نام و نام خانوادگی: زمان برگزاری: ۳۶۰۰ دقیقه

نام آزمون: هندسه۳ دبیرستان: فاخران

تاریخ آزمون: ۱۳۹۸/۰۶/۱۳ دبیر: اصغر حدادی

۱ - حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1+x & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix}$، با شرط $y=x+z$ کدام است؟

① $2x(x+z)$ ② $x(x+z)$ ③ $x^2(x+z)$ ④ $2x^2(x+z)$

۲ - به ازای کدام مقادیر a و b، اگر ۲ واحد به درایه‌ی واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس زیر اضافه شود، آن گاه۳ واحد به مقدار دترمینان آن افزوده می‌شود؟ $\begin{bmatrix} a+3 & b & c \\ 3 & b+2 & c \\ a & b & c+1 \end{bmatrix}$

① a هر چه باشد، $b=-\frac{1}{2}$ ② a هر چه باشد، $b=\frac{1}{2}$ ③ b هر چه باشد، $a=-\frac{1}{2}$ ④ b هر چه باشد، $a=\frac{1}{2}$

۳ - اگر $A=2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & |A| \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس A^2 کدام است؟

① ۱۶ ② ۳۶ ③ ۶۴ ④ ۷۲

۴ - در ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ اگر $a_{ij}=\begin{cases} 2 & i\neq j \\ 1 & i=j \end{cases}$ باشد. ماتریس A^2-4A، برابر کدام است؟

① $3A^t$ ② $5A^t$ ③ $3I$ ④ $5I$

۵ - اگر به هر درایه واقع در سطر دوم دترمینان $\begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 7 & -2 & 4 \\ 6 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ یک واحد افزوده شود، به مقدار دترمینان ۶ واحد اضافه می‌شود. a کدام است؟

① -1 ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۶ - با فرض $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$، حاصل $|A+A^{16}|$ کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ صفر ④ ۸

۷ - اگر $A=\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$ و $A^n=2^{2n-2}\times 3^{n-1}A$ ، a کدام است؟

① ۳ ② ۶ ③ ۹ ④ ۱۲

۸ - کدام نقطه روی خط $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0$ قرار دارد؟

① $(5,14)$ ② $(0,0)$ ③ $(4,-8)$ ④ $(3,2)$

۹ - A ماتریسی مربعی است که در رابطه‌ی $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 7 & -9 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} = 5I$ صدق می‌کند. دترمینان ماتریس A کدام است؟

① ۱ ② ۱۰ ③ ۲۵ ④ ۵

۱۰ - اگر $A^2-A+I=O$ ، حاصل A^{1396} کدام است؟

① A ② $-I$ ③ $-A$ ④ O

۱۱- حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $[-۱ \quad ۲ \quad ۱]\begin{bmatrix} x & ۱ & ۲ \\ ۰ & -x & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰$ کدام است؟

① -۳ ② -۵ ③ -۷ ④ -۹

۱۲- در دترمینان $\begin{vmatrix} a & ۲ & -۳ \\ ۵ & b & ab \\ a+b & ۱ & ۴ \end{vmatrix}$ اگر به‌جای عدد ۵، عدد ۶ را قرار دهیم، به حاصل دترمینان کدام عدد اضافه می‌شود؟

① ۸ ② $۴(a+b)$ ③ -۱۱ ④ $-۴ab$

۱۳- اگر $A^۲ = \begin{bmatrix} ۹ & ۲ \\ ۱۰ & ۲۱ \end{bmatrix}$ و $A^۲ = ۲A + ۱۳I_۲$ باشد، آن‌گاه ماتریس A کدام است؟

① $\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۵ & ۴ \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} -۲ & -۱ \\ ۵ & -۴ \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$

۱۴- اگر $A = [a_{ij}]_{۴\times۳}$ و $B = [b_{ij}]_{۳\times۵}$ و $C = AB$ باشد، درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس C از کدام رابطه به دست می‌آید؟

① $\sum_{i=۱}^{۴} a_{۲i}b_{i۳}$ ② $\sum_{i=۱}^{۳} a_{۲i}b_{i۳}$ ③ $\sum_{i=۱}^{۴} a_{i۲}b_{۳i}$ ④ $\sum_{i=۱}^{۳} a_{i۲}b_{۳i}$

۱۵- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $[-۱ \quad ۲]\begin{bmatrix} x & ۲ \\ ۱ & -x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۵ \end{bmatrix} = ۰$ باشند، حاصل $\alpha^۲ + \beta^۲$ کدام است؟

① ۸۴ ② ۵۴ ③ ۴۴ ④ معادله جواب ندارد.

