۵۴- اگر b و a دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی درستی رابطه زیر را بررسی کنید:

$$a^۲ + ۱ \geqslant b\,(۲ - b)$$

۱۵۵- حکم درست را اثبات کرده و برای رد حکم نادرست مثال نقض ارائه دهید.

الف) حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربع‌های آن‌هاست.

ب) حاصل جمع دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

۱۵۶- در صورتی‌که حکم زیر قضیه‌ی کلی باشد، آن را اثبات کنید و در غیر این‌صورت برای نادرستی آن مثال نقض بیاورید:

حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی کوچکتر یا مساوی نصف مجموع مربع‌های آن‌هاست.

۱۵۷- در استدلال یک قضیه، فرض کرده‌ایم که حکم برقرار باشد و پس از یک دسته از اعمال مجاز به یک رابطهٔ بدیهی و یا فرض قضیه رسیده‌ایم برای تکمیل اثبات لازم است کدام مورد برقرار باشد؟

۱) اثبات قضیه کامل است و نیاز به فرض دیگری نیست

۲) مراحل انجام شده بازگشت‌پذیر باشد

۳) یک مثال که در شرایط قضیه صدق و از آن حکم قضیه نتیجه شود و مورد نیاز است.

۴) یک مثال نقص ارائه شود.

۱۵۸- اثبات بازگشتی زمانی معتبر است که:

۱) با استفاده از استدلال استنتاجی با تغییر دادن حکم به یک نتیجه بدیهی برسیم.

۲) از درستی حکم به درستی فرض قضیه برسیم.

۳) کلیه مراحل برای رسیدن از حکم به یک نتیجه بدیهی از لحاظ منطقی برگشت‌پذیر باشند.

۴) از نادرستی فرض قضیه نادرستی حکم قضیه را اثبات کنیم.

۱۵۹- در اثبات نامساوی $a(۴ - ۴a) \le ۱$ به کمک اثبات بازگشتی، به کدام رابطه‌ی بدیهی می‌رسیم؟

۱) $(a - ۲)^۲ \ge ۰$ ۲) $(a - ۴)^۲ \ge ۰$ ۳) $\left(a - \frac{۱}{۲}\right)^۲ \ge ۰$ ۴) $\left(a - \frac{۱}{۴}\right)^۲ \ge ۰$

۱۶۰- در اثبات نامساوی $\frac{x}{y^۲} + \frac{y}{x^۲} \ge \frac{۱}{x} + \frac{۱}{y}$ به روش اثبات بازگشتی، به کدام رابطه‌ی همواره صحیح می‌رسیم؟ $\left(x, y \in R^+\right)$

۱) $(x + y)(x - y)^۲ \ge ۰$ ۲) $(x - y)(x + y)^۲ \ge ۰$

۳) $(x - y)^۲ \ge ۰$ ۴) $(x + y)^۲ \ge ۰$

۱۶۱- در اثبات حکم $x^۲ + y^۲ + ۱ \ge xy + x + y$ برای اعداد حقیقی x و y، همواره به کدام عبارت بدیهی می‌رسیم؟

۱) $(x - y)^۲ + (x - ۱)^۲ + (y - ۱)^۲ \ge ۰$ ۲) $(x + y)^۲ + (x - ۱)^۲ + (y - ۱)^۲ \ge ۰$

۳) $(x - y)^۲ + (x + ۱)^۲ + (y + ۱)^۲ \ge ۰$ ۴) $(x + y)^۲ + (x + ۱)^۲ + (y + ۱)^۲ \ge ۰$

۱۶۲- در اثبات گزاره‌ی $\frac{a + b}{۲} \ge \sqrt{ab}$ برای هر دو عدد نامنفی a و b، کدام روش به کار می‌رود؟

۱) استقرای ریاضی ۲) برهان خلف ۳) اثبات بازگشتی ۴) استدلال تمثیلی

۱۶۳- درستی کدام‌یک از نامساوی‌های زیر را به ازای همه‌ی مقادیر $n \in N$ نمی‌توان ثابت کرد؟

۱) $\left(۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^n \ge ۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}n$ ۲) $\left(۱ + \sqrt{۳}\right)^n \ge ۱ + \sqrt{۳}n$

