نام و نام خانوادگی: پایه: دوازدهم

نام آزمون: هندسه ۳

تاریخ آزمون: ۱۳۹۸/۱۲/۱۵ فاخران

۱- اگر $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ به‌صورت $a_{ij}=\begin{cases} i\cdot j & i>j \\ i^2 & i=j \\ 2i-j & i<j \end{cases}$ تعریف شده باشد، ماتریس $2A-3I$ را به‌دست آورید.

۲- اگر A ماتریسی 3×3 باشد و $|A|=-2$ حاصل $||A|\cdot A|$ را بیابید.

۳- اگر ضرب ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشد حاصل $\begin{bmatrix} x & 2 & -y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -x \end{bmatrix}$ را بیابید.

۴- دستگاه $\begin{cases} (m-3)x+3y=m \\ 4x+(m+1)y=2 \end{cases}$ به ازای چه مقادیری m دارای جواب منحصر به فرد می‌باشد.

۵- مقدار m را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx+3y=-3 \\ 4x+(m+4)y=2 \end{cases}$ جواب نداشته باشد.

۶- اگر $A=\begin{bmatrix} 2x & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A=B$ در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.

۷- دستگاه $\left[\begin{array}{l} 3x-4y=1 \\ -x+2y=1 \end{array}\right.$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

۸- اگر $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای واحد در $\mathbb{R}^3$ باشند، حاصل $\vec{i}\cdot(\vec{j}\times\vec{k})$ را به‌دست آورید.

۹- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. ماتریس $A\times B$ را به‌دست آورید و برقراری تساوی $|AB|=|A|\,|B|$ را بررسی کنید.

۱۰- اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در این‌صورت اعداد حقیقی a و b و c و d را چنان بیابید که تساوی $|A|^2-5|A|+6=0$ برقرار باشد.

۱۱- اگر A ماتریسی 3×3 باشد و $|A|=5$ در این‌صورت حاصل $||A|\,A|$ را بیابید.

۱۲- ماتریس مربعی A در تساوی $2A^2-A+I=\bar{O}$ صدق می‌کند. نشان دهید A وارون‌پذیر است وارون A را حساب کنید.

۱۳- اگر $A^2=A$ و m یک عدد حقیقی باشد، ثابت کنید:

$$(I-mA)^{-1}=I+\frac{m}{1-m}A$$

۱۴- اگر برای دو ماتریس مربعی A و B داشته باشیم $AB=I$ ثابت کنید.

الف) A وارون‌پذیر است.

ب) $B=A^{-1}$

۱۵- ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} 1 & ; \quad i=j \\ 2 & ; \quad i\neq j \end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس A^2-4A کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۱۶- اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C^2، کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

۱۷- مقادیر x از رابطهٔ $\begin{vmatrix} 0 & x-3 & x-2 \\ x+3 & 0 & -4 \\ x+2 & 6 & 0 \end{vmatrix}=0$، کدام است؟

۱) $-1,-6$ ۲) $-1,6$ ۳) $1,-6$ ۴) $1,6$

۱۸- از رابطهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} x & 2x & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix} = 0$، عدد غیرصفر x، کدام است؟

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{3}{5}$

۱۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$، از رابطهٔ ماتریسی $AX = A - 2I$، ماتریس X، کدام است؟

① $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

۲۰- اگر A ماتریس 3×3 باشد و $|A| = 4$، آنگاه دترمینان ماتریس $|A| \cdot A$، کدام است؟

① ۶۴ ② ۹۶ ③ ۱۲۸ ④ ۲۵۶

۲۱- به ازای کدام مقدار x و y ماتریس $\begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$، یک ماتریس قطری است؟

① $x = 1 , y = -7$ ② $x = 2 , y = -7$ ③ $x = 2 , y = -5$ ④ $x = 1 , y = -5$

۲۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$، از رابطهٔ $AX = B$، ماتریس X، کدام است؟

① $\begin{bmatrix} 2 & 13 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 1 & 13 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} -1 & -12 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

۲۳- دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$، کدام است؟

① ۱۲ ② ۱۵ ③ ۲۲ ④ ۲۵

۲۴- اگر $A = \left[i^2 - i\right]_{3\times3}$ و $B = \left[j^2 - i + 1\right]_{3\times3}$ و $C = A + B$ باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C کدام است؟

① ۱۳ ② ۱۵ ③ ۱۷ ④ ۱۹

۲۵- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه مجموع همهٔ درایه‌های ماتریس $A^2 + AB + 2B$ کدام است؟

① ۱۰ ② ۱۲ ③ ۱۴ ④ ۱۶

۲۶- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ حاصل A^{20} کدام است؟

① $1024I$ ② $512I$ ③ A ④ $1024A$

۲۷- اگر $2A + 3I = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$، دترمینان $A^2 - 3A$ کدام است؟

① ۲ ② -2 ③ -4 ④ ۴

۲۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ حاصل‌جمع درایه‌های ستون اول ماتریس $(2A - B) \times B$ کدام است؟

① ۲ ② -2 ③ ۴ ④ -4

۲۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ در ماتریس $2A - 3B$، درایهٔ سطر اول و ستون دوم کدام است؟

① ۰ ② ۱ ③ -2 ④ ۴

۳۰- اگر $A=\left[i^{۲}-j\right]_{۳\times۳}$ حاصل $|A|$ کدام است؟

① ۰ ② ۱ ③ ۲ ④ ۴

۳۱- اگر $\begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & -۲ & ۴ & x-۱ \\ ۱ & ۱ & -۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ & -۲ & -۱ \end{vmatrix}=۰$ مقدار x کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۳۲- مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\begin{vmatrix} -۱ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۴x+۵ & -۱ \\ ۳x+۱ & ۶ & ۲ \end{vmatrix}=۰$ کدام است؟

① ۲ ② ۲− ③ ۳ ④ ۳−

۳۳- اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ماتریس $A^{۱۰۰}$ کدام است؟

① $\begin{bmatrix} ۱۰۱ & -۱۰۰ \\ ۱۰۰ & -۹۹ \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} ۲۰۰ & -۱۰۰ \\ ۱۰۰ & ۹۹ \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} ۱۰۱ & ۱۰۰ \\ -۱۰۰ & ۹۹ \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} ۲۰۰ & -۱۰۰ \\ ۱۰۰ & ۰ \end{bmatrix}$

۳۴- اگر به درایهٔ واقع در سطر اول و ستون سوم ماتریس $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & a \\ ۳ & ۴ & b \\ ۷ & ۱۰ & c \end{vmatrix}$ سه واحد افزوده شود، به مقدار دترمینان چند واحد اضافه می‌شود؟

① ۲ ② ۶ ③ ۴ ④ ۳

۳۵- اگر $A^{-۱}+I=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ آنگاه حاصل دترمینان ماتریس $A+I$ کدام است؟

① $-\frac{۱}{۲}$ ② $\frac{۱}{۲}$ ③ $\frac{۱}{۴}$ ④ $\frac{۱}{۳}$

۳۶- هرگاه $A^{۳}=I$ باشد حاصل $\dfrac{|A^{۲}+I|}{|A+I|}$ کدام است؟

① ۱ ② ۱− ③ $\frac{۱}{۲}$ ④ $-\frac{۱}{۲}$

۳۷- هرگاه داشته باشیم $A^{-۱}+A=I$ حاصل $A^{۱۰۱}$ کدام است؟

① $-A+I$ ② $A+I$ ③ $-I+A$ ④ $A^{۲}$

۳۸- اگر $A=\begin{bmatrix} a & ۲ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}$ و مقدار دترمینان $A(A^{-۱}-I)$ برابر ۶ باشد a کدام است؟

① ۲− ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

۳۹- چه رابطه‌ای بین a و b و c وجود داشته باشد تا دستگاه $\begin{cases} ax-by=۰ \\ (a+b)x-cy=۰ \end{cases}$ جواب‌های غیر صفر داشته باشد؟

① $b^{۲}=ab+ac$ ② $ac=b^{۲}-c^{۲}$ ③ $b^{۲}=ac-ab$ ④ $ac=b^{۲}+c^{۲}$

۴۰- اگر A و B ماتریس‌هایی وارون‌پذیر باشند و $|I-AB|=m$ آنگاه حاصل $|I-BA|$ کدام است؟

① m ② $\frac{۱}{m}$ ③ $-m$ ④ $-\frac{۱}{m}$

۴۱- اگر $A^{-۱}=۴A^{۳}$ و A ماتریسی ۲×۲ باشد در این‌صورت $|A|$ کدام است؟

① $\frac{۱}{۲}$ ② $-\frac{۱}{۲}$ ③ $\pm\frac{۱}{۲}$ ④ ۲

۴۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ آن‌گاه حاصل $\left| A + A^{-1} \right|$ کدام است؟

① -8 ② -16 ③ 4 ④ 16

۴۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ حاصل $A^{-1}(B^{-1} + A^{-1})^{-1}B^{-1}$ کدام است؟

① $\frac{1}{2}I$ ② $2I$ ③ $4I$ ④ $\frac{1}{4}I$

۴۴- اگر $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس A کدام است؟

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{2}{3}$

۴۵- اگر $A = B + C$ و $B^{-1} + C^{-1} = x$ ماتریس x کدام است؟

① $B^{-1}AC^{-1}$ ② BCA^{-1} ③ $BC^{-1}A$ ④ $BA^{-1}C$

۴۶- اگر $A^3 = 5I$ حاصل $(A + 2I)^{-1}$ کدام است؟

① $\frac{1}{5}(A^2 + 2A + 4I)$ ② $\frac{1}{8}(A^2 - 2A + 4I)$ ③ $\frac{1}{8}(A^2 + 2A + 4I)$ ④ $\frac{1}{13}(A^2 - 2A + 4I)$

۴۷- اگر $[2 \quad 1] \times A = [3 \quad 5]$ و $[3 \quad 4] \times A = [-1 \quad 2]$ باشد، حاصل $[8 \quad 9] \times A$ کدام است؟

① $[1 \quad 9]$ ② $[1 \quad -9]$ ③ $[-1 \quad 9]$ ④ $[-1 \quad -9]$

۴۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه ماتریس $A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5$ کدام است؟

① $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ② $\bar{O}$ ③ $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

۴۹- اگر $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \left(A - \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه $|A|$ کدام است؟

① -9 ② 3 ③ -3 ④ 9

۵۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه دترمینان ماتریس $\frac{1}{2}A^3$ کدام است؟

① -1 ② 1 ③ 4 ④ -4

۵۱- معادلهٔ $\begin{vmatrix} 0 & x-a & x-b \\ a-x & 0 & x-c \\ b-x & c-x & 0 \end{vmatrix} = 0$ دارای چند جواب حقیقی است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ بی‌شمار

۵۲- اگر ماتریس $A \neq I$ و $A^n = A \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$، ماتریس A کدام نوع است؟

① قطری ② بالامثلثی ③ پایین‌مثلثی ④ وارون ندارد.

۵۳- اگر ماتریس $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ با درایه‌های $a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{m - 2i} & i > j \\ |2n^3 - mj^2| & i = j \\ mi - nj^2 + i & j > i \end{cases}$ پایین‌مثلثی باشد، مقدار $n - m$ کدام است؟

① 1 ② -1 ③ 0 ④ 2

۵۴- در مورد دستگاه $\begin{cases} mx+۳y=x+۱ \\ y+(m+۱)x=۳ \end{cases}$ کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر $m=-۲$، دستگاه جواب ندارد.

(۲) اگر $m\neq -۲$ دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

(۳) اگر $m=۱$، دستگاه جواب منحصر به فرد ندارد.

(۴) به‌ازای هیچ مقدار m، دستگاه بی‌شمار جواب ندارد.

۵۵- اگر A و B دو ماتریس وارون‌پذیر ۳ × ۳ بوده و $|A|>۲$ و $|A^{۲}|-|۲A|+\frac{۴}{۹}|۳I_{۳}|=۰$، حاصل $\frac{|A^{-۱}+I|}{|I+A|}+|AB|\times|(۲B)^{-۱}|$ کدام است؟

(۱) $\frac{۱}{۳}$ (۲) $\frac{۱۱}{۱۲}$ (۳) $\frac{۳}{۴}$ (۴) ۱

۵۶- اگر $A^{۲}=۲A-I$ و $A^{۶}=\alpha A+\beta I$ مقدار $\alpha-\beta$ کدام است؟

(۱) ۵ (۲) -۱۱ (۳) ۱۱ (۴) -۵

۵۷- ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times ۲}$ با تعریف $a_{ij}=[i-j+۲]$ مفروض است. مقدار $|\;-۲A^{۲}\;|$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۳

۵۸- اگر $\tan ۲\alpha=-۲$ باشد، آنگاه دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۴(\sin\alpha+\cos\alpha) & ۰ & ۳\cos\alpha \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۵\sin\alpha & ۰ & ۴(\sin\alpha-\cos\alpha) \end{bmatrix}$ کدام است؟

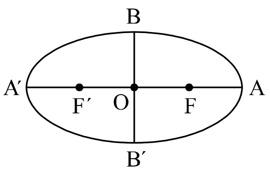
(۱) $-\cos ۲\alpha$ (۲) $\cos ۲\alpha$ (۳) $\sin ۲\alpha$ (۴) $-\sin ۲\alpha$

۵۹- معادلهٔ دایره‌ای بنویسید که نقاط $A(۴,-۱)$, $B(-۲,۱)$ دو سر قطری از آن باشند.

۶۰- حدود a را طوری به‌دست آورید که $x^{۲}+y^{۲}-۳x+۵y+a=۰$ بتواند معادلهٔ یک دایره باشد.

۶۱- دایره‌های $x^{۲}+y^{۲}-۲x=۴$ و $x^{۲}+y^{۲}=۴$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۶۲- اگر در بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد، اندازهٔ زاویهٔ $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟



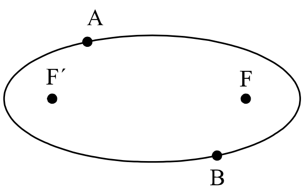
۶۳- معادله سهمی را بنویسید که $F(۱,-۲)$ کانون و $S(۱,۲)$ رأس آن باشد، سپس معادلهٔ خط هادی آن را بنویسید.

۶۴- معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x+y=۱$ و $x-y=۳$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $۴x+۳y=-۵$ بر آن مماس باشد.

۶۵- در نقطهٔ $A(۲,۳)$ روی دایرهٔ $x^{۲}+y^{۲}-۲x-۲y=۳$ مماسی رسم کرده‌ایم، معادلهٔ این خط مماس را به‌دست آورید.

۶۶- اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{۳}{۵}$ و طول قطر کوچک بیضی ۱۶ باشد، طول قطر بزرگ بیضی و فاصلهٔ کانونی آن را به دست آورید.

۶۷- دو نقطهٔ A و B مطابق شکل روی بیضی و نقاط F و F' کانون‌های بیضی‌اند. اگر $AF'=BF$ باشد ثابت کنید دو پاره خط AF و BF' موازی‌اند.

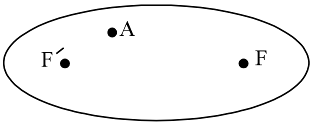


۶۸- نقاط A , B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از نقطه C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

۶۹- معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقطهٔ $O(-۲,۳)$ مرکز آن و $M(۱,-۱)$ یک نقطه از آن باشد.

۷۰- وضعیت خط $x+y=۲$ و دایره $x^{۲}+y^{۲}=۲$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۷۱ - در شکل مقابل نقطهٔ A داخل بیضی و نقاط F و F' کانون‌های بیضی‌اند.
ثابت کنید مجموع فواصل نقطه A از F و F' کوچکتر از قطر بزرگ بیضی است.



۷۲ - بیضی با قطرهای ۶ و ۱۰ مفروض است، خروج از مرکز بیضی را به‌دست آورید.

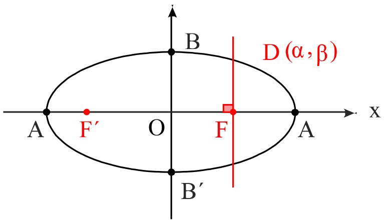
۷۳ - ثابت کنید هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

۷۴ - معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(0,1)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادلهٔ $x+y=2$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند.

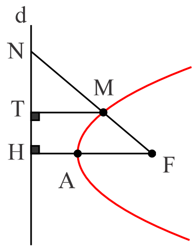
۷۵ - نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,1)$ و $C(1,-3)$ رئوس مثلث ABC هستند. معادله دایره محیطی مثلث ABC را بنویسید. سپس معادله مماس بر این دایره را در رأس B به دست آورید.

۷۶ - M روی یک بیضی با کانون‌های F و F' به گونه‌ای قرار دارد که MF و MF' بر هم عمودند. ثابت کنید: $MF \times MF' = 2b^2$

۷۷ - مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصلهٔ F از هر دو نقطهٔ O و A برابر ۲ است. اگر خطی که در نقطهٔ F بر AA' عمود کرده‌ایم بیضی را در نقطهٔ D قطع کرده باشد. مختصات D را به‌دست آورید.



۷۸ - در شکل سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در N قطع کند و از نقطهٔ M، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH}$



۷۹ - محور یک سهمی موازی محور yها و مختصات کانون آن $F(2,-\frac{7}{2})$ است. اگر دهانهٔ سهمی رو به پایین و فاصلهٔ کانونی آن برابر یک باشد. معادلهٔ ضمنی سهمی را به دست آورید.