۱۶- اگر A و B دو ماتریس متمایز باشند به طوریکه $AB = A$ و $BA = B$ آنگاه ماتریس $B^۲$ برابر کدام است؟

① I ② A ③ B ④ $-I$

۱۷- اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ & -۲ & -۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه حاصل $A^۲ + AB + ۳B$ کدام است؟

① $۳I$ ② $۶I$ ③ $۹I$ ④ $۱۲I$

۱۸- اگر A یک ماتریس مربعی و $A^۶ = \bar{O}$ باشد، وارون ماتریس $I - A$ کدام است؟

① $I + A + A^۲ - A^۳ - A^۴ - A^۵$ ② $I - A + A^۲ + A^۳ - A^۴ - A^۵$

③ $I + A + A^۲ + A^۳ + A^۴ + A^۵$ ④ $I - A - A^۲ - A^۳ - A^۴ - A^۵$

۱۹- اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۱۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های قطر اصلی $A^۴$ کدام است؟

① ۱۴ ② ۵۶ ③ ۹۸ ④ ۱۲۵

۲۰- اگر $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ & ۱۲ \\ -۱۱ & -۱۶ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه $a+b+c+d$ کدام است؟

① صفر ② -۱ ③ ۲ ④ -۲

۲۱- اگر $|A| = ۱$ و $|I+A| = ۳$ باشد، آنگاه $|I + A^{-۱}|$ کدام است؟

① ۳ ② ۲ ③ $\frac{۱}{۳}$ ④ $\frac{۱}{۲}$

۲۲- اگر $A = \begin{bmatrix} |A^۲| & |A| \\ ۳ & ۴|A| \end{bmatrix}$ آنگاه مجموع مقادیر $|A|$ کدام است؟

① ۲ ② ۱ ③ صفر ④ -۱

۲۳ - با افزودن یک واحد به کدام درایهٔ ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۱۲ \\ ۱ & ۷ & ۱ \end{bmatrix}$، حاصل دترمینان تغییر نمی‌کند؟

① $a_{۲۳}$ ② $a_{۳۳}$ ③ $a_{۲۲}$ ④ $a_{۳۲}$

۲۴ - کدام ماتریس می‌تواند مربع یک ماتریس ۲×۲ باشد؟

① $\begin{bmatrix} -۸ & -۵ \\ -۳ & -۸ \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} ۸ & ۵ \\ -۳ & -۸ \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} ۸ & -۵ \\ -۳ & ۸ \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} -۸ & ۵ \\ ۳ & -۸ \end{bmatrix}$

۲۵ - حاصل $\begin{vmatrix} a^۲ & a & ۱ \\ b^۲ & b & ۰ \\ c^۲ & ۰ & c \end{vmatrix}$ همواره با کدام یک از دترمینان‌های زیر برابر است؟

① $\begin{vmatrix} a^۲ & a & c \\ b^۲ & b & ۰ \\ c & ۰ & ۱ \end{vmatrix}$ ② $\begin{vmatrix} ab & a^۲ & ۱ \\ b & b & ۰ \\ c^۲ & ۰ & c \end{vmatrix}$ ③ $\begin{vmatrix} a & ۱ & ۱ \\ b^۲ & b & ۰ \\ c^۲ & ۰ & ac \end{vmatrix}$ ④ $\begin{vmatrix} a & a^۲ & c \\ b & b^۲ & ۰ \\ c^۲ & ۰ & c \end{vmatrix}$