۳) $\left(۱ + \sqrt{۲}\right)^n \ge ۱ + \sqrt{۲}n$ ۴) $\left(۱ - ۲\sqrt{۲}\right)^n \ge ۱ - ۲\sqrt{۲}n$

۱۶۴- در اثبات حکم $\frac{y - x}{۱ - xy} < ۱$ با فرض $۰ < x < y < ۱$ با روش بازگشتی از کدام عبارت درست استفاده شده است؟

۱) $(x + y)(۱ - y) < ۰$ ۲) $(۱ - x)(y + ۱) < ۰$

۳) $(۱ + x)(y - ۱) < ۰$ ۴) $(x - ۱)(y + ۱) < ۰$

۱۶۵- هر گاه بخواهیم نامساوی $\frac{a + b}{۴a - b} \geqslant \frac{b}{۲a}$ را به ازای اعداد حقیقی و هم علامت $a , b \neq ۰$ به روش بازگشتی ثابت کنیم، رابطه‌ی بدیهی که در پایان حاصل می‌شود کدام است؟

۱) $(a + b)^۲ + a^۲ \geqslant ۰$ ۲) $(a + b)^۲ + b^۲ \geqslant ۰$

۳) $(a - b)^۲ + a^۲ \geqslant ۰$ ۴) $(a - b)^۲ + b^۲ \geqslant ۰$

۱۶۶- برای اثبات نامساوی $(x^۲ + y^۲)(a^۲ + b^۲) \geqslant (ax - by)^۲$ با کمک اثبات بازگشتی در نهایت به کدام نامساوی همواره درست می‌رسیم؟

۱) $(ax + by)^۲ \geqslant ۰$ ۲) $(ax - by)^۲ \geqslant ۰$ ۳) $(ay - bx)^۲ \geqslant ۰$ ۴) $(ay + bx)^۲ \geqslant ۰$

۱۶۷- برای اثبات درستی یک عبارت با فرض درستی آن به یک رابطه‌ی بدیهی یا دانسته شده رسیده‌ایم، در صورتی اثبات کامل است که:

۱) مثالی ارایه که در شرایط داده شده صدق کند.

۲) نشان دهیم مراحل انجام شده برگشت‌پذیراند.

۳) نشان دهیم نتیجه‌ی به‌دست آمده برای همه‌ی اعداد برقرار است.

۴) با برهان خلف نادرستی فرض را هم ثابت کنیم.

۱۶۸- برای اثبات یک قضیه، از حکم قضیه شروع کرده و پس از انجام تعدادی عملیات و محاسبات به فرض قضیه یا یک رابطه‌ی همیشه درست رسیده‌ایم، حال برای تکمیل اثبات لازم است کدام گزینه زیر برقرار باشد؟

۱) با ارائه یک مثال نقض، حکم قضیه ثابت می‌شود.

۲) اثبت قضیه‌ی کامل است و دیگر نیازی به فرض دیگر نیست.

۳) باید همه‌ی مراحل انجام شده قابل بازگشت باشند.

۴) با استفاده از قوانین استنتاج، حکم قضیه ثابت شود.

۱۶۹- اگر a و b دو عدد حقیقی متمایز باشند، در اثبات درستی نامساوی $\left(a^2-b^2\right)^2 \geqslant 4ab(a-b)^2$ به روش بازگشتی، به کدام نتیجه‌ی بدیهی می‌رسیم؟

۱) $(a+b)^2 \geqslant 0$ ۲) $(a-b)^2 \geqslant 0$ ۳) $a^2+b^2 \geqslant 0$ ۴) $|a+b| \geqslant 0$

۱۷۰- در اثبات نامساوی $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) \geq (ac+bd)^2$ به روش اثبات بازگشتی به کدام رابطه‌ی بدیهی می‌رسیم؟

۱) $(ad+bc)^2 \geq 0$ ۲) $(ad-bc)^2 \geq 0$ ۳) $(ab+cd)^2 \geq 0$ ۴) $(ab-cd)^2 \geq 0$

۱۷۱- در اثبات نامساوی $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}} \geqslant \frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ از طریق اثبات بازگشتی، رابطه‌ی بدیهی به‌دست آمده کدام است؟ (x و y دو عدد حقیقی مثبت هستند.)

۱) $(x+y)^2 > 0$ ۲) $x^2+y^2 > 0$

۳) $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geqslant 0$ ۴) $\sqrt{x}+\sqrt{y} > 0$