۸۰ - سهمی $y^2 = 4x - 4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

۸۱ - معادلهٔ $mx^2 + 5y^2 + 20x - 10y + n + 1 = 0$ بازای چه حدودی از m و n معادلهٔ دایره است؟

۸۲ - نقطهٔ M روی بیضی واقع است، به‌طوری که $MF - MF' = 2b$ باشد ثابت کنید: $MF \times MF' = a^2 - b^2 = c^2$

۸۳ - در سهمی $(x+3y)^2 + 8(x-1)^2 = (3x+y)^2$ ، مختصات کانون و معادلهٔ خط هادی و معادلهٔ محور تقارن را بیابید.

۸۴ - حدود c را مشخص کنید که خط $L: 3x + 4y + c = 0$ دایرهٔ $c: (x-3)^2 + y^2 = 1$ را قطع کند.

۸۵ - ثابت کنید در دو بیضی دورترین و نزدیکترین نقاط روی بیضی از کانون‌ها برابر است با: $a+c$ و $a-c$.

۸۶ - نقطهٔ $S = (2,1)$ رأس سهمی افقی با کانون F می‌باشد. اگر F روی خط $y = -x + 1$ قرار گیرد، مختصات F را مشخص کنید و سپس معادلهٔ سهمی را بنویسید.

۸۷ - به ازای کدام مقدار a کانون سهمی به معادله $2y^2 + ay - 3x = 0$ بر روی محور y ها است؟

(۱) ± 2 (۲) ± 3 (۳) ± 4 (۴) ± 6

۸۸ - سهمی به کانون $(۱,۲)$ و خط هادی به معادله‌ی $x=-۳$ محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

① $\frac{۱}{۲}$ ② $-\frac{۱}{۲}$ ③ $\frac{۱}{۴}$ ④ $-\frac{۱}{۴}$

۸۹ - مرکز دایره‌ای بر روی نیمساز ناحیه‌ی اول است. اگر این دایره از نقطه‌ی $A(۶,۳)$ گذشته و بر خط به معادله‌ی $y=۲x$ مماس شود، شعاع آن کدام است؟

① $\sqrt{۵}$ ② $\sqrt{۶}$ ③ $۲\sqrt{۲}$ ④ $\sqrt{۱۰}$

۹۰ - نقطه‌ی $S(۲,۱)$ رأس یک سهمی است که محور تقارن آن موازی محور y ها است. و از نقطه‌ی $(۰,۵)$ می‌گذرد. معادله‌ی خط هادی آن، کدام است؟

① $y=\frac{۱}{۴}$ ② $y=\frac{۱}{۲}$ ③ $y=\frac{۳}{۴}$ ④ $y=\frac{۳}{۲}$

۹۱ - نقطه‌ی $M(۲\sqrt{۵},b)$ مرکز دایره‌ای است که بر دو خط به معادلات $y=۲x$ و $x=۲y$ مماس است. شعاع دایره‌ی کوچک‌تر کدام می‌باشد؟

① ۱ ② ۱٫۵ ③ ۲ ④ ۲٫۵

۹۲ - یک سهمی که محور تقارن آن موازی یکی از محورهای مختصات است، محور y ها را در دو نقطه به عرض‌های ۱ و ۵ قطع می‌کند و رأس آن بر روی نیمساز ناحیه‌ی اول است، فاصله‌ی کانون سهمی تا خط هادی، کدام می‌باشد؟ (با کمی تغییر)

① $\frac{۲}{۳}$ ② $\frac{۳}{۴}$ ③ $\frac{۴}{۳}$ ④ $\frac{۳}{۲}$

۹۳ - دو دایره C و 'C در نقطه $(۰,۱)$ مماس برونی هم هستند. اگر قائم‌های بر دایره C همواره از نقطه $(۲,-۳)$ بگذرد. مرکز دایره 'C با شعاع $\sqrt{۵}$ کدام است؟

① $(-۱,۳)$ ② $(-۱,۲)$ ③ $(۱,-۲)$ ④ $(۱,-۱)$

۹۴ - سهمی به کانون $F(۳,۲)$ و خط هادی به معادله $x=-۱$، محور xها را در نقطه A قطع می‌کند. فاصله نقطه A تا کانون سهمی کدام است؟

① ۲٫۲۵ ② ۲٫۵ ③ ۲٫۷۵ ④ ۳

۹۵ - دایره‌ای بر محور xها و خط به معادله $۳x+۴y=۰$ مماس است. اگر مرکز این دایره در ناحیه اول و شعاع آن ۳ واحد باشد، نقطه مشترک آن با محور xها با کدام طول است؟

① ۱ ② ۱٫۵ ③ ۲ ④ ۲٫۵

۹۶ - فاصله کانون تا خط هادی یک سهمی ۲ واحد است. این سهمی محور yها را در دو نقطه به عرض‌های ۱ و ۵- قطع می‌کند. طول رأس آن با علامت مثبت کدام است؟

① $\frac{۵}{۴}$ ② $\frac{۳}{۲}$ ③ $\frac{۹}{۴}$ ④ $\frac{۵}{۲}$

۹۷ - نقطه $M(x,y)$ طوری حرکت می‌کند، که همواره فاصله آن از نقطه $(۲,-۱)$ برابر، $\frac{۲}{۳}$ فاصله آن از خط $y=۴$ است. کوتاهترین فاصله نقاط M تا خط $y=۴$ ، کدام است؟

① ۲ ② ۲٫۵ ③ ۳ ④ ۳٫۵

۹۸ - دو دایره گذرا بر نقطه $(۲,-۹)$ بر هر دو محورهای مختصات مماس است. شعاع دایره بزرگتر، کدام است؟

① ۱۴ ② ۱۵ ③ ۱۷ ④ ۱۹

۹۹ - دایره‌ی گذرا بر مبدأ مختصات، بر دو خط به معادلات $y=۲x$ و $y=۲x+۱۰$، مماس است. مختصات مرکز این دایره، کدام است؟

① $(-۳,۲)$ ② $(-۳,۱)$ ③ $(-۲,۱)$ ④ $(-۱,۲)$

۱۰۰ – به ازای کدام مقدار a، زاویه‌ی بین خط مماس بر دایره‌ی $x^۲ + y^۲ - ۲x + y = ۱$ و خط به معادله‌ی $۳x + ۲y = a$ در نقطه‌ی تلاقی آن‌ها، ۹۰ درجه است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۰۱ – دایره‌ی C بر دایره به معادله‌ی $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y = ۴$ مماس خارج است. هر خط قائم بر دایره‌ی C از نقطه‌ی $(۸,۷)$ می‌گذرد. شعاع دایره‌ی C کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۱۰۲ – به ازای کدام مقدار a، خط هادی سهمی $۲y^۲ - ۱۲y + ax + ۸ = ۰$، به معادلهٔ $x = \frac{۲۱}{۸}$ است؟

(۱) ۳و۱۲ (۲) ۳و۱۶ (۳) ۵و۱۲ (۴) ۵و۱۶

۱۰۳ – وتر مشترک دایرهٔ C با دایره با معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۴x = ۶$ منطبق بر نیمساز ناحیهٔ اول است. اگر دایرهٔ C از نقطهٔ $(-۱,۴)$ بگذرد، معادلهٔ آن کدام است؟

(۱) $x^۲ + y^۲ - y + ۳x = ۶$ (۲) $x^۲ + y^۲ + ۲y - x = ۶$ (۳) $x^۲ + y^۲ - ۲y + x = ۶$ (۴) $x^۲ + y^۲ - ۳y - x = ۶$

۱۰۴ – معادلهٔ یک سهمی با کانون $F(۲,۱)$ و خط هادی به معادلهٔ $x = ۴$، کدام است؟

(۱) $y^۲ - ۲y + ۴x = ۱۱$ (۲) $y^۲ - ۲y + ۲x = ۵$ (۳) $x^۲ - ۴x + ۴y = ۰$ (۴) $x^۲ - ۶x + ۲y = -۵$

۱۰۵ – در یک بیضی به اقطار $۲\sqrt{۵}$ و ۲ واحد، دایره‌ای هم‌مرکز با بیضی و شعاع ۲ واحد، بیضی را در نقطهٔ M قطع می‌کند. مجموع مربعات فواصل M از دو کانون بیضی، کدام است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۲۰

۱۰۶ – وتر مشترک دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱۷$، با دایرهٔ C گذرا بر نقطهٔ $(-۱,۶)$، بر خط به معادلهٔ $۲x - y = ۳$ منطبق است. شعاع دایرهٔ C، کدام است؟

(۱) ۳ (۲) $۲\sqrt{۲}$ (۳) $۲\sqrt{۳}$ (۴) ۴

۱۰۷ – مختصات کانون سهمی به معادلهٔ $۲x^۲ - ۴x + ۳y = ۴$، کدام است؟

(۱) $(۱,\frac{۵}{۴})$ (۲) $(۱,\frac{۱۳}{۸})$ (۳) $(\frac{۱}{۴},۲)$ (۴) $(\frac{۵}{۸},۲)$

۱۰۸ – در یک بیضی با خروج از مرکز $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$، دو سر قطر بزرگ از انتهای قطر کوچک، با کدام زاویه رؤیت می‌شود؟

(۱) ۶۰° (۲) ۹۰° (۳) ۱۲۰° (۴) ۱۵۰°

۱۰۹ – به ازای کدام مقدار m خط $۲x - ۳y + m = ۲$ بر دایره $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۶y = ۰$ مماس است؟

(۱) $۲,-۲۴$ (۲) $۲,-۱۵$ (۳) $۳,-۱۸$ (۴) $۳,-۱۶$

۱۱۰ – خط به معادله $y = ۲x + ۳m - ۲$ بر دایره $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y = ۴$ مماس است. m کدام است؟

(۱) $-۱ \pm \sqrt{۵}$ (۲) $-۲ \pm \sqrt{۵}$ (۳) $۱ \pm \sqrt{۳}$ (۴) $۲ \pm \sqrt{۳}$

۱۱۱ – معادله دایره به مرکز $(۲,-۱)$ و مماس بر خط به معادله $۲x + y = ۵$ کدام است؟

(۱) $x^۲ + y^۲ + ۴x - ۲y + ۵ = ۰$ (۲) $۳x^۲ + ۳y^۲ - ۱۲x + ۶y = ۰$

(۳) $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y + ۱ = ۰$ (۴) $۵x^۲ + ۵y^۲ - ۲۰x + ۱۰y + ۲۱ = ۰$

۱۱۲ – سهمی به کانون $F(-۲,۳)$ و خط هادی $x = ۴$ محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

(۱) $-\frac{۱}{۲}$ (۲) $\frac{-۱}{۴}$ (۳) $\frac{۱}{۲}$ (۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۱۳ - نقطه M با کدام طول بر روی خط $y = ۲x - ۱$ انتخاب شود به طوری که مجموع فواصل آن از دو نقطه $(۲,۰)$ و $(۰,۱)$ برابر ۳ باشد؟

① $۰/۸ \pm \frac{۲\sqrt{۷}}{۱۵}$ ② $۱ \pm \frac{۲\sqrt{۱۱}}{۱۵}$ ③ $۰/۸ \pm \frac{۲\sqrt{۱۱}}{۱۵}$ ④ $۱ \pm \frac{۲\sqrt{۷}}{۱۵}$

۱۱۴ - به ازای کدام مجموعه مقادیر m معادله $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۶y + m = ۲$ نمایش یک دایره حقیقی است؟

① $m > ۱۲$ ② $m < ۱۲$ ③ $۱ < m < ۸$ ④ $-۲ < m < ۶$

۱۱۵ - مکان هندسی نقطه متحرک $M(x,y)$ به طوری که فاصله آنها از نقطه $(۲,-۱)$، $\sqrt{۲}$ برابر فاصله آنها از نقطه $(۱,-۲)$ باشد، دایره‌ای به کدام مرکز و شعاع است؟

① $(-۱,۱), R = \sqrt{۳}$ ② $(۰,۱), R = ۲$ ③ $(۱,-۳), R = ۴$ ④ $(۰,-۳), R = ۲$

۱۱۶ - خط به معادله $my - \frac{۳}{۴}x = \frac{۹}{۴}$ دایره $x^۲ + y^۲ + ۶x - c = ۰$ را در دو نقطه قطع می‌کند اگر فاصله‌ی بین این دو نقطه برابر ۱۰ باشد مقدار c کدام است؟

① ۸ ② ۱۶ ③ ۳۲ ④ ۱۲

۱۱۷ - از نقطه‌ی $A(a,b)$ خطی مماس بر دایره $(x+۳)^۲ + (y-۱)^۲ = ۱۶$ و موازی محور x ها رسم می کنیم کم‌ترین مقدار $a+b$ کدام است؟

① ۲ ② ۴ ③ -۶ ④ -۹

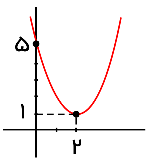
۱۱۸ - c کدام باشد تا مماس مشترک خارجی دو دایره $x^۲ + y^۲ - c = ۰$ و $x^۲ + y^۲ - ۲x = ۰$ موازی محور y ها باشد؟

① ۴ ② -۴ ③ ۶ ④ -۶

۱۱۹ - مختصات نقطه‌ای روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم که از آن مماسی به طول $۲\sqrt{۲}$ بر دایره $(x-۱)^۲ + (y+۳)^۲ = ۲$ رسم کرده‌ایم، کدام است؟

① $(۹,-۹)$ ② $(۳,-۳)$ ③ $(-۵,۵)$ ④ $(۴,-۴)$

۱۲۰ - مختصات کانون سهمی در شکل مقابل کدام است؟



① $(۲,\frac{۳}{۴})$ ② $(۲,\frac{۵}{۴})$ ③ $(\frac{۳}{۴},۱)$ ④ $(\frac{۵}{۴},۱)$

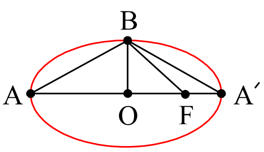
۱۲۱ - اگر از نقطه‌ی $(۱,-۲)$ دو مماس بر سهمی $x^۲ + ۲x = ۱۲y + m$ رسم کنیم حدود m کدام است؟

① $m > ۲۷$ ② $m > ۲۶$ ③ $m < ۲۷$ ④ $m < ۲۶$

۱۲۲ - اگر خروج از مرکز یک بیضی برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ باشد آنگاه طول وتر کانونی بیضی کدام است؟ ($۲a$ قطر بزرگ است)

① $\frac{\sqrt{۲}}{۲}a$ ② $\sqrt{۲}a$ ③ $۲a$ ④ a

۱۲۳ - در شکل زیر اگر مساحت مثلث ABA' برابر ۱۵ و مساحت مثلث OBF برابر ۶ باشد خروج از مرکز بیضی کدام است؟



① $\frac{۳}{۵}$ ② $\frac{۶}{۱۵}$ ③ $\frac{۴}{۵}$ ④ $\frac{۴}{۱۵}$

۱۲۴ - طول قطر غیرکانونی بیضی گذرنده از نقطه‌ی $(۱۰,۱)$، با کانون‌های $F(۲,۵)$ و $F'(۲,-۳)$ کدام است؟

① ۱۶ ② $۸\sqrt{۵}$ ③ ۸ ④ $۴\sqrt{۵}$

۱۲۵ - معادله‌ی دایره‌ی محاطی مربعی که نقاط $A(۳,۱)$ و $B(۱,۳)$ دو سر یک قطر آن باشد، کدام است؟

① $(x+۲)^۲ + (y+۲)^۲ = ۴$ ② $(x-۲)^۲ + (y-۲)^۲ = ۴$ ③ $(x+۲)^۲ + (y+۲)^۲ = ۱$ ④ $(x-۲)^۲ + (y-۲)^۲ = ۱$

۱۲۶ – به ازای کدام مقدار m، خط $y=\frac{m}{۲}$، خط هادی سهمی $x^۲-۶x=۲y-۸$ است؟

① -۲ ② ۲ ③ -۱ ④ ۱

۱۲۷ – بیش‌ترین فاصله‌ی نقاط دایره به معادله‌ی $(۲a-۱)x^۲-۳y^۲+۱۲y+a-۵=۰$، از محور xها کدام است؟

① $۲+\sqrt{۶}$ ② ۴ ③ $۴-\sqrt{۲}$ ④ $۲+\sqrt{۲}$

۱۲۸ – دایره‌ای گذرا بر نقطه $(-۴,۲)$ بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع آن کدام است؟

① ۵ یا ۴ ② ۴ یا ۳ ③ ۱۰ یا ۲ ④ ۶ یا ۲

۱۲۹ – به ازای کدام مقادیر a معادله $x^۲+y^۲-۳x+۵y+a=۰$ معادله یک دایره است؟

① $a>۴$ ② $a<۴$ ③ $\frac{۱۷}{۲}<a$ ④ $\frac{۱۷}{۲}>a$

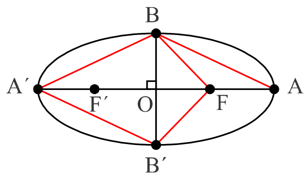
۱۳۰ – اگر خط به معادله $x+y-m=۰$ و دایره C به معادله $x^۲+y^۲-۲x+۲y-۶=۰$ متقاطع باشند. آنگاه حدود m کدام است؟

① $-۲<m<۲$ ② $-۴<m<۴$ ③ $-\sqrt{۲}<m<\sqrt{۲}$ ④ $-۲\sqrt{۲}<m<۲\sqrt{۲}$

۱۳۱ – شعاع بزرگ‌ترین دایره‌ای که بر دایره به معادله $x^۲+y^۲-۱۴x-۲y=۱۱۹$ مماس داخلی است و هر خط قائم بر آن از نقطه $(-۱,-۵)$ می‌گذرد، کدام است؟