۲۶ - اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ \frac{۳}{۲} & ۱ & \frac{۱}{۲} \\ ۱ & \frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه $A^{۱۳۹۷}$ کدام است؟

① $۱۳۹۷A$ ② $۳^{۱۳۹۷}A$ ③ $۳^{۱۳۹۶}A$ ④ $۳^{۱۳۹۷}I$

۲۷ - اگر A و B دو ماتریس از مرتبهٔ ۲ باشند به‌طوری که $A^{-۱}+۲B^{-۱}=I$، آنگاه کدام رابطه همواره صحیح است؟

① $۲A+B=I$ ② $۲A+B=AB$ ③ $A+۲B=AB$ ④ $A+۲B=I$

۲۸ - دترمینان کدام یک از ماتریس‌های زیر برابر با صفر نیست؟ $(a,b,x,y,z\in\mathbb{R})$

① $\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۶ & ۵ & ۴ \\ ۹ & ۸ & ۷ \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & -۶ \\ -\frac{۱}{۳} & ۵ & ۱ \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} a & a & a \\ z & y & x \\ b & b & b \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۹ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}$

۲۹ - اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، آنگاه مجموع مجهولات دستگاه $AX=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ چند برابر مجموع مجهولات دستگاه $AX'=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ است؟

① ۳ ② ۳٫۵ ③ ۴ ④ ۴٫۵

۳۰ - به ازای چند مقدار m، دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} mx+۲y=m+۲ \\ ۳x+(m+۵)y=۲ \end{cases}$ بیش از یک دسته جواب دارد؟

① هیچ ② بی‌شمار ③ ۲ ④ ۱

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۴

روش اول: ابتدا ستون ۲ را به ستون ۳ اضافه کرده و از $(x+y+z)$ از ستون ۳ فاکتور می‌گیریم. سپس ستون سوم را از ستون اول کم می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} x+1 & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix} = \underbrace{(x+y+z)}_{2y} \begin{vmatrix} 1+x & x & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & z & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 2y \begin{vmatrix} x & x & 1 \\ 0 & y & 1 \\ 0 & z & 1 \end{vmatrix} = 2yx\underbrace{(y-z)}_{x} = 2x^2y = 2x^2(x+z)$$

روش دوم: به z, y, x سه عدد چنان می‌دهیم که گزینه‌ها یکسان شود.

$x=3\ ,\ y=3\ ,\ z=0$

$$\begin{vmatrix} 1+x & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix} \xlongequal[z=0]{x=3,y=3} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (72+9)-(9+18) = 54$$

در بین گزینه‌ها فقط گزینه ۴ به ازای z, y, x داده شده برابر ۵۴ می‌شود.

۲ ـ گزینه ۱ می‌دانیم اگر در ماتریس $[a_{ij}]_{n\times n}$، به درایه‌ی a_{pq} مقدار k واحد اضافه شود، به دترمینان آن kA_{pq} اضافه می‌شود. (A_{pq} همسازه‌ی درایه‌ی a_{pq} است.)

$$k=2 \Rightarrow 2A_{23} = 3 \Rightarrow A_{23} = \frac{3}{2} \Rightarrow (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a+3 & b \\ a & b \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow -((a+3)(b)-ab) = \frac{3}{2} \Rightarrow b = -\frac{1}{2}, a \in \mathbb{R}$$

۳ ـ گزینه ۳

$$A = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & |A| \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \left| 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & |A| \end{bmatrix} \right| = 2^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & |A| \end{vmatrix} = 4(|A|-6) \Rightarrow |A| = 4|A| - 24 \Rightarrow 3|A| = 24$$
$$\Rightarrow |A| = 8 \Rightarrow |A^2| = |A|^2 = 64$$

نکات: $1)\ |kA_{n\times n}| = k^n|A| \quad , \quad 2)\ |A^m| = |A|^m$

۴ ـ گزینه ۴ ابتدا درایه‌های ماتریس A را بدست می‌آوریم.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$
$$A^2 - 4A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 5I$$