① ۱۳ ② ۳۶ ③ ۳ ④ ۲۳

۱۳۲ – در بیضی شکل مقابل با کانون‌های F و F' مساحت مثلث $BA'B'$ سه برابر مساحت مثلث ABF است. مساحت چهارضلعی $FBA'B'$ چند برابر مساحت مثلث ABF است؟



① $\frac{۷}{۲}$ ② $\frac{۹}{۲}$ ③ ۴ ④ ۵

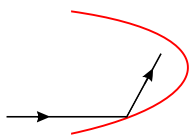
۱۳۳ – در یک بیضی دو سر کوتاه‌ترین وتر کانونی و کانون دیگر تشکیل یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌دهند. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

① $\frac{۱}{۲}$ ② $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ③ $\frac{۱}{۳}$ ④ $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۱۳۴ – معادلهٔ خط هادی سهمی با معادلهٔ $(y+۲)^۲=-۳۲(x-۵)$ کدام است؟

① $x=-۲$ ② $x=-۳$ ③ $x=۱۰$ ④ $x=۱۳$

۱۳۵ – مطابق شکل بر سهمی به معادلهٔ $y^۲=۴(y-x)$ شعاع نوری با معادلهٔ $y=-۶$ می‌تابد. اگر معادلهٔ پرتو بازتاب به‌صورت $ax+by+c=۰$ باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟



① ۲۳ ② ۵۳ ③ ۲۲ ④ ۵۲

۱۳۶ – خط d و نقطهٔ A به فاصلهٔ h واحد از خط d در یک صفحه مفروض‌اند. اگر فقط سه نقطه از صفحه وجود داشته باشد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۸ واحد و از خط d به فاصلهٔ ۶ واحد باشند. آن‌گاه مقدار h کدام است؟

① ۴ ② ۳ ③ ۲ ④ ۱

۱۳۷ – نقطهٔ A و خط d در یک صفحه مفروض‌اند. چند نقطه در این صفحه یافت می‌شود که از A به فاصلهٔ معلوم K و از d به فاصلهٔ معلوم K' باشد؟

① ۴ ② ۲ ③ حداکثر ۴ ④ حداکثر ۲

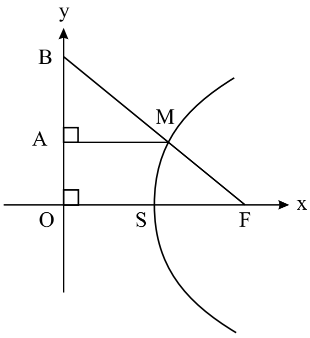
۱۳۸ - دو دایرهٔ $C_1 : x^2+y^2-4x-2y+1=0$ و $C_2 : x^2+y^2-12x-2y+36=0$ مفروض‌اند. معادلهٔ دایره‌ای که بر دایره‌های C_1 و C_2 مماس خارج بوده و مرکز آن روی خط‌المرکزین این دو دایره قرار داشته باشد، کدام است؟

(۱) $(x-\frac{7}{2})^2+(y-1)^2=1$ (۲) $(x-\frac{7}{2})^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$ (۳) $(x-\frac{9}{2})^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$ (۴) $(x-\frac{9}{2})^2+(y-1)^2=1$

۱۳۹ - F و F' کانون‌های یک بیضی به طول قطر کوچک ۶ هستند. دایره‌ای به قطر FF'، بیضی را در چهار نقطه قطع کرده است. اگر M یکی از این چهار نقطه باشد، حاصل $MF' \times MF$ کدام است؟

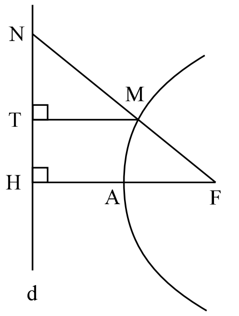
(۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۲۴ (۴) ۳۶

۱۴۰ - اگر سهمی مقابل به معادلهٔ $y^2=4(x-1)$ باشد، حاصل $\dfrac{OA\times FB}{AB}$ کدام است؟



(۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) $\frac{3}{2}$

۱۴۱ - در شکل مقابل اگر F کانون سهمی بوده و A رأس سهمی و خط d، خط هادی باشد به طوری که $3NT=4TH$ نسبت $\dfrac{AH}{FN}$ چند برابر $\frac{1}{8}$ است؟



(۱) ۱ (۲) ۲
(۳) ۳ (۴) ۴

۱۴۲ - خط d و نقطهٔ A واقع بر آن مفروض‌اند. مکان هندسی مراکز دایره‌هایی در صفحه که در نقطهٔ A بر خط d مماس هستند، کدام است؟

(۱) دو خط عمود بر هم (۲) دو خط موازی (۳) یک خط (۴) یک دایره

۱۴۳ - شعاع دایره‌ای که مرکز آن نقطهٔ $O(2,0)$ بوده و بر دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-2x+2y+1=0$ مماس بیرونی باشد، کدام است؟

(۱) $2-\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{2}-1$ (۳) $\sqrt{3}-1$ (۴) $2-\sqrt{2}$

۱۴۴ - اگر $\vec{a}=2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=(3,1,-1)$ و $r=2$ باشد، بردار $r\vec{b}-\vec{a}$ را به‌دست آورید.

۱۴۵ - اگر $\vec{a}=(-1,-3,0)\ ,\ \vec{b}=(3,-4,2)\ ,\ \vec{c}=(-1,1,4)$ باشند آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را بدست آورید.

۱۴۶ - برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند اگر و فقط اگر $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

۱۴۷ - بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به‌طوری که $|\vec{a}|=3\ ,\ |\vec{b}|=26\ ,\ |\vec{a}\times\vec{b}|=72$ مقدار $\vec{a}\cdot\vec{b}$ را محاسبه کنید.

۱۴۸ - مساحت متوازی‌الاضلاعی که توسط بردارهای $\vec{a}=(1,0,1)$ و $\vec{b}=(0,1,1)$ تولید می‌شود را به‌دست آورید.

۱۴۹ - اگر $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{k}$ و $\vec{b}=(1,2,1)$ باشد، طول بردار $\vec{a}-2\vec{b}$ را به‌دست آورید.

۱۵۰ - ثابت کنید: دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی هستند اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

۱۵۱ - مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a}=(1,m,-11)$، $\vec{b}=(2,3,-1)$ و $\vec{c}=(1,-1,3)$ در یک صفحه باشند.

۱۵۲ - اگر طول بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به‌ترتیب ۴ و ۶ و $\vec{a}\cdot\vec{b}=12$ باشد، مساحت مثلث بنا شده توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به‌دست بیاورید.

۱۵۳ - ثابت کنید اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک راستا باشند، آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}$، برابر خود $\vec{a}$ می‌شود.

۱۵۴ - مقدار b و a را چنان بیابید که نقاط $A(1,2a-1,-2)$، $B(b-1,a-b,4)$ و $C(1,2,1)$ تشکیل مثلث ندهند.

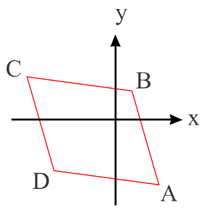
۱۵۵ - بردار $\vec{a}'$ قرینهٔ بردار $\vec{a}(3,-1,-2)$ نسبت به محور yها و بردار $\vec{b}'$ قرینهٔ بردار $b(m_1,n_1-1)$ نسبت به محور xهاست. اگر b' در امتداد a' باشد، اندازهٔ بردار $a'+2b'$ کدام است؟

۱۵۶ - اگر بردار a' تصویر قائم بردار a در امتداد بردار b باشد، ثابت کنید:

$$a' = \frac{a \cdot b}{|b|^2} b$$

۱۵۷ - فرض کنید $A(2,-1,1)$، $B(3,2,-1)$ و M نقطه‌ای در فضا باشد به طوری که $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = \frac{7}{2}$ فاصلهٔ نقطهٔ M تا وسط پاره‌خط AB را به دست آورید.

۱۵۸ - در لوزی مقابل به ضلع ۴، حاصل $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$ را به‌دست آورید.

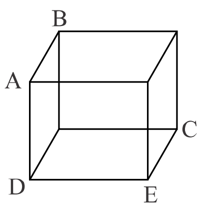


۱۵۹ - فرض کنید زاویهٔ بین دو بردار a و b حاده بوده و $|a| = 2$ و $|b| = \sqrt{2}$ باشد. اگر $|2a+b|^2 = 12a \cdot b$، اندازهٔ تصویر قائم بردار a در امتداد بردار b را به‌دست آورید.

۱۶۰ - فرض کنید $a = (m,-1,1)$، $b = (1,n,2)$ و $a \cdot b = 3$ مقدار n,m را طوری به‌دست آورید که $|a+b| = 3\sqrt{2}$ باشد.

۱۶۱ - در مکعب مقابل طول یال‌ها برابر $3\sqrt{2}$ است. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید:الف) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$

ب) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE}$



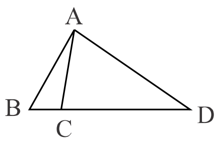
۱۶۲ - اگر $8x+15y+z=3$، کمترین مقدار عبارت $16x^2+25y^2+2z^2$ را به‌دست آورید.

۱۶۳ - اگر $9a^2+3b^2+c^2=3$، بیشترین مقدار $|3a-b+2c|$ را به‌دست آورید.

۱۶۴ - کسینوس زاویهٔ بین دو قطر یک مستطیل به اضلاع ۶ و ۱۰ را به‌دست آورید.

۱۶۵ - با توجه به شکل مقابل درستی و نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید:الف) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} > \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$

ب) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} > \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$



۱۶۶ - سه نقطهٔ $A(1,2,-1)$ و $B(3,1,2)$ و $C(-1,4,1)$ مفروضند. مساحت متوازی‌الاضلاعی که دو ضلع مجاور آن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ باشند، چقدر است؟

۱۶۷ - اگر $a+b+c=\bar{0}$، ثابت کنید: $a \times b = b \times c = c \times a$

۱۶۸ - نشان دهید که اگر دو بردار a و b در یک راستا باشند، آنگاه تصویر a بر b برابر خود a است.

۱۶۹ - الف) اگر دو بردار غیر صفر a و b موازی باشند، ثابت کنید: $a \times b = \bar{0}$

ب) اگر برای دو بردار غیر صفر a و b داشته باشیم $a \times b = \bar{0}$ ثابت کنید $a \parallel b$.

۱۷۰ - برداری عمود بر دو بردار $b = (-2,1,-5)$ و $a = (1,-3,2)$ پیدا کنید.

۱۷۱ - بردارهای a و b مفروض‌اند. به‌طوری که $|a| = 3$، $|b| = 26$ و $|a \times b| = 72$، مقدار $a \cdot b$ را محاسبه کنید.

۱۷۲ - برای هریک از بردارهای a و b که در زیر آمده است تصویر قائم a را در امتداد بردار b به‌دست آورید.

الف) $a=(۲,-۱,۲)$, $b=i$

ب) $a=(۲,۳,۱)$, $b=(۳,۲,۱)$

ج) $a=(۱,۱,۰)$, $b=(-۱,۲,۴)$

۱۷۳ - فرض کنید c,b,a به‌ترتیب بردارهایی به طول ۲، ۱ و ۳ باشد با این خاصیت که $a+b+c=\bar{۰}$، مقدار $a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a$ را محاسبه کنید.

۱۷۴ - اگر i و j و k بردارهای واحد باشند حاصل $\vec{k}\times(\vec{i}\times(\vec{i}\times\vec{j}))$ کدام است؟

① ۰ ② $-i$ ③ j ④ $-k$

۱۷۵ - بردارهای a,b و c با شرط $(a-c)\times b=a\times c$ مفروض‌اند. الزاماً کدام نتیجه حاصل می‌شود؟

① $a\cdot(b\cdot c)=۰$ ② $a\cdot(b\times c)=۰$ ③ $a\times(b\times c)=۰$ ④ هر سه بردار موازی‌اند.

۱۷۶ - سه نقطه $A(۲,۱,۰)$، $B(۳,-۱,۲)$ و $C(-۱,۱,۳)$، رأس‌های مثلثی هستند. $\cos A$ کدام است؟

① $\frac{\sqrt{۲}}{۶}$ ② $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ③ $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ ④ $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۱۷۷ - دو بردار با تصاویر $a=(۱,-۲,۳)$ و $b=(۲,۱,-۱)$ مفروض هستند. حجم متوازی السطوح که بر روی سه بردار a، b و $a\times b$ ساخته شود، کدام است؟

① ۵۴ ② ۷۲ ③ ۷۵ ④ ۸۰

۱۷۸ - بر روی دو بردار $a=۳i+۳j$ و $b=i-j-۲k$ متوازی الاضلاعی ساخته شده است. کسینوس زاویه ی بین دو قطر این متوازی الاضلاع کدام می باشد؟

① $\frac{۱}{۴}$ ② $\frac{۱}{۳}$ ③ $\frac{۱}{۲}$ ④ $\frac{۲}{۳}$

۱۷۹ - نقاط $A(۵,-۴,۱)$, $B(-۱,۲,۴)$ و $O(۰,۰,۰)$ مفروض هستند $\overrightarrow{AM}=\frac{۲}{۳}\overrightarrow{AB}$، مقدار $\left|\overrightarrow{OM}\right|$ کدام است؟

① $\sqrt{۱۰}$ ② $\sqrt{۱۱}$ ③ $\sqrt{۱۳}$ ④ $\sqrt{۱۴}$

۱۸۰ - نقطه O مبداء مختصات و $\overrightarrow{OA}=۳i+j$ و $\overrightarrow{OB}=-i+۵j+۴k$ مفروض هستند. اگر $\overrightarrow{AM}=-\frac{۳}{۴}\overrightarrow{AB}$ باشد، کسینوس زاویه بردار $\overrightarrow{OM}$ با محور yها کدام است؟

① $-\frac{۲}{۵}$ ② $-\frac{۲}{۷}$ ③ $\frac{۲}{۵}$ ④ $\frac{۳}{۷}$

۱۸۱ - سه بردار $V_۱=(۱,-۱,a)$, $V_۲(۲,b,۱)$ و $V_۳=(c,۳,۲)$ ، دو به دو عمود بر هم هستند. $a+b+c$ کدام است؟

① ۵ ② ۶ ③ ۷ ④ ۸

۱۸۲ - چهار بردار a,b,c و d در دو رابطه $a\times c=d\times b$ و $a\times d=c\times b$ صدق می‌کنند، الزاماً دو بردار غیر صفر $a+b$ و $c+d$ نسبت به هم، کدام وضع را دارند؟

① مساوی ② قرینه ③ عمود ④ موازی

۱۸۳ - با فرض $a=(۳,m,۵)$ و $b=(۳-m,۷,۰)$ ، به ازای یک مقدار m دو بردار $a+b$ و $a-b$ عمود بر هم هستند. زاویه بین دو بردار a و b در این حالت، چند درجه است؟

① ۳۰ ② ۴۵ ③ ۶۰ ④ ۹۰

۱۸۴- دو بردار a و b با معلومات $|a|=5$ و $|b|=7$ و $a-b=2i+j-3k$ مفروض‌اند. تصویر قائم بردار b بر روی بردار a، چند برابر بردار a است؟

① $0/7$ ② $0/8$ ③ $1/2$ ④ $1/4$

۱۸۵- تصویر بردار $\vec{a}=7i+3j-\sqrt{2}\,k$، بر روی برداری که با هر یک از محورهای x و y زاویه‌ی 60 درجه و با محور zها زاویه‌ی حاده می‌سازد. با کدام مؤلفه‌ها است؟

① $(1,1,\sqrt{2})$ ② $(2,2,2\sqrt{2})$ ③ $(2,2,2\sqrt{3})$ ④ $(3,3,\sqrt{3})$

۱۸۶- به ازای کدام مقدار m، بردار $a=(-3,10,m)$ برابر مجموع دو بردار هم‌راستا با بردارهای $(3,1,2)$ و $(1,4,-2)$ است؟

① -10 ② -8 ③ 9 ④ 11

۱۸۷- اگر $a=(2,-3,1)$، $b=(1,2,-4)$ باشند، حجم متوازی‌السطوحی که بر روی سه بردار a و b و $a\times b$ ساخته شود کدام است؟

① 225 ② 230 ③ 245 ④ 250

۱۸۸- بین سه بردار c و b و a رابطهٔ $(a\times b)+(b\times c)+(c\times a)=0$ برقرار است. وضعیت این سه بردار نسبت به هم چگونه است؟

① موازی هم ② منطبق بر هم ③ واقع در یک صفحه ④ دو به دو عمود بر هم

۱۸۹- اگر $a=2i-j+k$ و $b=j-k$ باشند، مساحت مثلثی که بر روی دو بردار $a\times b$ و $a+2b$ ساخته شود، کدام است؟

① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ 3 ④ $2\sqrt{3}$

۱۹۰- به‌ازای کدام مقدار m، سه بردار $\vec{a}=(-1,2,3)$، $\vec{b}=(2,0,1)$ و $\vec{c}=(-4,m,5)$ در یک صفحه‌اند؟

① -2 ② 2 ③ 3 ④ 4

۱۹۱- اگر $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=4\vec{i}+\vec{k}$ باشند، حجم متوازی‌السطوحی که بر روی سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ ساخته شود، کدام است؟