۵ ـ گزینه ۳ روش اول:

$$\left.\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 4 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} &= 20a - 189 \\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 5 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} &= 25a - 198 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{فرض سوال}]{\text{با توجه به}} (20a-189)+6 = 25a - 198 \Rightarrow 5a = 15 \Rightarrow a = 3$$

۶ ـ گزینه ۴

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^{16} = (A^3)^5 A = IA = A$$
$$|A + A^{16}| = |A + A| = |2A| = 2^3|A| = 8 \times 1 = 8$$

تذکر: اگر $A_{n\times n}$ و K عدد حقیقی باشند: $|KA| = K^n|A|$

۷ ـ گزینه ۲

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a^2 & 2a^2 \\ 2a^2 & 2a^2 \end{bmatrix} = 2a\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2aA$$

$$A^3 = A \times A^2 = A \times 2aA = 2aA^2 \xlongequal{A^2=2aA} 2a(2aA) = 2^2a^2A = (2a)^2A$$

در نتیجه ماتریس A^n بصورت زیر است:

$$A^n = (2a)^{n-1}A = 2^{n-1}a^{n-1}A$$

$$\begin{cases} A^n = 2^{2n-2} \times 3^{n-1}A \\ A^n = 2^{n-1}a^{n-1}A \end{cases} \Rightarrow 2^{2n-2} \times 3^{n-1} = 2^{n-1}a^{n-1} \Rightarrow (2^2 \times 3)^{n-1} = (2a)^{n-1} \Rightarrow 12 = 2a \Rightarrow a = 6$$

۸ ـ گزینه ۳ راه‌حل اول:

نکته: معادله‌ی $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$، معادله‌ی خط گذرا از نقاط (a, b) و (c, d) در $\mathbb{R}^2$ است.

با توجه به نکته‌ی بالا، معادله‌ی داده شده، معادله‌ی خط گذرا از نقاط $(3, -2)$ و $(2, 4)$ است که به‌صورت زیر می‌باشد:

$$y - 4 = \frac{4+2}{2-3}(x-2) \Rightarrow y = -6x + 16$$

در بین گزینه‌ها، فقط نقطه‌ی $(4, -8)$ روی این خط قرار دارد.

راه‌حل دوم: حاصل دترمینان را ساده می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6x - y + 16 \xlongequal{\text{طبق فرض}} 0 \Rightarrow y = -6x + 16$$

در بین گزینه‌ها، فقط نقطه‌ی $(4, -8)$ روی این خط قرار دارد.

۹ ـ گزینه ۱ نکته: اگر A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند، آن‌گاه $|AB| = |A|\,|B|$

نکته: دترمینان ماتریس پایین مثلثی (بالا مثلثی) حاصل‌ضرب عناصر روی قطر اصلی است.

نکته: اگر A یک ماتریس $n \times n$ و λ یک عدد حقیقی باشد، آن‌گاه: $|\lambda A| = \lambda^n\,|A|$

از طرفین رابطه دترمینان می‌گیریم.

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} |A| \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 7 & -9 \end{vmatrix} = |5I| = 5^3\,|I| \Rightarrow (-5)\,|A|\,(-25) = 5^3 \Rightarrow |A| \times 5^3 = 5^3 \Rightarrow |A| = 1$$

۱۰ ـ گزینه ۳ نکته: اگر A , B دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند $(AB = BA)$ ، آن‌گاه همهٔ اتحادهای جبری برای آن‌ها برقرار است. به‌عنوان مثال:

$$(A+B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$$

نکته: برای ماتریس همانی I همواره داریم: $I^n = I$.

$$A^2 - A + I = O \xrightarrow{\times(A+I)} (A+I)(A^2 - A + I) = O \xrightarrow{I,A\ \text{تعویض‌پذیر}} A^3 + I^3 = O \Rightarrow A^3 = -I$$

$$\Rightarrow (A^3)^{465} = (-I)^{465} = -I \Rightarrow A^{1395} = -I \xrightarrow{\times A} A^{1396} = -A$$

۱۱ ـ گزینه ۱ نکته: حاصل‌ضرب دو ماتریس $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ و $B = [b_{ij}]_{n\times p}$، ماتریس $C = [c_{ij}]_{m\times p}$ است که در آن: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

نکته: در معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2 + bx + c = 0$، حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها به ترتیب برابر $S = \frac{-b}{a}$ و $P = \frac{c}{a}$ است.

ابتدا ضرب ماتریسی داده شده را انجام می‌دهیم.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & -x & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x-1 & -2x & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= -x^2 - x - 6x + 3 \xlongequal{\text{طبق فرض}} 0 \Rightarrow -x^2 - 7x + 3 = 0$$

بنابراین حاصل‌ضرب ریشه‌های این معادله $-3 = \frac{3}{-1}$ است.

۱۲ ـ گزینه ۳ نکته: اگر به درایهٔ ijاُم ماتریس A عدد x اضافه شود، به دترمینان A مقدار xA_{ij} اضافه می‌شود که A_{ij} هم‌سازهٔ ijاُم ماتریس A است.

با توجه به نکتهٔ بالا، در دترمینان $\begin{vmatrix} a & 2 & -3 \\ 5 & b & ab \\ a+b & 1 & 4 \end{vmatrix}$ اگر به‌جای عدد ۵ عدد ۶ را قرار دهیم (یک واحد اضافه کنیم)، به حاصل دترمینان مقدار روبه‌رو اضافه می‌شود:

$$1 \times A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -11$$

۱۳ ـ گزینه ۱ فرض می‌کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد:

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+13 & 2b \\ 2c & 2d+13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a+13 = 9 \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2 \\ 2b = 2 \Rightarrow b = 1 \\ 2c = 10 \Rightarrow c = 5 \\ 2d + 13 = 21 \Rightarrow 2d = 8 \Rightarrow d = 4 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

۱۴ ـ گزینه ۲

$$\underbrace{\begin{bmatrix} - & - & - \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}}_{A}{}_{4\times 3} \times \underbrace{\begin{bmatrix} - & - & b_{13} & - & - \\ - & - & b_{23} & - & - \\ - & - & b_{33} & - & - \end{bmatrix}}_{B}{}_{3\times 5} = \underbrace{\begin{bmatrix} - & - & - & - & - \\ - & - & c_{23} & - & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \end{bmatrix}}_{C}{}_{4\times 5}$$

می‌دانیم c_{23} از ضرب درایه‌های سطر دوم A در ستون سوم B بدست می‌آید و در ماتریس A درایه‌های سطر دوم به شکل $\sum_{i=1}^{3} a_{2i}$ و در ماتریس B درایه‌های ستون سوم به شکل $\sum_{i=1}^{3} b_{i3}$ می‌باشد.

پس c_{23} به صورت $\sum_{i=1}^{3} a_{2i}b_{i3} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}$ بدست می‌آید.

۱۵ ـ گزینه ۳

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}_{1\times 2}\begin{bmatrix} x^2+10 \\ -4x \end{bmatrix}_{2\times 1} = 0$$

$$\to\ -x^2 - 10 - 8x = 0\ \to\ x^2 + 8x + 10 = 0$$

$$\begin{matrix} S = -\dfrac{b}{a} = -8 \\ P = \dfrac{c}{a} = 10 \end{matrix}\quad \Rightarrow\ \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 64 - 20 = 44$$

۱۶ ـ گزینه ۳

$$BA = B \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{از سمت راست در } B} B\underbrace{AB}_{A} = B^2 \to \underbrace{BA}_{B} = B^2 \to\ B = B^2$$

۱۷ ـ گزینه ۳

از طرفی داریم:

$$A^2 + AB + 3B = A(A+B) + 3B$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3I$$