① 156 ② 169 ③ 174 ④ 189

۱۹۲- اگر سه نقطه $(0,2,1)$ و $(1,-1,2)$ و $(2,a,b)$ در یک راستا باشند $a+b$ کدام است؟

① 2 ② 1 ③ -1 ④ 0

۱۹۳- مساحت متوازی‌الاضلاع که بر روی دو بردار به تصاویر $a=(2,-1,3)$ و $b=(4,0,-1)$ ساخته شود کدام است؟

① $\sqrt{183}$ ② $\sqrt{197}$ ③ $\sqrt{213}$ ④ $\sqrt{221}$

۱۹۴- اگر a و b و c سه بردار غیر صفر و غیر واقع در یک صفحه باشند حاصل $a\cdot(b\times c)$ برابر کدام است؟

① $a\times(b\cdot c)$ ② $b\cdot(a\times c)$ ③ $b\cdot(c\times a)$ ④ $c\cdot(b\times a)$

۱۹۵- مساحت مثلثی با رأس‌های $(2,0,4)$, $(0,3,1)$, $(-2,3,0)$ کدام است؟

① $3\sqrt{7}$ ② $\frac{1}{2}\sqrt{58}$ ③ $\frac{3}{2}\sqrt{5}$ ④ $\frac{1}{2}\sqrt{61}$

۱۹۶- به ازای کدام مقدار m سه بردار $(1,0,1),(0,1,1),(m,-1,2)$ در یک صفحه هستند؟

① 3 ② 2 ③ 1 ④ 0

۱۹۷- بر روی دو بردار $a=i-2j+k$, $b=2i+3j-k$ متوازی الاضلاع ساخته شده است، اندازه قطر بزرگتر آن کدام است؟

① $\sqrt{10}$ ② $\sqrt{20}$ ③ $\sqrt{26}$ ④ $\sqrt{30}$

۱۹۸- اگر دو بردار $a=(1,2,-3)$, $b=(-2,4,m)$ عمود بر هم باشند اندازه بردار $b+a$ کدام است؟

① $\sqrt{38}$ ② $\sqrt{35}$ ③ $\sqrt{34}$ ④ $\sqrt{33}$

۱۹۹- تصویر قائم بردار $a=2i+j-4k$ بر امتداد بردار $b=-i+2k$ کدام است؟

① $(2,0,-4)$ ② $(-2,0,4)$ ③ $(2,1,-4)$ ④ $(-2,1,4)$

۲۰۰- اگر $|a| = ۱, |b| = ۲$ و زاویه بین a و b برابر ۶۰° باشد، زاویه بین بردارهای $a - b$ و $۲a + b$ کدام است؟

① ۳۰° ② ۶۰° ③ ۱۲۰° ④ ۱۵۰°

۲۰۱- اگر نقطه $A(m+۱, m-۱, m^۲+۴m+۳)$ روی فصل مشترک دو صفحه xoz, xoy واقع باشد m چند مقدار مختلف می تواند داشته باشد؟

① ۰ ② ۱ ③ ۲ ④ بی شمار.

۲۰۲- مقدار $a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c$ را بیابید اگر داشته باشیم $|a| = |b| = |c| = ۵$ و $a + b + c = ۰$ باشد.

① $\frac{۷۵}{۲}$ ② $\frac{-۷۵}{۲}$ ③ $\frac{۱۵}{۲}$ ④ $\frac{-۱۵}{۲}$

۲۰۳- اگر از ضرب درونی دو بردار داشته باشیم $a + ۲b + ۲c = ۹$ آنگاه کمترین مقدار $a^۲ + b^۲ + c^۲$ کدام است؟

① ۹ ② ۱۳ ③ $\frac{۹}{۲}$ ④ $\frac{۹}{۴}$

۲۰۴- اگر سه بردار $a = i + ۲j + k$ و $b = \alpha i + j + ۳k$ و $c = ۲i + \beta j + k$ در رابطه‌ی $a \times b = a \times c$ صدق کنند حاصل $\alpha + \beta$ کدام است؟ (با فرض $b \neq c$)

① ۰ ② -۱ ③ ۱ ④ ۲

۲۰۵- بردار $u\left(m^۲ + m, ۱, m + ۱\right)$ فقط بر محور x ها عمود است طول تصویر آن روی xoz کدام است؟

① ۰ ② ۱ ③ $\sqrt{۲}$ ④ ۲

۲۰۶- اندازه جبری تصویر بردار $w(a - ۲b, ۲a, b + a)$ بر محور y ها کدام است وقتی بردار $\vec{u}(a + ۲b, b - ۱, a)$ بر صفحه‌ی xoy عمود باشد؟

① ۲ ② -۲ ③ ۴ ④ -۴

۲۰۷- فاصله‌ی A تا محور y ها کدام باشد وقتی فاصله $A(m, ۱, ۱)$ تا صفحه‌ی yoz مساوی ۲ است؟

① $\sqrt{۳}$ ② $\sqrt{۲}$ ③ $\sqrt{۵}$ ④ $\sqrt{۶}$

۲۰۸- حجم متوازی السطوحی که روی سه بردار به اندازه‌های $|a| = ۵$, $|b| = ۳$, $|c| = ۴$ بنا می‌شود برابر ۴۵ است. اگر اندازه‌ی زاویه‌ی بین دو بردار b و c برابر ۶۰° باشد، اندازه‌ی بردار $a \times (b \times c)$ کدام است؟

① $۱۲\sqrt{۳}$ ② $۱۵\sqrt{۳}$ ③ $۹\sqrt{۳}$ ④ $۹\sqrt{۳}$

۲۰۹- تصویر قائم $a = (m - ۲, -۷, ۵)$ بر $b = (۲, -۲, ۱)$، برابر $a' = (m, -m, ۳)$ است. طول a' کدام است؟

① ۶ ② ۷ ③ ۸ ④ ۹

۲۱۰- دو بردار a و b با معلومات $|a| = ۳$ و $|b| = ۷$ و $a + b = -i + ۴j + ۷k$ مفروض‌اند. مساحت متوازی‌الاضلاع بنا شده روی a و b کدام است؟

① $۵\sqrt{۱۷}$ ② ۲۰ ③ $۱۷\sqrt{۵}$ ④ ۱۷

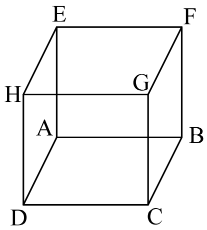
۲۱۱- اگر معادلات وجه‌های یک مکعب مستطیل به صورت $x = ۱$، $x = ۳$، $y = ۱$، $y = ۴$، $z = -۲$ و $z = ۲$ باشد، چه تعداد از موارد زیر روابط مشخص کنندهٔ یکی از وجه‌های مکعب مستطیل است؟

الف) $\begin{cases} ۱ \leq x \leq ۳ \\ -۲ \leq z \leq ۲ \\ y = ۲ \end{cases}$ ب) $\begin{cases} ۱ \leq y \leq ۴ \\ -۲ \leq z \leq ۲ \\ x = ۰ \end{cases}$ پ) $\begin{cases} ۱ \leq x \leq ۳ \\ ۱ \leq y \leq ۴ \\ z = -۲ \end{cases}$ ت) $\begin{cases} ۱ \leq x \leq ۳ \\ ۰ \leq z \leq ۲ \\ y = ۱ \end{cases}$

① ۰ ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

۲۱۲- بردار $\vec{a}=(\sqrt{۲}m, m-۲, -m)$ برداری به طول ۲ و غیرعمود بر صفحات مختصات است. m کدام است؟

① ۰ ② ۱ ③ $\frac{۱}{۴}$ ④ ۱,۰

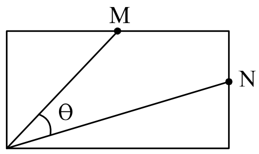


۲۱۳- در مکعب شکل مقابل کسینوس θ زاویهٔ دو بردار $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{DF}$ کدام است؟

① $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ② $\frac{۱}{۳}$ ③ $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ④ $-\frac{۱}{۳}$

۲۱۴- اگر $A=(۲,۱,-۱)$ و $B=(-۲,۳,۱)$ و M نقطهٔ متغیری در فضا باشد که $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=۴$. فاصلهٔ نقطهٔ M تا نقطهٔ $N=(۰,۲,۰)$ چقدر است؟

① ۳ ② $\sqrt{۱۰}$ ③ $\sqrt{۱۱}$ ④ $۲\sqrt{۳}$



۲۱۵- در مستطیل مقابل اگر M و N وسط اضلاع مستطیل به طول و عرض ۴ و ۲ باشد، $\cos\theta$ کدام است؟

① $\frac{۱۰}{\sqrt{۱۷}}$ ② $\frac{۵\sqrt{۳۴}}{۱۷}$

③ $\frac{۵\sqrt{۳۴}}{۳۴}$ ④ $\frac{۵\sqrt{۱۷}}{۱۷}$

۲۱۶- اگر $۳x-۲y+z=\sqrt{۵}$، آنگاه کمترین مقدار عبارت $۹x^۲+۴y^۲+z^۲$ کدام است؟

① $\frac{۵}{۳}$ ② $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ ③ $\frac{۵}{۴}$ ④ $\frac{\sqrt{۵}}{۴}$

۲۱۷- حاصل عبارت $(۲a-۳b+c)\cdot(b\times c+b\times a-a\times c)$ کدام است؟

① $۶a\cdot(b\times c)$ ② $-۲a\cdot(b\times c)$ ③ $۴a\cdot(b\times c)$ ④ ۰

۲۱۸- حجم متوازی‌السطوحی که توسط سه بردار واقع بر نیمسازهای سه صفحهٔ yoz, xoz, xoy به‌ترتیب به طول‌های $۳\sqrt{۲}, ۴\sqrt{۲}, ۵\sqrt{۲}$ با مولفه‌های غیرمنفی بنا می‌شود، کدام است؟

① ۶۰ ② ۱۲۰ ③ ۹۰ ④ ۱۸۰

۲۱۹- حجم متوازی‌السطوحی که روی سه بردار $a=۲i-k$، $b=۳i-۲j+k$ و $c=-i+j-۲k$ ساخته می‌شود، کدام است؟

① ۵ ② ۱۰ ③ ۶ ④ ۸

۲۲۰- نقاط $A=(m+۱,۱,-۲)$ و $B=(m,-۱,۱)$ مفروض‌اند. اگر $|OB|>|OA|>|AB|$، آنگاه حدود تغییرات m به کدام صورت است؟ (O مبدأ مختصات است.)

① $m<-۲, m>۲$ ② $-۴<m<۲$ ③ $-۲<m<۲$ ④ $m<-۴, m>۲$

پاسخنامه تشریحی

۱ -

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۲ & ۴ & ۱\\ ۳ & ۶ & ۹\end{bmatrix}$$

$$۲A-۳I=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & -۲\\ ۴ & ۸ & ۲\\ ۶ & ۱۲ & ۱۸\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۳ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & -۲\\ ۴ & ۵ & ۲\\ ۶ & ۱۲ & ۱۵\end{bmatrix}$$

۲ -

$$||A|\cdot A|=|-۲A|=(-۲)^{۳}|A|=-۸\times(-۲)=۱۶$$

۳ -

$$\begin{bmatrix}x & y\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}۴x+۳y & ۳x+۴y\\ ۵ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴x+۶ & ۴y-۳\\ ۳x+۸ & ۳y-۴\end{bmatrix}$$

$$۳x+۸=۵\rightarrow x=-۱\quad,\quad ۳y-۴=۲\rightarrow y=۲$$

$$\begin{bmatrix}x & ۲ & -y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ ۲\\ -x\end{bmatrix}\xlongequal{x=-۱\ ,\ y=۲}\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ ۲\\ ۱\end{bmatrix}=-۲+۴-۲=۰$$

۴ -

$$\begin{vmatrix}m-۳ & ۳\\ ۴ & m+۱\end{vmatrix}\neq۰\rightarrow(m-۳)(m+۱)-۱۲\neq۰\rightarrow m\neq۵\ ,\ m\neq-۳$$

$$m\in\mathbb{R}-\{۵,-۳\}$$

۵ -

شرط جواب نداشتن : $\dfrac{m}{۴}=\dfrac{۳}{m+۴}\neq\dfrac{-۳}{۲}\rightarrow m(m+۴)-۱۲=۰\rightarrow\begin{cases}m=-۶ & \text{(غیر قابل قبول)}\\ m=۲ & \text{(قابل قبول)}\end{cases}$

۶ -

$$A=B\Rightarrow\begin{bmatrix}۳ & ۲x+y\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲x & ۵\\ z & ۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲x=۳\rightarrow x=\frac{۳}{۲}\\ ۲x+y=۵\rightarrow y=۲\rightarrow x+y+z=\frac{۳}{۲}\\ z=-۲\end{cases}$$

۷ -

نکته: اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ باشد، در این صورت وارون ماتریس A یعنی $A^{-۱}$ از تساوی زیر بدست می‌آید:

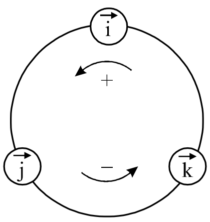
$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\times\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

$$|A|=۲\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۱ & ۳\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}۳ & -۴\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\ ۲\end{bmatrix}\Rightarrow x=۳,y=۲$$

۸ -

مطابق شکل زیر $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$ است.



$$\vec{i}\cdot(\underbrace{\vec{j}\times\vec{k}}_{\vec{i}})=\vec{i}\cdot(\vec{i})=|\vec{i}|^{۲}=۱$$

۹ -

$$A=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۲۵ & ۱۱\end{bmatrix}\to |AB|=۲۲\quad (۱)$$

$$\begin{matrix}|A|=۸+۳=۱۱\\ |B|=۶-۴=۲\end{matrix}\to |AB|=۱۱\times ۲=۲۲\qquad (۲)$$

$$(۱)\ ,\ (۲)\to |AB|=|A|\ |B|$$

۱۰ -

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\qquad |A|^۲-۵|A|+۶=۰\to (|A|-۲)(|A|-۳)=۰$$

$$\to |A|=۲\xrightarrow[c=۱,d=۴]{a=۱,b=۲}\begin{vmatrix}۱ & ۲\\ ۱ & ۴\end{vmatrix}=۴-۲=۲$$

یا

$$|A|=۳\xrightarrow[c=۳,d=۳]{a=۲,b=۱}\begin{vmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۳\end{vmatrix}=۶-۳=۳$$

۱۱ -

$$||A|\,A|\overset{|A|=۵}{=\!=\!=}|۵A|=۱۲۵\underbrace{|A|}_{۵}=۶۲۵$$

۱۲ -

$$-۲A^۲+A=I\to A(-۲A+I)=I\to |A|\,|I-۲A|=|I|$$

$\to |A|\,|I-۲A|=۱\to |A|\neq ۰\to$ A وارون‌پذیر است.

$$A(I-۲A)=I\to A^{-۱}=I-۲A$$

۱۳ - باید ضرب $(I+\frac{m}{۱-m}A)$ و $(I-mA)$ برابر I شود.

$$(I-mA)(I+\frac{m}{۱-m}A)=I+\frac{m}{۱-m}A-mA-\frac{m^۲A^۲}{۱-m}$$

$$=I+\frac{m-m(۱-m)-m^۲}{۱-m}A=I+\frac{۰}{۱-m}A=I$$

به‌همین ترتیب ثابت می‌شود $(I+\frac{m}{۱-m}A)(I-mA)$ هم برابر I می‌شود.

۱۴ -

الف) $AB=I\to |AB|=|I|\to |A|\,|B|=۱\to |A|\neq ۰$

پس A وارون‌پذیر است.

ب)

$$AB=I\xrightarrow{\text{ضرب در } A^{-۱}}A^{-۱}(AB)=A^{-۱}I$$

$$\to (A^{-۱}A)B=A^{-۱}\to IB=A^{-۱}\to B=A^{-۱}$$

۱۵ - گزینه ۲ ابتدا ماتریس A را می‌سازیم:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۲ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}۹ & ۸ & ۸\\ ۸ & ۹ & ۸\\ ۸ & ۸ & ۹\end{bmatrix}$$

$$A^۲-۴A=\begin{bmatrix}۹ & ۸ & ۸\\ ۸ & ۹ & ۸\\ ۸ & ۸ & ۹\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۴ & ۸ & ۸\\ ۸ & ۴ & ۸\\ ۸ & ۸ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۵ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۵\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲-۴A$ برابر ۱۵ است.

۱۶ - گزینه ۱ ماتریس C برابر $\begin{bmatrix}۱ & ۳ & ۶ & ۲۴\\ \frac{۱}{۳} & ۱ & ۲ & ۸\\ \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۴\\ \frac{۱}{۲۴} & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۴} & ۱\end{bmatrix}$ است پس فقط لازم است درایه‌های قطر اصلی C را محاسبه کنیم.

$$C^2 = C \times C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & \times & \times & \times \\ \times & 4 & \times & \times \\ \times & \times & 4 & \times \\ \times & \times & \times & 4 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C^2 برابر $16 = 4 \times 4$ است. پس گزینهٔ ۱ درست است.

۱۷ - گزینه ۳ حاصل دترمینان را با بسط دادن نسبت به سطر اول محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} 0 & x-3 & x-2 \\ x+3 & 0 & -4 \\ x+2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -(x-3)(4x+8) + (x-2)(6x+18) = 0$$

$$\Rightarrow -4x^2 - 8x + \cancel{12x} + 24 + 6x^2 + 18x - \cancel{12x} - 36 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 10x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -6$$

پس گزینهٔ ۳ درست است.

۱۸ - گزینه ۱

$$[x \quad 2x \quad -1]_{1\times 3} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix}_{3\times 1} = 0$$

$$\Rightarrow [11x-1 \quad -x-2 \quad -3x]_{1\times 3} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix}_{3\times 1} = 0$$

$$\Rightarrow [11x^2 - x - 2x^2 - 4x + 3x] = 0 \Rightarrow 9x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(9x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{9} \end{cases}$$

۱۹ - گزینه ۲

ـ نکته: اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $\lvert A\rvert \neq 0$
آهنگ وارون ماتریس A از دستور
$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ حاصل می‌گردد.
ـ نکته: اگر A وارون‌پذیر باشد، آنگاه $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

$$AX = A - 2I \xrightarrow[\text{از چپ}]{\text{طرفین} \times A^{-1}} A^{-1}AX = A^{-1}(A - 2I) \Rightarrow IX = A^{-1}A - 2A^{-1}I$$

$$\Rightarrow X = I - 2A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \times \frac{1}{6-4}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

۲۰ - گزینه ۴

نکته: اگر A ماتریس مربعی $n \times n$ و k
عددی حقیقی باشد، آنگاه $\lvert kA\rvert = k^n \lvert A\rvert$

$$\big\lvert \lvert A\rvert A \big\rvert = \lvert 4A\rvert = 4^3 \lvert A\rvert = 4^3 \times 4 = 4^4 = 256$$

۲۱ - گزینه ۲

$$\begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \times \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 2x - 1 + 4y & -2x + 4 \\ 4 + 3 + y & -4 + 1 \end{bmatrix}$$

درایه‌های خارج قطر اصلی باید صفر باشند یعنی:

$$\begin{cases} -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ 7 + y = 0 \Rightarrow y = -7 \end{cases}$$

۲۲ - گزینه ۱ نکته: **وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ از دستور** $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ **حاصل می‌شود.**

$$AX = B \xrightarrow[\text{از چپ}]{\times A^{-1}} \underbrace{A^{-1}A}_{I}X = A^{-1}B \xrightarrow{IX = X} X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{-4+3}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = -1 \times \begin{bmatrix} -2 & -13 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$$

۲۳ - گزینه ۴

$$\left|\begin{matrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۳ & ۰ & ۵ \\ -۲ & ۶ & ۱ \end{matrix}\right| \underbrace{\begin{matrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۰ \\ -۲ & ۶ \end{matrix}}_{\text{دو ستون اول}} = (۰ + ۱۰ + ۷۲) - (-۳ + ۶۰ + ۰) = ۲۵$$

۲۴ - گزینه ۴

$$C = A + B = [i^۲ - i + j^۲ - i + ۱]_{۳\times۳} = [i^۲ - ۲i + ۱ + j^۲]_{۳\times۳} = [(i-۱)^۲ + j^۲]_{۳\times۳}$$

$$C_{۱۱} = (۱-۱)^۲ + ۱ = ۱\,,\ C_{۲۲} = (۲-۱)^۲ + ۲^۲ = ۵$$

$$C_{۳۳} = (۳-۱)^۲ + ۳^۲ = ۱۳$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C، برابر ۱۹ است.

۲۵ - گزینه ۲

$$X = A^۲ + AB + ۲B = A(A+B) + ۲B$$

اما $A + B = ۲I$، بنابراین داریم:

$$X = A(۲I) + ۲B = ۲A + ۲B = ۲(A+B) = ۲(۲I) = ۴I$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow X \text{ مجموع درایه‌های } = ۱۲$$

۲۶ - گزینه ۱

$$A^۲ = \begin{bmatrix} -۱ & -\sqrt{۳} \\ \sqrt{۳} & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & -\sqrt{۳} \\ \sqrt{۳} & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix} = -۲I$$

$$A^۲ = -۲I \xrightarrow{\text{طرفین به توان } ۱۰} A^{۲۰} = (-۲)^{۱۰} I \to A^{۲۰} = ۱۰۲۴I$$

۲۷ - گزینه ۴

$$۲A + \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹ & ۴ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix} \to ۲A = \begin{bmatrix} ۶ & ۴ \\ -۲ & ۰ \end{bmatrix} \to A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ & ۶ \\ -۳ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$A^۲ - ۳A = \begin{bmatrix} ۷ & ۶ \\ -۳ & -۲ \end{bmatrix} - ۳\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۷ & ۶ \\ -۳ & -۲ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۹ & ۶ \\ -۳ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix} \to |A^۲ - ۳A| = ۴$$

۲۸ - گزینه ۲

$$۲A - B = ۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$(۲A - B) \times B = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ستون اول $= -۴ + ۲ = -۲$

۲۹ - گزینه ۴

$$۲A - ۳B = ۲\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} - ۳\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & \boxed{۴} \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix} \to a_{۱۲} = ۴$$

۳۰ - گزینه ۱

$$A = [i^۲ - j]_{۳\times۳} = \begin{bmatrix} ۱^۲-۱ & ۱^۲-۲ & ۱^۲-۳ \\ ۲^۲-۱ & ۲^۲-۲ & ۲^۲-۳ \\ ۳^۲-۱ & ۳^۲-۲ & ۳^۲-۳ \end{bmatrix}_{۳\times۳} = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۸ & ۷ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$|A| = -(-۱)\underbrace{\begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ ۸ & ۶ \end{vmatrix}}_{۱۰} + (-۲)\underbrace{\begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ ۸ & ۷ \end{vmatrix}}_{۵}$$

$$|A| = ۱۰ - ۱۰ = ۰$$

۳۱ - گزینه ۳ **با توجه به این‌که می‌دانیم اگر دو سطر (یا دو ستون) مانند هم یا مضربی از هم باشند، حاصل دترمینان صفر است، در این سؤال سطر دوم ۲ برابر سطر اول است.**

بنابراین:

$$x - ۱ = ۲ \to x = ۳$$

۳۲ - گزینه ۴

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & -۱ \\ -۱ & ۴x+۵ & ۱ \\ ۲ & ۶ & ۳x+۱ \end{vmatrix} = ۰$$

با کمی دقت در صورت دترمینان متوجه می‌شویم اگر $۴x+۵=-۳$ باشد سطر اول و دوم قرینهٔ یکدیگرند و بنابراین حاصل دترمینان صفر می شود.

به همین ترتیب اگر $۳x+۱=-۲$ باشد سطر سوم ۲ برابر سطر اول می‌شود و باز هم حاصل دترمینان صفر می شود. پس داریم:

$$\begin{matrix} ۴x+۵=-۳ \to x=-۲ \\ ۳x+۱=-۲ \to x=-۱ \end{matrix} \to \text{مجموع ریشه‌ها} = -۳$$

۳۳ - گزینه ۱

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$A^۳ = \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{حدس}} A^n = \begin{bmatrix} n+۱ & -n \\ n & -n+۱ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{n=۱۰۰} A^{۱۰۰} = \begin{bmatrix} ۱۰۱ & -۱۰۰ \\ ۱۰۰ & -۹۹ \end{bmatrix}$$

۳۴ - گزینه ۲

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & a \\ ۳ & ۴ & b \\ ۷ & ۱۰ & c \end{vmatrix} = ۱\begin{vmatrix} ۴ & b \\ ۱۰ & c \end{vmatrix} - ۲\begin{vmatrix} ۳ & b \\ ۷ & c \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ ۷ & ۱۰ \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & a+۳ \\ ۳ & ۴ & b \\ ۷ & ۱۰ & c \end{vmatrix} = ۱\begin{vmatrix} ۴ & b \\ ۱۰ & c \end{vmatrix} - ۲\begin{vmatrix} ۳ & b \\ ۷ & c \end{vmatrix} + (a+۳)\begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ ۷ & ۱۰ \end{vmatrix}$$

با مقایسهٔ دو دترمینان فوق متوجه می‌شویم اختلاف این دو در عبارت $۳\begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ ۷ & ۱۰ \end{vmatrix}$ می‌باشد. پس:

$$۳\underbrace{\begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ ۷ & ۱۰ \end{vmatrix}}_{۲} = ۶$$

۳۵ - گزینه ۴

$$|A+I| = \frac{|A+I|\,|A^{-۱}|}{|A^{-۱}|} = \frac{|(A+I)A^{-۱}|}{|A^{-۱}|} = \frac{|AA^{-۱}+A^{-۱}|}{|A^{-۱}|} = \frac{|I+A^{-۱}|}{|A^{-۱}|} = \frac{-۲}{-۶} = \frac{۱}{۳}$$

$$A^{-۱}+I = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \to A^{-۱} + \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \to A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۳ & ۳ \end{bmatrix} \to |A^{-۱}| = -۶$$

۳۶ - گزینه ۱

$$\frac{|A^۲+I|}{|A+I|} = \frac{|A^۲+A^۳|}{|A+I|} = \frac{|A^۲(A+I)|}{|A+I|} = \frac{|A^۲|\,|A+I|}{|A+I|} = |A|^۲ = ۱$$

روش تستی: کافیست به‌جای $A=I$ قرار دهیم:

$$\frac{|I^۲+I|}{|I+I|} = \frac{|۲I|}{|۲I|} = ۱$$

۳۷ - گزینه ۱

$$A^{-۱}+A = I \xrightarrow[\text{در } A]{\text{ضرب طرفین}} A(A^{-۱}+A) = AI$$

$$\underbrace{AA^{-۱}}_{I} + A^۲ = A \to A^۲ - A + I = \bar{۰}$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } A+I} (A+I)(A^۲-A+I) = \bar{۰} \to A^۳ + I^۳ = ۰ \to A^۳ = -I$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳۳}} A^{۹۹} = -I \xrightarrow{\times A^۲} A^{۱۰۱} = -A^۲ = -A+I$$

۳۸ - گزینه ۴

$$A(A^{-۱}-I) = AA^{-۱} - A = I - A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & ۲ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱-a & -۲ \\ -۱ & -۴ \end{bmatrix}$$

$$\to |I-A| = ۶ \to -۴(۱-a) - ۲ = ۶$$

$$\to -۴ + ۴a - ۲ = ۶ \to ۴a = ۱۲ \to a = ۳$$

۳۹ - گزینه ۳

$$\frac{a}{a+b} = \frac{-b}{-c} \to b^۲ = ac - ab$$

۴۰ ـ گزینه ۱

$$|I-AB|=m\rightarrow\left|AA^{-1}-AB\right|=m\rightarrow\left|A(A^{-1}-B)\right|=m$$

$$\rightarrow|A|\left|A^{-1}-B\right|=m\rightarrow\left|A^{-1}-B\right||A|=m\rightarrow\left|(A^{-1}-B)A\right|=m\rightarrow|I-BA|=m$$

۴۱ ـ گزینه ۳

$$A^{-1}=4A^3\rightarrow\left|A^{-1}\right|=\left|4A^3\right|\rightarrow\frac{1}{|A|}=16|A|^3\rightarrow|A|^4=\frac{1}{16}\rightarrow|A|=\pm\frac{1}{2}$$

۴۲ ـ گزینه ۴

$$A=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}\rightarrow A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}2&-3\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-3\\-1&2\end{bmatrix}$$

$$A+A^{-1}=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&-3\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}\rightarrow\left|A+A^{-1}\right|=16$$

۴۳ ـ گزینه ۱

$$A^{-1}(B^{-1}+A^{-1})^{-1}B^{-1}=\left(B(B^{-1}+A^{-1})A\right)^{-1}$$

$$=\left((I+BA^{-1})A\right)^{-1}=(A+B)^{-1}=\left(\begin{bmatrix}1&2\\-3&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-2\\3&0\end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}^{-1}=(2I)^{-1}=\frac{1}{2}I$$

۴۴ ـ گزینه ۲

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}}_{B}A\underbrace{\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix}}_{C}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}}_{D}\rightarrow BAC=D$$

طرفین را از سمت چپ در B^{-1} و از سمت راست در C^{-1} ضرب می‌کنیم. بنابراین:

$$\underbrace{B^{-1}B}_{I}A\underbrace{CC^{-1}}_{I}=B^{-1}DC^{-1}\rightarrow A=B^{-1}DC^{-1}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\ ,\ C^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1\end{bmatrix}$$

$$A=B^{-1}DC^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A=\begin{bmatrix}1&1\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1\end{bmatrix}\rightarrow A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&2\end{bmatrix}\rightarrow|A|=\frac{2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

۴۵ ـ گزینه ۱

$$A=B+C\xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } B^{-1}}B^{-1}A=B^{-1}(B+C)=I+B^{-1}C$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } C^{-1}}B^{-1}AC^{-1}=(I+B^{-1}C)C^{-1}\rightarrow B^{-1}AC^{-1}=\underbrace{C^{-1}+B^{-1}}_{x}$$

۴۶ ـ گزینه ۴

$$A^3=5I\rightarrow A^3+8I=13I\rightarrow(A+2I)(A^2-2A+4I)=13I$$

$$\rightarrow(A+2I)^{-1}=\frac{1}{13}(A^2-2A+4I)$$

۴۷ ـ گزینه ۱ ماتریس A باید 2×2 باشد تا ضرب قابل انجام باشد. بنابراین فرض می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a+c&2b+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&5\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}2a+c=3\\2b+d=5\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a+4c&3b+4d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}3a+4c=-1\\3b+4d=2\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}2a+c=3\\3a+4c=-1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=\frac{13}{5}\\c=-\frac{11}{5}\end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} ۲b+d=۵ \\ ۳b+۴d=۲ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=\dfrac{۱۸}{۵} \\ d=-\dfrac{۱۱}{۵} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} ۸ & ۹ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{۱۳}{۵} & \dfrac{۱۸}{۵} \\ -\dfrac{۱۱}{۵} & -\dfrac{۱۱}{۵} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۹ \end{bmatrix}$$

۴۸ - گزینه ۳

$$A^{۲} = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$A^{۳} = A^{۲} \times A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \bar{O}$$

$$A^{۳} = \bar{O} \xrightarrow{\times A} A^{۴} = \bar{O} \xrightarrow{n \geq ۳} A^{n} = \bar{O}$$

$$A + A^{۲} + \underbrace{A^{۳} + A^{۴} + A^{۵}}_{\bar{O}} = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} + \bar{O} = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۷ \\ ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۴۹ - گزینه ۱

$$\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۷ & ۵ \end{bmatrix} \left(A - \begin{bmatrix} -۵ & ۳ \\ ۷ & -۴ \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ۵ & ۷ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۷ & ۵ \end{bmatrix} A - \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۷ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۵ & ۳ \\ ۷ & -۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۷ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۷ & ۵ \end{bmatrix} A - \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۷ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۷ & ۵ \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} ۵ & ۷ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ & ۷ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$$

حال از طرفین دترمینان می‌گیریم:

$$\left| \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۷ & ۵ \end{bmatrix} A \right| = \begin{vmatrix} ۶ & ۷ \\ ۳ & ۵ \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} ۴ & ۳ \\ ۷ & ۵ \end{vmatrix} \times |A| = \begin{vmatrix} ۶ & ۷ \\ ۳ & ۵ \end{vmatrix} \Rightarrow (-۱)|A| = ۹ \Rightarrow |A| = -۹$$

۵۰ - گزینه ۱

نکته: اگر A ماتریس مربعی $n \times n$ باشد و $k \in \mathbb{R}$ آنگاه:

$$۱)\ |kA| = k^{n}|A|$$
$$۲)\ |A^{n}| = |A|^{n}$$

$$|A| \xrightarrow{\text{ساروس}} (۳+۰+۶) - (-۱+۱۲+۰) = ۹ - ۱۱ = -۲$$

$$\left| \frac{۱}{۲} A^{۳} \right| = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳} |A^{۳}| = \frac{۱}{۸} |A|^{۳} = \frac{۱}{۸} \times (-۲)^{۳} = -۱$$

۵۱ - گزینه ۴

اگر دترمینان را برحسب سطر اول آن بسط دهیم، داریم:

$$-(x-a) \begin{vmatrix} a-x & x-c \\ b-x & ۰ \end{vmatrix} + (x-b) \begin{vmatrix} a-x & ۰ \\ b-x & c-x \end{vmatrix}$$

$$= -(x-a)[۰ - (x-c)(b-x)] + (x-b)[(a-x)(c-x) - ۰]$$
$$= -(x-a)(x-c)(x-b) + (x-b)(x-a)(x-c) = ۰$$

بنابراین، حاصل دترمینان به ازای تمای مقادیر حقیقی x، برابر صفر است و در نتیجه معادله بی‌شمار جواب دارد.

۵۲ - گزینه ۴

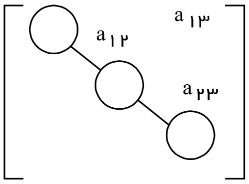
$$\begin{cases} A^{n} = A \\ \text{فرض } n = ۲ \end{cases} \rightarrow A^{۲} = A \Rightarrow A^{۲} - A = \overline{O}$$

$$\Rightarrow A(A-I) = \overline{۰} \xrightarrow[A^{-۱} \times]{\text{اگر } A \text{ وارون‌پذیر باشد}} A^{-۱}A(A-I) = A^{-۱} \times \overline{O}$$

$$\Rightarrow I(A-I) = \overline{O} \Rightarrow A - I = \overline{O} \Rightarrow A = I$$

از آنجا که با فرض مسئله $(A \neq I)$ در تناقض است، پس ماتریس A وارون ندارد.

۵۳ - گزینه ۱ از آنجا که ماتریس پایین‌مثلثی است، کافی است درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس A را مساوی صفر قرار دهیم.