بنابراین:

$$A^2 + AB + 3B = A(A+B) + 3B = A \times 3I + 3B$$

$$= 3A + 3B = 3(A+B) = 3 \times 3I = 9I$$

۱۸ ـ گزینه ۳ چون $A^{۶}=\bar{O}$ می‌باشد پس $I^{۶}-A^{۶}=I^{۶}-\bar{O}=I$ حال بسط اتحاد $I^{۶}-A^{۶}$ را می‌نویسیم:

$$I^{۶}-A^{۶}=(I-A)(I^{۵}+I^{۴}A+I^{۳}A^{۲}+I^{۲}A^{۳}+IA^{۴}+A^{۵})=I$$

$$=(I-A)(I+A+A^{۲}+A^{۳}+A^{۴}+A^{۵})=I$$

$$\Rightarrow\ (I-A)^{-۱}=I+A+A+A^{۲}+\cdots+A^{۵}$$

تذکر: اگر $A^{n}=\bar{O}$ آنگاه داریم:

$$(I-A)^{-۱}=I+A+\cdots+A^{n-۱}$$

۱۹ ـ گزینه ۳ نکته: ماتریس مثلث A بفرم $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ ۰ & d & e \\ ۰ & ۰ & f \end{bmatrix}$ مفروض است:

$$A^{n}=\begin{bmatrix} a^{n} & * & * \\ ۰ & d^{n} & * \\ ۰ & ۰ & f^{n} \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۱۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}\Rightarrow A^{۲}=\begin{bmatrix} ۲^{۲} & * & * \\ ۰ & ۱^{۲} & * \\ ۰ & ۰ & ۳^{۲} \end{bmatrix}\Rightarrow A^{۴}=(A^{۲})^{۲}=\begin{bmatrix} ۴^{۲} & * & * \\ ۰ & ۱^{۲} & * \\ ۰ & ۰ & ۹^{۲} \end{bmatrix}$$

$A^{۴}$ مجموع درایه‌های واقع بر قطر اصلی $=۱۶+۱+۸۱=۹۸$

۲۰ ـ گزینه ۱

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}}_{B}=\underbrace{\begin{bmatrix} ۷ & ۱۲ \\ -۱۱ & -۱۶ \end{bmatrix}}_{C}\to AB=C\xrightarrow[\text{از راست}]{\times B^{-۱}}A\underbrace{BB^{-۱}}_{I}=CB^{-۱}\Rightarrow A=CB^{-۱}$$

$$A=\begin{bmatrix} ۷ & ۱۲ \\ -۱۱ & -۱۶ \end{bmatrix}\times\frac{۱}{۴-۶}\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix}=-\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۷ & ۱۲ \\ -۱۱ & -۱۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=-\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} -۸ & -۲ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ -۲ & -۳ \end{bmatrix}\Rightarrow a+b+c+d=۰$$

۲۱ ـ گزینه ۱

نکته: اگر ماتریس A وارون پذیر باشد: $|A^{-۱}|=\dfrac{۱}{|A|}$

$$\left|I+A^{-۱}\right|=\left|AA^{-۱}+A^{-۱}\right|=\left|(A+I)A^{-۱}\right|=|A+I|\left|A^{-۱}\right|=|A+I|\times\frac{۱}{|A|}=\frac{۳}{۱}=۳$$

۲۲ ـ گزینه ۳

نکته: اگر A ماتریس مربعی باشد و دترمینان آن از دستور زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\to|A|=ad-bc$$

$$A=\begin{bmatrix} |A^{۲}| & |A| \\ ۳ & ۴|A| \end{bmatrix}\xrightarrow{\text{از طرفین دترمینان}}|A|=\begin{vmatrix} |A^{۲}| & |A| \\ ۳ & ۴|A| \end{vmatrix}\to|A|=۴|A|^{۲}-۳|A|$$

$$\to ۴|A|^{۳}-۴|A|=\to ۴|A|(|A|^{۲}-۱)=۰\to\begin{cases} |A|=۰ \\ |A|=۱ \\ |A|=-۱ \end{cases}$$

بنابراین مجموع مقادیر $|A|$ برابر صفر می‌باشد.