A =


$$\begin{cases} a_{۱۲} = ۰ \xrightarrow{\text{ضابطه ۳}} m - ۴n + ۱ = ۰ \Rightarrow m = ۴n - ۱ \\ a_{۱۳} = ۰ \xrightarrow{\text{ضابطه ۳}} m - ۹n + ۱ = ۰ \\ a_{۲۳} = ۰ \end{cases} \Rightarrow ۴n - ۱ - ۹n + ۱ = ۰ \Rightarrow n = ۰ \Rightarrow m = -۱ \Rightarrow n - m = ۱$$

مقادیر $n = ۰$ و $m = -۱$ در $a_{۲۳} = ۰$ نیز صدق می‌کند.

۵۴ ـ گزینه ۳

$$\begin{cases} mx - x + ۳y = ۱ \\ (m+۱)x + y = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m-۱)x + ۳y = ۱ \\ (m+۱)x + y = ۳ \end{cases} \Rightarrow \frac{m-۱}{m+۱} = ۳ \neq \frac{۱}{۳}$$

بدیهی است که دستگاه بی‌شمار جواب ندارد زیرا شرط وجود بی‌شمار جواب برابر است با: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ درنتیجه گزینهٔ «۴» صحیح است.

$\frac{m-۱}{m+۱} = ۳ \Rightarrow m = -۲ \Rightarrow$ دستگاه جواب ندارد. $(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}) \Rightarrow$ گزینهٔ «۱» صحیح است.

$\frac{m-۱}{m+۱} \neq -۳ \Rightarrow m \neq -۲ \Rightarrow$ دستگاه جواب منحصر به فرد دارد. $(\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}) \Rightarrow$ گزینهٔ «۲» صحیح است.

درنتیجه گزینهٔ «۳» نادرست است زیرا اگر $m = ۱$ (یعنی $m \neq -۲$) دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

۵۵ ـ گزینه ۲

$$|A^۲| - |۲A_{۳\times۳}| + \frac{۴}{۹}|۳I_۳| = ۰ \Rightarrow |A|^۲ - ۸|A| + \frac{۴}{۹} \times ۲۷ \underbrace{|I|}_{۱} = ۰$$

$$\Rightarrow |A|^۲ - ۸|A| + ۱۲ = ۰ \Rightarrow |A| = \begin{cases} ۲ \ \text{غ ق ق} \ (|A| > ۲ \ : \text{طبق فرض}) \\ ۶ \end{cases}$$

$$\frac{|A^{-۱} + I|}{|I + A|} + |AB| \times |(۲B)^{-۱}| = \frac{\overbrace{|A^{-۱} + A^{-۱}A|}^{A^{-۱}(I+A)}}{|I + A|} + |A||B| \times \left|\frac{۱}{۲}B^{-۱}_{۳\times۳}\right| = \frac{|A|^{-۱}\,|I + A|}{|I + A|} + |A||B| \times \frac{۱}{۸}|B|^{-۱}$$

$$= |A|^{-۱} + |A| \times \frac{۱}{۸} = \frac{۱}{۶} + \frac{۶}{۸} = \frac{۲۲}{۲۴} = \frac{۱۱}{۱۲}$$

۵۶ ـ گزینه ۳ چون I و A ماتریس‌های تعویض پذیرند پس اتحادها در مورد آنها برقرار است.

$$A^۲ = ۲A - I$$
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} A^۴ = ۴A^۲ + I^۲ - ۴AI \Rightarrow A^۴ = ۴A^۲ + I - ۴A \xrightarrow{A^۲ = ۲A - I} A^۴ = ۴(۲A - I) + I - ۴A$$
$$\Rightarrow A^۴ = ۸A - ۴I + I - ۴A = ۴A - ۳I$$
$$A^۶ = A^۲ \times A^۴ = (۲A - I)(۴A - ۳I) = ۸A^۲ - ۶A - ۴A + ۳I^۲ = ۸A^۲ - ۱۰A + ۳I$$
$$\xrightarrow{A^۲ = ۲A - I} ۸(۲A - I) - ۱۰A + ۳I = ۱۶A - ۸I - ۱۰A + ۳I = ۶A - ۵I$$

در مقایسه با رابطهٔ $A^۶ = \alpha A + \beta I$ واضح است $\alpha = ۶$ و $\beta = -۵$ پس داریم: $\alpha - \beta = ۱۱$

۵۷ ـ گزینه ۲

نکته: اگر A ماتریس مربعی $n \times n$ باشد و $k \in \mathbb{Z}$ داریم:

$$۱)|KA| = K^n|A| \qquad ۲)|A^m| = |A|^m$$

ابتدا ماتریس A را می‌یابیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۴ - ۳ = ۱$$
$$|-۲A^۲| = (-۲)^۲|A^۲| = ۴|A|^۲ = ۴ \times ۱^۲ = ۴$$

۵۸ ـ گزینه ۱

$$\tan ۲\alpha = -۲ \Rightarrow \frac{\sin ۲\alpha}{\cos ۲\alpha} = -۲ \Rightarrow \sin ۲\alpha = -۲\cos ۲\alpha \quad (۱)$$

طبق فرض:

$$\begin{vmatrix} 4(\sin\alpha+\cos\alpha) & 0 & 3\cos\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 5\sin\alpha & 0 & 4(\sin\alpha-\cos\alpha) \end{vmatrix} \xlongequal{\text{بسط حول سطر دوم}} 1\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4(\sin\alpha+\cos\alpha) & 3\cos\alpha \\ 5\sin\alpha & 4(\sin\alpha-\cos\alpha) \end{vmatrix}$$

$$= 1\times 16(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)-15\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=16(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)-15\sin\alpha\cos\alpha=-16(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)-\frac{15}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$=-16\cos2\alpha-\frac{15}{2}\sin2\alpha \xlongequal{(1)} -16\cos2\alpha-\frac{15}{2}(-2\cos2\alpha)=-16\cos2\alpha+15\cos2\alpha=-\cos2\alpha$$

۵۹ -

$$O\left(\frac{4-2}{2},\frac{-1+1}{2}\right)=(1,0)\ ,|AB|=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}\to r=\sqrt{10}$$

معادلهٔ دایره: $(x-1)^2+y^2=10$

۶۰ -

شرط معادلهٔ دایره بودن: $a^2+b^2-4c>0\to 9+25-4a>0\to 4a<34\to a<\frac{17}{2}$

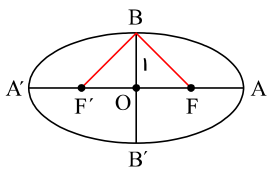
۶۱ -

$$C:x^2+y^2=4\ \ ,\ \ C':x^2+y^2-2x=4$$

$$O(0,0)\ ,\ O'(1,0)\quad r=2\ \ ,\ \ r'=\sqrt{5}$$

$OO'=\sqrt{1^2+0}=1\Rightarrow|r-r'|=\sqrt{5}-2<OO'<r+r'=\sqrt{5}+2\Rightarrow$ دو دایره متقاطع می‌باشند.<="" span="">

۶۲ -



$$a=2b\to c^2=a^2-b^2=4b^2-b^2=3b^2\to c=\sqrt{3}b$$

$$\tan B_1=\frac{OF}{OB}=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{3}b}{b}=\sqrt{3}\to B_1=60^\circ\to F\hat{B}F'=2\times60^\circ=120^\circ$$

۶۳ - با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات خواهیم داشت: سهمی رو به پایین $a=4$ ،معادلهٔ خط هادی: $y=6$، معادلهٔ سهمی: $(x-1)^2=-16(y-2)$

۶۴ -

$$\begin{cases}x+y=1\\x-y=3\end{cases}\to\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$$

$$d:4x+3y+5=0\ ,\ O(2,-1)\to r=\frac{|4(2)+3(-1)+5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{10}{5}=2$$

مرکز دایره $O(2,-1)$ و شعاع آن برابر $r=2$ است. معادله دایره برابر با $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ است.

۶۵ -

$$(x-1)^2+(y-1)^2=5\to O(1,1)$$

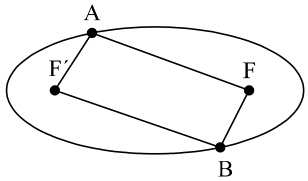
$$O(1,1)\ ,\ A(2,3)\to m_{OA}=\frac{y_A-y_o}{x_A-x_o}=\frac{3-1}{2-1}=2\xrightarrow{\text{شیب خط مماس}}m'=-\frac{1}{2}\to y-3=-\frac{1}{2}(x-2)$$

۶۶ -

خروج از مرکز: $\frac{c}{a}=\frac{3}{5}\to c=\frac{3}{5}a$ ، طول قطر کوچک: $2b=16\to b=8\xrightarrow{a^2=b^2+c^2}a^2=64+\frac{9}{25}a^2\Rightarrow a=10\ ,\ c=6$

طول قطر بزرگ $2a=20$ و فاصلهٔ کانونی $2c=12$ است.

۶۷ -



نقاط A و B را به کانون‌های بیضی وصل می‌کنیم.

نقطهٔ A روی بیضی قرار دارد بنا به تعریف بیضی $(1)\quad AF+AF'=2a$

نقطهٔ B روی بیضی قرار دارد $(2)\quad BF+BF'=2a$

از (1) و (2) و فرض $(AF'=BF)$ نتیجه می‌شود $AF=BF'$

بنابراین چهارضلعی $AFBF'$ یک متوازی‌الاضلاع است در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبرو موازی‌اند. $AF||BF'$

۶۸ - مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله باشند عمودمنصف پاره خط AB است این خط را رسم می‌کنیم و خط d می‌نامیم. مکان هندسی نقاطی که از نقطه C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشند یک دایره به مرکز C و شعاع ۳ سانتی‌متر است، این دایره را رسم می‌کنیم. محل برخورد دایره و خط d جواب مسأله است.

حالت اول: اگر خط d دایره را قطع کند مسئله ۲ جواب دارد.

حالت دوم: اگر خط d بر دایره مماس باشد مسئله ۱ جواب دارد.

حالت سوم: اگر خط d دایره را قطع نکند مسئله جواب ندارد.

۶۹ -

$$r = OM = \sqrt{(x_M - x_O)^۲ + (y_M - y_O)^۲} = \sqrt{(۱+۲)^۲ + (-۱-۳)^۲} = ۵$$

معادلهٔ دایره: $(x - x_O)^۲ + (y - y_O)^۲ = r^۲ \Rightarrow (x+۲)^۲ + (y-۳)^۲ = ۲۵$

۷۰ -

دایره: $x^۲ + y^۲ = ۲ \quad \Rightarrow$ مرکز دایره : $O(۰,۰)$ و شعاع دایره : $r = \sqrt{۲}$

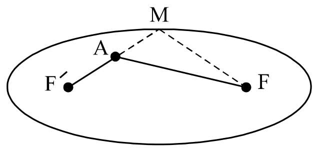
خط: $x + y - ۲ = ۰ \,,\; O(۰,۰) \Rightarrow d = \dfrac{|۱(۰) + ۱(۰) - ۲|}{\sqrt{۱+۱}} = \sqrt{۲}$

$\Rightarrow d = r = \sqrt{۲} \Rightarrow$ **خط بر دایره مماس است.**

۷۱ - پاره خط $F'A$ را ادامه می‌دهیم تا بیضی را در نقطه M قطع کند M را به F وصل می‌کنیم. نقطه M روی بیضی قرار دارد بنا به تعریف بیضی داریم: $MF' + MF = ۲a$

در مثلث $M\overset{\Delta}{A}F$ بنا به قضیه نامساوی مثلثی داریم: $AF < MA + MF$

به طرف نامساوی مقدار AF' را اضافه می‌کنیم. $AF + AF' < (MA + AF') + MF = MF' + MF$



۷۲ - با توجه به تعریف بیضی داریم:

قطر بزرگ : $۲a = ۱۰ \Rightarrow a = ۵$

قطر کوچک : $۲b = ۶ \rightarrow b = ۳$

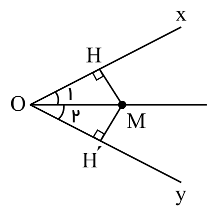
می‌دانیم:

$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow (۵)^۲ = (۳)^۲ + c^۲ \Rightarrow c = ۴$

خروج از مرکز : $\dfrac{c}{a} = \dfrac{۴}{۵}$

۷۳ -

فرض	$\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$
حکم	$MH = MH'$



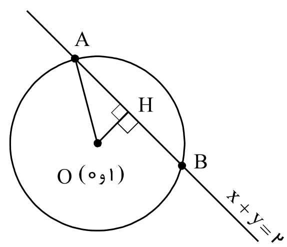
$$\left.\begin{array}{l} MO = MO \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویهٔ حاده}} M\overset{\Delta}{O}H \cong M\overset{\Delta}{O}H'$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} MH = MH'$$

۷۴ - فاصلهٔ نقطهٔ O از خط $x + y - ۲ = ۰$ را به‌دست می‌آوریم:

$$OH = \frac{|۰ + ۱ - ۲|}{\sqrt{۱^۲ + ۱^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

عمودی که از مرکز می‌گذرد وتر AB را نصف می‌کند؛ بنابراین:



$$AH = \frac{AB}{۲} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ $A\overset{\Delta}{O}H$ رابطهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$O\overset{\Delta}{A}H \;:\; AH^۲ + OH^۲ = OA^۲ \rightarrow (\sqrt{۲})^۲ + (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ = OA^۲$$

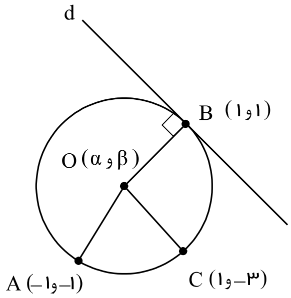
$$\rightarrow ۲+\frac{۱}{۲}=OA^۲ \rightarrow \frac{۵}{۴}=OA^۲ \rightarrow OA=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

معادلهٔ دایره به‌صورت زیر است:

$$(x-۰)^۲+(y-۱)^۲=\frac{۵}{۴}$$

۷۵ -

فاصلهٔ هریک از نقاط A، B و C تا مرکز برابر شعاع دایره است.



$$OA=OB \rightarrow \sqrt{(-۱-\alpha)^۲+(-۱-\beta)^۲}=\sqrt{(۱-\alpha)^۲+(۱-\beta)^۲}$$

$$\rightarrow (۱+\alpha)^۲+(۱+\beta)^۲=(۱-\alpha)^۲+(۱-\beta)^۲$$

$$\rightarrow \cancel{۱}+۲\alpha+\cancel{\alpha^۲}+\cancel{۱}+۲\beta+\cancel{\beta^۲}=\cancel{۱}-۲\alpha+\cancel{\alpha^۲}+\cancel{۱}-۲\beta+\cancel{\beta^۲}$$

$$\rightarrow ۴\alpha+۴\beta=۰ \rightarrow \alpha+\beta=۰ \quad (۱)$$

$$OB=OC \rightarrow \sqrt{(۱-\alpha)^۲+(۱-\beta)^۲}=\sqrt{(۱-\alpha)^۲+(-۳-\beta)^۲}$$

$$\rightarrow \cancel{۱}+\cancel{\alpha^۲}-\cancel{۲\alpha}+۱+\cancel{\beta^۲}-۲\beta=۱+\cancel{\alpha^۲}-۲\alpha+۹+\cancel{\beta^۲}+۶\beta$$

$$\rightarrow ۸\beta+۸=۰ \rightarrow \beta=-۱ \rightarrow \alpha=۱$$

مختصات مرکز $O(۱,-۱)$ $\quad R=OB=\sqrt{(۱-۱)^۲+(۱-(-۱))^۲}=۲$

معادله دایره $(x-۱)^۲+(y+۱)^۲=۴$

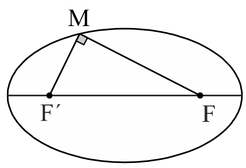
شیب‌خط مماس در نقطهٔ B (m_d) معکوس قرینه شیب BO می‌باشد.

$$m_{BO}=\frac{-۱-۱}{۱-۱}$$

بنابراین شیب‌خط مماس بر دایره در نقطهٔ B صفر است. پس معادلهٔ خط مماس به‌صورت زیر می‌باشد:

$y-۱=۰(x-۱) \rightarrow y=۱$ معادلهٔ خط مماس

۷۶ -



$$MF+MF'=۲a$$

$$\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{طرفین معادله را به توان ۲}} (MF+MF')^۲=۴a^۲$$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow MF^۲+MF'^۲+۲MF\times MF'=۴a^۲ \\ \overset{\triangle}{MFF'}\ : MF^۲+MF'^۲=FF'^۲ \rightarrow MF^۲+MF'^۲=۴c^۲ \end{array}\right\} \rightarrow ۴c^۲+۲MF\times MF'=۴a^۲$$

$$\rightarrow ۲MF\times MF'=۴(a^۲-c^۲)=۴b^۲ \rightarrow MF\times MF'=۲b^۲$$

۷۷ -

$$OF=FA=۴ \rightarrow \alpha=۴$$

$$FF'=OF+OF'=۴+۴=۸ \rightarrow ۲c=۸ \rightarrow c=۴$$

$$OA=OF+FA=۴+۴=۸ \rightarrow a=۸$$

$$a^۲=b^۲+c^۲ \rightarrow ۸^۲=b^۲+۴^۲ \rightarrow b=\sqrt{۶۴-۱۶}=\sqrt{۴۸}=۴\sqrt{۳}$$

اندازهٔ DF برابر نصف کوتاه‌ترین وتر کانونی است بنابراین:

$$DF=\frac{b^۲}{a}=\frac{(۴\sqrt{۳})^۲}{۸}=\frac{۱۶\times ۳}{۸}=۶ \rightarrow \beta=۶$$

مختصات نقطهٔ $D(4,6)$ می‌باشد.

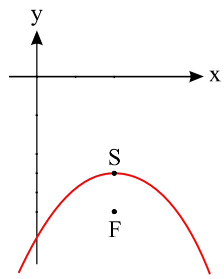
۷۸ - فاصلهٔ هر نقطه روی محور تا خط هادی برابر فاصلهٔ آن تا کانون است. بنابراین:

$$MT = MF \quad , \quad FA = AH$$

$$\left.\begin{array}{l} MT \parallel FH \to \dfrac{MT}{FH} = \dfrac{NT}{NH} \to \dfrac{MT}{2FA} = \dfrac{NT}{NH} \\ MT \parallel FH \to \dfrac{MF}{FN} = \dfrac{TH}{HN} \to \dfrac{MT}{FN} = \dfrac{TH}{NH} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{طرفین دو تساوی را بر هم}} \dfrac{\dfrac{\cancel{MT}}{2FA}}{\dfrac{\cancel{MT}}{FN}} = \dfrac{\dfrac{NT}{\cancel{NH}}}{\dfrac{TH}{\cancel{NH}}}$$

$$\to \frac{FN}{2FA} = \frac{NT}{TH} \to \frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH}$$

۷۹ -



$$\left.\begin{array}{l} F(2,-\frac{7}{2}) \\ a = 1 \end{array}\right\} \to S(2,-\frac{7}{2}+1) = (2,-\frac{5}{2})$$

سهمی قائم و دهانهٔ آن رو به پایین است بنابراین معادلهٔ آن به صورت زیر است:

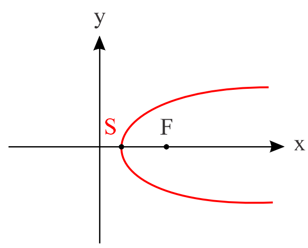
$$(x-2)^2 = -4(y-(-\frac{5}{2}))$$

$$\to (x-2)^2 = -4(y+\frac{5}{2})$$

$$\to x^2 - 4x + 4 = -4y - 10$$

$$\to x^2 - 4x + 4y + 14 = 0$$

۸۰ -



$$y^2 = 4(x-1) \to \text{سهمی افقی و دهانهٔ آن رو به راست است}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{مختصات رأس } S(1,0) \\ 4a = 4 \to a = 1 \end{array}\right\} \to F(1+1,0) = (2,0)$$

کانون سهمی مرکز دایره به شعاع ۳ واحد است. بنابراین داریم:

معادلهٔ دایره : $(x-2)^2 + (y-0)^2 = 3^2 \to (x-2)^2 + y^2 = 9$

برای به دست آوردن مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی دستگاه معادلات آن‌ها را حل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 9 - (x-2)^2 \\ y^2 = 4x - 4 \end{array}\right\} \to 9 - (x-2)^2 = 4x - 4 \to 9 - x^2 \cancel{-4} \cancel{+4x} = \cancel{4x} \cancel{-4}$$

$$\to x^2 = 9 \begin{cases} x = +3 \to y^2 = 4\times 3 - 4 = 8 \to y = \pm 2\sqrt{2} \\ x = -3 \to y^2 = 4(-3) - 4 = -16 \ \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

بنابراین مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی به صورت زیر است:

$$A(3,2\sqrt{2}) \quad , \quad B(3,-2\sqrt{2})$$

۸۱ - اوّل اینکه باید ضرایب x^2 و y^2 یکسان باشد. پس: $m = 5$

داریم:

$$5x^2 + 5y^2 + 20x - 10y + n + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 2y + \frac{n+1}{5} = 0$$

شرط اینکه دایره باشد این است که:

$$a^2 + b^2 > 4c \Rightarrow 4^2 + (-2)^2 > 4 \times \frac{n+1}{5} \Rightarrow 20 > 4 \times \frac{n+1}{5} \Rightarrow n + 1 < 25 \Rightarrow n < 24$$

۸۲ - M روی بیضی قرار دارد. داریم:

$$\begin{cases} MF+MF'=2a \\ MF-MF'=2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MF=a+b \\ MF'=a-b \end{cases} \Rightarrow MF\times MF'=(a-b)(a+b)=a^2-b^2=c^2$$

۸۳ -

$$x^2+9y^2+6xy+8x^2+8-16x=9x^2+y^2+6xy$$

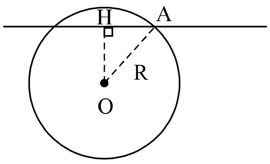
$8y^2=16x-8 \Rightarrow y^2=2x-1 \Rightarrow y^2=2(x-\frac{1}{2})$ سهمی افقی

$4a=2 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$ و $S=(h,k)=(\frac{1}{2},0)$

$$F=(h+a,k)=(1,0)$$

خط هادی : $x=h-a=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$ و محور تقارن : $y=k=0$

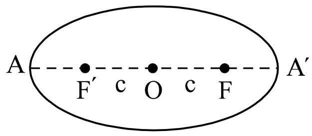
۸۴ - اگر خط L، دایره C را قطع کند، آنگاه فاصلهٔ O تا این خط کمتر از شعاع دایره می باشد: $OH\leq R$



$$OH=\frac{|3\times 3+4\times 0+c|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|9+c|}{5}\leq 1 \Rightarrow |9+c|\leq 5$$

$$\Rightarrow -5\leq 9+c\leq 5 \Rightarrow -14\leq c\leq -4$$

۸۵ - مطابق شکل، AF دورترین و $A'F$ نزدیکترین نقاط بیضی از کانون‌ها هستند. داریم:



$$AA'=2a \Rightarrow OA=OA'=a \Rightarrow AF'=A'F=a-c$$

$$\Rightarrow AF=AF'+F'F \xlongequal{AF'=a-c \text{ و } FF'=2c} a-c=a+c$$

۸۶ - سهمی افقی می‌باشد پس عرض رأس سهمی با عرض کانون برابر است . پس کانون آن $F(\alpha,1)$ می‌باشد، داریم:

$$F\in(y=-x+1) \Rightarrow 1=-\alpha+1 \Rightarrow \alpha=0 \Rightarrow F(0,1)$$

می‌دانیم که $SF=a$. داریم:

$$SF=\sqrt{(2-0)^2+(1-1)^2}=2 \Rightarrow a=2$$

همچنین از مختصات S و F می‌یابیم که دهانه سهمی به سمت چپ باز می‌شود. داریم:

معادلهٔ سهمی : $(y-1)^2=4\times(-2)(x-2) \Rightarrow (y-1)^2=-8(x-2)$

۸۷ - گزینه ۲ ابتدا معادلهٔ سهمی را استاندارد می‌کنیم:

$$2y^2+ay-3x=0 \Rightarrow 2(y^2+\frac{a}{2}y)=3x \Rightarrow (y+\frac{a}{4})^2-\frac{a^2}{16}=\frac{3}{2}x \Rightarrow (y+\frac{a}{4})^2=\frac{3}{2}x+\frac{a^2}{16}=\frac{3}{2}(x+\frac{a^2}{24})$$

معادلهٔ اخیر مربوط به یک سهمی افقی با مشخصات زیر است:

$$\begin{cases} \text{رأس} : S\left|\begin{matrix}\alpha=-\frac{a^2}{24}\\ \beta=-\frac{a}{4}\end{matrix}\right. \\ 4p=\frac{3}{2} \Rightarrow \text{پارامتر}: p=\frac{3}{8} \end{cases} \Rightarrow \text{کانون سهمی افقی}: F\left|\begin{matrix}\alpha+p=\frac{-a^2}{24}+\frac{3}{8}\\ \beta=\frac{-a}{4}\end{matrix}\right.$$

طبق فرض پرسش، کانون سهمی روی محور yها قرار دارد، پس:

$$x_F=\frac{-a^2}{24}+\frac{3}{8}=0 \Rightarrow \frac{a^2}{24}=\frac{3}{8} \Rightarrow a^2=9 \Rightarrow a=\pm 3$$

۸۸ - گزینه ۲ مطابق فرض: $F=(1,2)$ کانون و $\Delta: x=-3$ خط هادی سهمی قائم است، پس این سهمی افقی است و داریم:

$$F\left|\begin{matrix}1=\alpha+a\\ 2=\beta\end{matrix}\right. \quad , \quad \Delta: x=-3=\alpha-a \Rightarrow \begin{cases}\alpha+a=1\\ \alpha-a=-3\end{cases} \Rightarrow \alpha=-1 \ , \ a=2$$

معادله سهمی: $(y-2)^2=8(x+1)$

$$\xrightarrow{\text{در معادله سهمی } y=0 \text{ قرار می‌دهیم}} y=0 \xrightarrow{(*)} 4=8(x+1) \Rightarrow x+1=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{-1}{2}$$

۸۹ - گزینه ۱

$O\Big|_{\beta}^{\alpha} \in y=x \Rightarrow \beta=\alpha \Rightarrow O\Big|_{\alpha}^{\alpha} \Rightarrow$ معادله: $(x-\alpha)^۲+(y-\alpha)^۲=R^۲$

$A\Big|_{۳}^{۶} \in$ دایره $(۶-\alpha)^۲+(۳-\alpha)^۲=R^۲$

فاصله مرکز از خط برابر شعاع است. $R=\frac{|۲\alpha-\alpha|}{\sqrt{۴+۱}}\Rightarrow R=\frac{\alpha}{\sqrt{۵}}\Rightarrow$

$$(۶-\alpha)^۲+(۳-\alpha)^۲=\frac{\alpha^۲}{۵}\Rightarrow\frac{۹}{۵}\alpha^۲-۱۸\alpha+۴۵=۰\Rightarrow\alpha=۵\Rightarrow R=\frac{\alpha}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$

۹۰ - گزینه ۳ چون محور تقارن سهمی قائم است پس سهمی نیز قائم است. در سهمی قائم $\Delta : y=\beta-P$ خط هادی می‌باشد.

پارامتر سهمی : P

سهمی قائم است. $(x-۲)^۲=۴P(y-۱)\xrightarrow[\text{صدق}]{(۵,۰)\in\text{سهمی}}۴=۴P\times۴\Rightarrow P=\frac{۱}{۴}\;;\Delta: y=\beta-P,\; y=۱-\frac{۱}{۴}\Rightarrow y=\frac{۳}{۴}$

۹۱ - گزینه ۳ مطابق فرض، نقطه‌ی $M=(۲\sqrt{۵},b)$ مرکز دایره‌ای است که بر هر دو خط $y-۲x=۰$ و $y-\frac{x}{۲}=۰$ مماس می‌باشد.

فاصله‌ی M از این دو خط باهم برابر و مساوی با شعاع دایره است، داریم:

$$R=\underbrace{\frac{\left|b-۴\sqrt{۵}\right|}{\sqrt{۵}}}_{\text{رابطه‌ی }(*)}=\frac{\left|b-\sqrt{۵}\right|}{\frac{\sqrt{۵}}{۲}}\Rightarrow\left|b-۴\sqrt{۵}\right|=\left|۲b-۲\sqrt{۵}\right|\Rightarrow b-۴\sqrt{۵}=\pm\left(۲b-۲\sqrt{۵}\right)$$

$$\begin{cases} b-۴\sqrt{۵}=۲b-۲\sqrt{۵}\Rightarrow b=-۲\sqrt{۵}\xrightarrow{(*)}R=\dfrac{\left|-۲\sqrt{۵}-۴\sqrt{۵}\right|}{\sqrt{۵}}=۶ \\ b-۴\sqrt{۵}=-۲b+۲\sqrt{۵}\Rightarrow b=۲\sqrt{۵}\xrightarrow{(*)}R=\dfrac{\left|۲\sqrt{۵}-۴\sqrt{۵}\right|}{\sqrt{۵}}=۲ \end{cases}$$

۹۲ - گزینه ۱ سهمی محور yها را در دو نقطه قطع می کند، پس نوع آن افقی است

رأس سهمی نیز روی نیمساز ناحیه‌ی اول قرار دارد، پس $S=(\alpha,\alpha)$ (که در آن $\alpha>۰$) را رأس سهمی در نظر می گیریم. معادله‌ی سهمی عبارت است از:

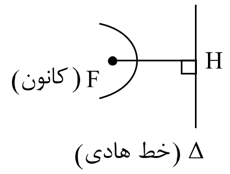
$(y-\alpha)^۲=۴p(x-\alpha)$

نمودار سهمی yها را در دو نقطه به عرضه‌های ۱ و ۵ قطع می کند، پس:

$$\begin{cases}(۱-\alpha)^۲=۴p(۰-\alpha)\\(۵-۲)^۲=۴p(۰-\alpha)\end{cases}\Rightarrow(۱-\alpha)=(۵-\alpha)^۲=۴p\alpha\Rightarrow\alpha=۳\Rightarrow p=-\frac{۱}{۳}$$

نکته: فاصله‌ی کانون تا خط هادی در این سهمی (و به طور کلی در تمام سهمی‌ها) برابر است با $FH=۲\,|p|$ در این سهمی داریم:

$FH=۲\,|p|=\frac{۲}{۳}$

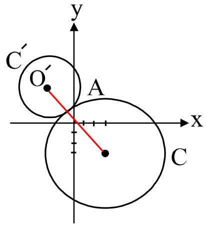


۹۳ - گزینه ۱ فرض کنیم $A(۰,۱)$ نقطه تماس دو دایره باشد چون قائم‌های بر دایره از مرکز آن می‌گذرند پس نقطه‌ی $O(۲,-۳)$ مرکز دایره‌ی C می‌باشد. از طرفی می‌دانیم خط‌المرکزین دو دایره‌ی مماس از نقطه‌ی تماس آنها می‌گذرد. بنابراین مرکز دایره‌ی C'روی خط OA قرار دارد.

$m_{OA}=\frac{-۳-۱}{۲-۰}=-۲\Rightarrow OA$ خط $\;: y-۱=-۲(x-۰)\Rightarrow y+۲x=۱$

پس مرکز دایره‌ی C' روی خط $y+۲x=۱$ قرار دارد. در بین گزینه‌ها فقط نقاط $(-۱,۳)$ و $(۱,-۱)$ در این خط صدق می‌کند.

ولی مطابق شکل مرکز دایره‌ی C' در ناحیه‌ی دوم قرار دارد پس طول مرکز دایره‌ی C' منفی می‌باشد بنابراین $(-۱,۳)$ درست است.



۹۴ - گزینه ۲ ابتدا معادله سهمی را بدست می‌آوریم.

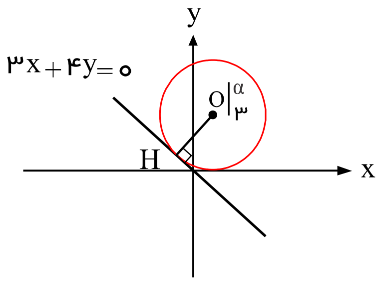
$M(x_1y)\in$ سهمی $\Rightarrow$ فاصله M تا خط هادی = فاصله M تا کانون $\Rightarrow\underbrace{\sqrt{(x-۳)^۲+(y-۲)^۲}=(x+۱)}_{\text{معادله سهمی}}$

$$\xrightarrow[y=0]{\text{برخورد با محور } x \text{ ها}} x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \Rightarrow A(\frac{3}{2}, 0)$$

$$AF = \sqrt{(\frac{3}{2} - 3)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2.5$$

۹۵ ـ گزینه ۱

دایره بر محور x ها مماس و شعاع آن برابر ۳ می‌باشد پس $o(\alpha, 3)$ مرکز دایره است. مسلماً فاصله‌ی O از خط $3x + 4y = 0$ برابر شعاع است.

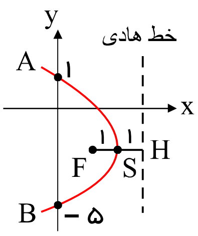


$$OH = \frac{|3\alpha + 12|}{\sqrt{9 + 16}} = 3 \Rightarrow |3\alpha + 12| = 15 \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + 12 = 15 \Rightarrow \alpha = 1 \\ 3\alpha + 12 = -15 \Rightarrow \alpha = -9 \end{cases}$$

چون مرکز O در ناحیه اول قرار دارد پس $\alpha = 1$ قابل قبول است بنابراین مرکز دایره $O(1, 3)$ می‌باشد. بنابراین طول نقطه تماس دایره با محور xها برابر ۱ می‌باشد.