۲۳ ـ گزینه ۴

با توجه به گزینه‌ها، اگر دترمینان ماتریس را با بسط برحسب سطر سوم به دست آوریم، داریم:

$$|A|=۳\times\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۱۲ \end{vmatrix}-۷\times\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۴ & ۱۲ \end{vmatrix}+۱\times\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & ۵ \end{vmatrix}$$
$$=۳\times۹-۷\times۰+۱\times(-۳)$$

واضح است که با تغییر مقدار $a_{۳۲}=۷$، دترمینان تغییر نمی‌کند، چون برای محاسبهٔ دترمینان، این درایه در صفر ضرب می‌شود، ولی با تغییر درایهٔ $a_{۳۳}$، حاصل دترمینان عوض می‌شود.

اگر دترمینان ماتریس را با بسط برحسب سطر دوم به‌دست آوریم، داریم:

$$|A| = -۴ \times \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۷ & ۱ \end{vmatrix} + ۵ \times \begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix} - ۱۲ \times \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۷ \end{vmatrix}$$
$$= -۴ \times (-۱۹) + ۵ \times (-۸) - ۱۲ \times ۱$$

همان‌طور که دیده می‌شود با تغییر درایه‌های $a_{۲۳}$ و $a_{۲۲}$، مقدار دترمینان عوض می‌شود.

۲۴ ـ گزینه ۲ نکته: اگر A ماتریس مربعی ۲ × ۲ باشد آنگاه $۰ \geq |A|^{۲} = |A^{۲}|$ به عبارت دیگر دترمینان ماتریس $A^{۲}$ همواره عددی نامنفی است.

بنابراین ماتریس که دترمینان آن منفی باشد نمی‌تواند $A^{۲}$ باشد.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱» : دترمینان $= (-۵)(-۳) - (-۸)(-۸) = -۴۹$ ✗

گزینهٔ «۲» : دترمینان $= ۵(-۳) - (-۸)(۸) = ۴۹$ ✓

گزینهٔ «۳» : دترمینان $= (-۵)(-۳) - ۸ \times ۸ = -۴۹$ ✗

گزینهٔ «۴» : دترمینان $= (۵)(۳) - (-۸)(-۸) = -۴۹$ ✗

۲۵ ـ گزینه ۳ تذکر: در محاسبه دترمینان یک ماتریس مربعی از یک دلخواه در یک سطر یا یک متون فاکتور گرفته و به‌صورت ضریب کنار دترمینان قرار داد.

$$\begin{vmatrix} ۱ & a & a^{۲} \\ ۰ & b & b^{۲} \\ c & ۰ & c^{۲} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{سطر اول از } a \text{ فاکتور می‌گیریم.}} a \begin{vmatrix} \frac{۱}{a} & ۱ & a \\ ۰ & b & b^{۲} \\ c & ۰ & c^{۲} \end{vmatrix} \xrightarrow{a\text{: را در ستون اول ضرب می‌کنیم.}} \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & a \\ ۰ & b & b^{۲} \\ ac & ۰ & c^{۲} \end{vmatrix}$$

۲۶ ـ گزینه ۳

$$A^{۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ \frac{۱}{۲} & ۱ & \frac{۳}{۲} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ \frac{۱}{۲} & ۱ & \frac{۳}{۲} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۶ & ۹ \\ \frac{۳}{۲} & ۳ & \frac{۹}{۲} \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix} = ۳ \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ \frac{۱}{۲} & ۱ & \frac{۳}{۲} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۱ \end{bmatrix} = ۳A$$

$$A^{۲} = ۳A \xrightarrow{\times A} A^{۳} = ۳A^{۲} = ۳(۳A) = ۳^{۲}A \xrightarrow{\times A} A^{۴} = ۳^{۲}A^{۲} = ۳^{۲}(۳A) = ۳^{۳}A \cdots$$
$$\Rightarrow A^{۱۳۹۷} = ۳^{۱۳۹۶}A$$

نکته: اگر A ماتریس مربعی باشد و $k \in \mathbb{N}$ با فرض $A^{۲} = kA$ نتیجه می‌شود $A^{n} = k^{n-۱}A$

۲۷ ـ گزینه ۲

$$A^{-۱} + ۲B^{-۱} = I \xrightarrow{\text{طرفین در } A \text{ ضرب از سمت چپ}} AA^{-۱} + ۲AB^{-۱} = A \times I \Rightarrow I + ۲AB^{-۱} = A$$
$$\xrightarrow{\text{طرفین در } B \text{ ضرب از سمت راست}} IB + ۲AB^{-۱}B = AB \Rightarrow B + ۲AI = AB \Rightarrow ۲A + B = AB$$

۲۸ ـ گزینه ۴

نکته: در محاسبه دترمینان یک ماتریس مربعی اگر درایه‌های یک سطر مضرب ثابتی از سطری دیگر، یا یک ستون مضرب ثابتی از ستونی دیگر باشد دترمینان ماتریس صفر است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱) : $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{vmatrix} \overset{\text{ساروس}}{=\!=\!=} (۴۵ + ۸۴ + ۹۶) - (۱۰۵ + ۴۸ + ۷۲) = ۲۲۵ - ۲۲۵ = ۰$

گزینهٔ (۲) : $\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & -۱ \\ -۶ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۵ & -\frac{۱}{۳} \end{vmatrix} \underset{\text{برابر ستون سوم است .}}{\overset{\text{ستون اول } (-۳)}{=\!=\!=}} ۰$

گزینهٔ (۳) : $\begin{vmatrix} a & a & a \\ x & y & z \\ b & b & b \end{vmatrix} \underset{\text{برابر سطر سوم است .}}{\overset{\text{سطر اول } \frac{a}{b}}{=\!=\!=}} ۰$

۲۹ ـ گزینه ۱ تذکر: در دستگاه $AX = B$، A ماتریس ضرایب، X ماتریس مجهولات و B ماتریس مقادیر ثابت دستگاه می‌باشد.

جواب از دستور $X = A^{-۱}B$ حاصل می‌شود.

نکته: اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، آنگاه $A^{*} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ می‌باشد.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۲ - ۳ = -۱$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}1 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$AX=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\Rightarrow X=A^{-1}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\-4\end{bmatrix}$$

$$AX'=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\Rightarrow X'=A^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$

مجموع مجهولات دستگاه اول برابر $3=(-4)+7$ و مجموع مجهولات دستگاه دوم برابر $1=(-1)+2$ است پس مجموع مجهولات دستگاه اول ۳ برابر مجموع مجهولات دستگاه دوم است.

۳۰ ـ گزینه ۴ نکته: منظور از وجود بیش از یک دسته جواب در دستگاه $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ یعنی آنکه دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

و شرط آنکه دستگاه مذکور بی‌شمار جواب داشته باشد آن است:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

$$\begin{cases}mx+2y=m+2\\ 3x+(m+5)y=2\end{cases}\xrightarrow{\text{دستگاه بی‌شمار جواب دارد}}\frac{m}{3}=\frac{2}{m+5}=\frac{m+2}{2}$$

$$(1)\ :\ \frac{m}{3}=\frac{m+2}{2}\rightarrow 2m=3m+6\Rightarrow m=-6\qquad (I)$$

$$(2)\ :\ \frac{m}{3}=\frac{2}{m+5}\Rightarrow m^2+5m=6\Rightarrow m^2+5m-6=0\Rightarrow\begin{cases}m=1\\ m=-6\end{cases}\qquad (II)$$

حالت مشترک جواب‌های (I) و (II) مقدار $m=-6$ است.

هندسه3

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۶ - ۴	۱۱ - ۱	۱۶ - ۳	۲۱ - ۱	۲۶ - ۳
۲ - ۱	۷ - ۲	۱۲ - ۳	۱۷ - ۳	۲۲ - ۳	۲۷ - ۲
۳ - ۳	۸ - ۳	۱۳ - ۱	۱۸ - ۳	۲۳ - ۴	۲۸ - ۴
۴ - ۴	۹ - ۱	۱۴ - ۲	۱۹ - ۳	۲۴ - ۲	۲۹ - ۱
۵ - ۳	۱۰ - ۳	۱۵ - ۳	۲۰ - ۱	۲۵ - ۳	۳۰ - ۴