۹۶ ـ گزینه ۳

باتوجه به فرض تست شکل سهمی به صورت مقابل می‌شود در ضمن در این سهمی $P = -1$ و سهمی افقی می‌باشد. فرض کنیم $S(\alpha, \beta)$ رأس سهمی باشد در این صورت معادله‌ی سهمی به صورت زیر است.



$$(y - \beta)^2 = 4P(x - \alpha) \xrightarrow{P=-1} (y - \beta)^2 = -4(x - \alpha)$$

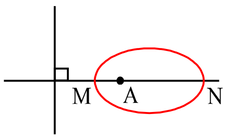
$$\left.\begin{aligned} A(0, 1) \in \text{سهمی} &\Rightarrow (1 - \beta)^2 = -4(0 - \alpha) \Rightarrow (1 - \beta)^2 = 4\alpha \\ \beta(0, -5) \in \text{سهمی} &\Rightarrow (-5 - \beta)^2 = -4(0 - \alpha) \Rightarrow (-5 - \beta)^2 = 4\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow (1 - \beta)^2 = (-5 - \beta)$$

$$\Rightarrow 1 - \beta = \pm(-5 - \beta) \Rightarrow \begin{cases} 1 - \beta = -5 = -5 - \beta \text{ غ ق ق} \\ 1 - \beta = 5 + \beta \Rightarrow \beta = -2 \end{cases}$$

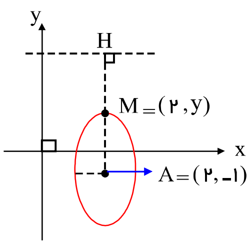
$$(1 - \beta)^2 = 4\alpha \Rightarrow (1 + 2)^2 = 4\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{9}{4}$$

۹۷ ـ گزینه ۳ نکته: اگر خط Δ و نقطه A خارج از آن داده شده باشد، مکان هندسی نقاطی از صفحه که نسبت فاصله آنها از نقطه A با فاصله‌شان از خط Δ برابر مقدار $m < 1$ باشد، یک «بیضی» است.

مطابق شکل در این بیضی با رسم محور کانونی بیضی، دو نقطه M و N (که همان رئوس کانونی بیضی هستند) به دست می‌آیند که به ترتیب نزدیکترین و دورترین نقاط بیضی به خط Δ هستند.



باتوجه به نکته فوق، کافی است که مختصات نقطه M را به دست آوریم. باتوجه به شکل رسم شده داریم:

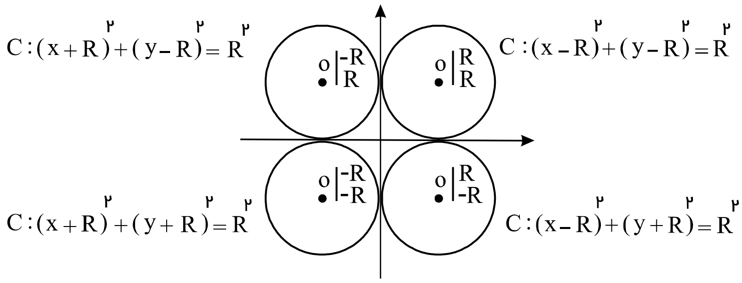


$$\frac{MA}{MH} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{|y - (-1)|}{|y - 4|} = \frac{2}{3} \xrightarrow{-1<y<4} \frac{y + 1}{4 - y} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3y + 3 = 8 - 2y \Rightarrow 5y = 5 \Rightarrow y = 1$$

پس کوتاهترین فاصله نقطه M از خط $y = 4$ برابر $3 = 1 - 4$ است.

۹۸ ـ گزینه ۳ نکته: وضعیت دوایر مماس بر محورهای مختصات در ۴ ناحیه به شکل زیر است:



در این تست چون نقطه $(۲,-۹)$ در ناحیه چهارم است پس دایره مورد نظر نیز در ناحیه چهارم بر هر دو محور مماس است.

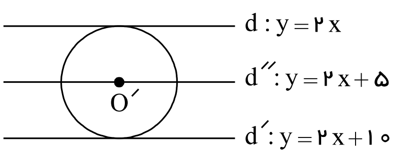
$$o\left|\begin{matrix}R\\-R\end{matrix}\right. \Rightarrow c:\underbrace{(x-R)^{۲}+(y+R)^{۲}=R^{۲}}_{\text{معادله دایره}}$$

مختصات نقطه $(۲,-۹)$ را در معادله دایره صدق می‌دهیم:

$$(۲,-۹)\in(x-R)^{۲}+(y+R)^{۲}=R^{۲}\Rightarrow(۲-R)^{۲}+(-۹+R)^{۲}=R^{۲}$$

$$\Rightarrow ۴-۴R+R^{۲}+۸۱+R^{۲}-۱۸R=R^{۲}\Rightarrow R^{۲}-۲۲R+۸۵=۰\Rightarrow\begin{cases}R=۱۷\\R=۵\end{cases}$$

۹۹ - گزینه ۳



خطوط $d: y=۲x$, $d': y=۲x+۱۰$ با هم موازی هستند مرکز دایره روی خط وسط و موازی با این دو خط به معادله‌ی $d'': y=۲x+۵$ قرار دارد.

در بین گزینه‌ها، فقط مختصات گزینه‌ی ۳ در معادله $y=۲x+۵$ صدق می‌کند.

۱۰۰ - گزینه ۱ نکته: در معادله‌ی دایره بفرم $x^{۲}+y^{۲}+Dx+Ey+F=۰$ مختصات مرکز از دستور $O(-\frac{D}{۲},-\frac{E}{۲})$ حاصل می‌شود.

نکته: خطی که در نقطه‌ی تماس، بر خط مماس بر دایره عمود شود از مرکز دایره می‌گذرد.

$$x^{۲}+y^{۲}-۲x+y=۱\ \Rightarrow\ O=(۱,-\frac{۱}{۲})$$

مختصات O را در خط $d: ۳x+۲y=a$ صدق می‌دهیم.

$$O(۱,-\frac{۱}{۲})\in d\xrightarrow{\text{صدق}}۳-۱=a\Rightarrow a=۲$$

۱۰۱ - گزینه ۲ نکته: در معادله‌ی ضمنی دایره به فرم $x^{۲}+y^{۲}+Dx+Ey+F=۰$ مرکز $O=(-\frac{D}{۲},-\frac{E}{۲})$ و $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{D^{۲}+E^{۲}-۴F}$ می‌باشد.

نکته: تمام قائم‌های بر دایره از مرکز دایره می‌گذرد.

نکته: شرط آنکه دو دایره‌ی C و C' مماس خارج باشند آن است که: $OO'=R+R'$

$$C': x^{۲}+y^{۲}-۴x+۲y-۴=۰\Rightarrow\begin{cases}o'=(۲,-۱)\\R'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۴+۱۶}=۳\end{cases}$$

مرکز دایره‌ی C نیز نقطه‌ی $O=(۸,۷)$ است.

$$\left.\begin{matrix}OO'=\sqrt{(۸-۲)^{۲}+(۷+۱)^{۲}}=\sqrt{۳۶+۶۴}=۱۰\\R+R'=R+۳\end{matrix}\right\}\Rightarrow \text{مماس خارجند } C' \text{ و } C$$

$$\Rightarrow OO'=R+R'\Rightarrow ۱۰=R+۳\Rightarrow R=۷$$

۱۰۲ - گزینه ۴ سهمی $۲y^{۲}-۱۲y+ax+۸=۰$ یک سهمی افقی است.

ابتدا رأس و پارامتر آن را پیدا می‌کنیم برای آنکه پارامتر سهی با متغیر a در معادلهٔ داده‌شده اشتباه گرفته نشود a را با m نمایش می‌دهیم یعنی معادلهٔ سهمی را به شکل $۲y^{۲}-۱۲y+mx+۸=۰$ در نظر می‌گیریم.

$$۲(y^{۲}-۶y)=-mx-۸\Rightarrow ۲\left[(y-۳)^{۲}-۹\right]=-mx-۸\Rightarrow ۲(y-۳)^{۲}=-mx+۱۰$$

$$\Rightarrow ۲(y-۳)^{۲}=-m(x-\frac{۱۰}{m})\Rightarrow(y-۳)^{۲}=-\frac{m}{۲}(x-\frac{۱۰}{m})$$

در این سهمی افقی رأس نقطهٔ $(\frac{۱۰}{m},۳)$ است و $۴a=-\frac{m}{۲}$ پس $a=-\frac{m}{۸}$.

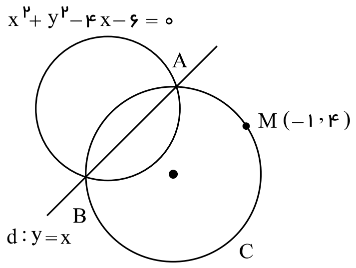
معادلهٔ خط هادی سهمی افقی به شکل $x=-a+\alpha$ است پس:

$$x = \frac{m}{۸} + \frac{۱۰}{m} \xrightarrow{x=\frac{۲۱}{۸}} \frac{۲۱}{۸} = \frac{m}{۸} + \frac{۱۰}{m}$$

$$\Rightarrow m^{۲} - ۲۱m + ۸۰ = ۰ \Rightarrow (m-۱۶)(m-۵) = ۰ \Rightarrow m = ۱۶,۵$$

پس گزینهٔ ۴ درست است.

۱۰۳ – گزینه ۴ روش اول:



وتری مشترک دو دایرهٔ متقاطع خطی است که از نقاط تقاطع آن‌ها می‌گذرد.

برای محاسبهٔ مختصات نقاط A و B کافی است نقاط برخورد خط $y = x$ و دایرهٔ $x^{۲} + y^{۲} - ۴xy = ۶$ را بیابیم:

$$A \text{ و } B : \begin{cases} y = x \\ x^{۲} + y^{۲} - ۴x - ۶ = ۰ \end{cases} \Rightarrow ۲x^{۲} - ۴x - ۶ = ۰ \Rightarrow (x-۳)(x+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \Rightarrow y = ۳ \Rightarrow A\left|\begin{matrix} ۳ \\ ۳ \end{matrix}\right. \\ \\ x = -۱ \Rightarrow y = -۱ \Rightarrow B\left|\begin{matrix} -۱ \\ -۱ \end{matrix}\right. \end{cases}$$

فرض می‌کنیم معادلهٔ دایرهٔ C' به‌فرم $C'(x,y) : x^{۲} + y^{۲} + ax + by + c = ۰$ باشد.

$$A(۳,۳) \in C' \xrightarrow{\text{صدق دهید.}} ۹ + ۹ + ۳a + ۳b + c = ۰ \Rightarrow ۳a + ۳b + c = -۱۸ \quad (۱)$$

$$B(-۱,-۱) \in C' \xrightarrow{\text{صدق دهید.}} ۱ + ۱ - a - b + c = ۰ \Rightarrow -a - b + c = -۲ \quad (۲)$$

$$m(-۱,۴) \in C' \xrightarrow{\text{صدق دهید.}} ۱ + ۱۶ - a + ۴b + c = ۰ \Rightarrow -a + ۴b + c = -۱۷ \quad (۳)$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} (۱) \\ (۲) \\ (۳) \end{matrix} \begin{cases} ۳a + ۳b + c = -۱۸ \\ -a - b + c = -۲ \\ -a + ۴b + c = -۱۷ \end{cases}$$

$$(۳) - (۲) : ۵b = -۱۵ \Rightarrow b = -۳$$

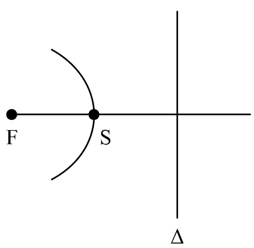
$$(۱) + ۳ \times (۲) : c + ۳c = -۲۴ \Rightarrow c = -۶$$

$$\xrightarrow[c=-۶]{b=-۳} (۲) : -a + ۳ - ۶ = -۲ \Rightarrow -a - ۳ = -۲ \Rightarrow a = -۱$$

$$C' \text{ معادلهٔ دایرهٔ } : C' : x^{۲} + y^{۲} - x - ۳y - ۶ = ۰$$

۱۰۴ – گزینه ۱

نکته: در سهمی افقی که دهانهٔ آن به سمت چپ باز می‌شود: خط هادی خطی قائم می‌باشد:



$$\underbrace{F\left|\begin{matrix} h-a \\ k \end{matrix}\right.}_{\text{کانون}} \quad , \quad \underbrace{S\left|\begin{matrix} h \\ k \end{matrix}\right.}_{\text{رأس}} \quad , \quad \underbrace{\Delta : x = h + a}_{\text{خط هادی}}$$

معادلهٔ این سهمی به‌فرم $(y-k)^{۲} = -۴a(x-h)$ است.

در این سؤال چون خط $x = ۴$ (خط هادی سهمی) خطی قائم است پس سهمی افقی است و از آنجا موقعیت نقطهٔ F سمت چپ خط $x = ۴$ قرار دارد دهانهٔ سهمی به سمت چپ باز می‌شود بنابراین:

$$F\left|\begin{array}{l}2=h-a\\1=k\end{array}\right.\quad(1)\quad,\quad \Delta: x=4=h+a\quad(2)$$

$$(1),(2):\begin{cases}h-a=2\\h+a=4\end{cases}\Rightarrow 2h=6\Rightarrow h=3\xrightarrow{(2)}a=4-3=1$$

معادلهٔ سهمی : $(y-k)^2=-4a(x-h)\Rightarrow (y-1)^2=-4(1)(x-3)$

$\Rightarrow$ معادلهٔ سهمی : $y^2-2y+4x=11$

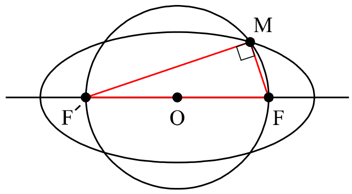
۱۰۵ - گزینه ۲

قطر بزرگ بیضی $=2\sqrt{5}=2a\Rightarrow a=\sqrt{5}$

قطر کوچک بیضی $=2=2b\Rightarrow b=1$

می‌دانیم : $a^2=b^2+c^2\Rightarrow 5=1+c^2\Rightarrow c=2=$ شعاع دایره

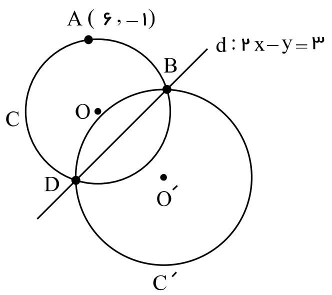
پس دایرهٔ مورد نظر از کانون‌های F و F' چون نقطهٔ M روی دایره قرار دارد پس در مثلث $F'\overset{\triangle}{M}F$ زاویهٔ M برابر 90° می‌باشد بنابراین:



$$M\overset{\triangle}{F}F':\underbrace{FF'^2}_{2c}=MF^2+MF'^2\Rightarrow (4)^2=MF^2+MF'^2\Rightarrow MF^2+MF'^2=16$$

۱۰۶ - گزینه ۴

فرض کنیم معادلهٔ C بفرم $C: x^2+y^2+ax+by+c=0$ باشد چون $x^2+y^2=17$ و $y=2x-3$ پس:



$$17+ax+b(2x-3)+c+17=0$$
$$\Rightarrow (a+2b)x+c-3b+17=0\Rightarrow\begin{cases}a+2b=0\Rightarrow a=-2b\\c-2b+17=0\Rightarrow c=3b-17\end{cases}$$

معادلهٔ دایرهٔ C : $x^2+y^2-2bx+by+3b-17=0$

نقطهٔ $A(6,-1)$ در معادلهٔ دایرهٔ C صدق کند پس:

$$A(6,-1)\in C\xrightarrow{\text{صدق}}36+1-12b-b+3b-17=0\Rightarrow 20-10b=0\Rightarrow\boxed{b=2}$$

$C: x^2+y^2-4x+2y-11=0\Rightarrow$ شعاع دایره $C=\dfrac{1}{2}\sqrt{4^2+2^2-4(-11)}=4$

۱۰۷ - گزینه ۲ ابتدا بایستی معادلهٔ سهمی را استاندارد نماییم:

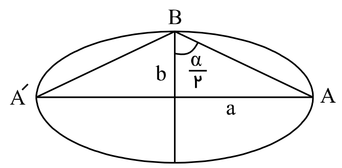
$$2x^2-4x+3y=4$$
$$2[x^2-2x]=-3y+4\Rightarrow 2[(x-1)^2-1]=-3y+4\Rightarrow 2(x-1)^2=-3y+6$$

$\Rightarrow 2(x-1)^2=-3(y-2)\xrightarrow{\div 2}(x-1)^2=-\dfrac{3}{2}(y-2)\leftarrow$ سهمی قائم دهانه رو به پایین

رأس سهمی: $S=(1,2)\ ,\ 4a=\dfrac{3}{2}\Rightarrow a=\dfrac{3}{8}$

کانون: $F\left|\begin{array}{l}h=1\\k-a=2-\frac{3}{8}=\frac{13}{8}\end{array}\right.$

۱۰۸ - گزینه ۳



$$A'\hat{B}A=\alpha$$

$$e=\sqrt{\frac{۲}{۳}}=\frac{c}{a}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}\frac{۲}{۳}=\frac{c^۲}{a^۲}\xrightarrow{c^۲=a^۲-b^۲}\frac{۲}{۳}=\frac{a^۲-b^۲}{a^۲}$$

$$\Rightarrow ۲a^۲=۳a^۲-۳b^۲\Rightarrow a^۲=۳b^۲\Rightarrow \frac{a}{b}=\sqrt{۳}$$

در شکل: $\tan(\frac{\alpha}{۲})=\frac{a}{b}=\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{\alpha}{۲}=۶۰^\circ\Rightarrow\alpha=۱۲۰^\circ$

۱۰۹ - گزینه ۱ معادله استاندارد دایره چنین است.

$$(x-۲)^۲+(y+۳)^۲=۱۳$$

فاصله مرکز دایره $(۲,-۳)$ از خط مماس $۲x-۳y+m-۲=۰$ برابر شعاع دایره است.

$$\left|\frac{۴+۹+m-۲}{\sqrt{۱۳}}\right|=\sqrt{۱۳}\Rightarrow ۱۱+m=\pm ۱۳\Rightarrow m=۲\,,\ -۲۴$$

۱۱۰ - گزینه ۱ صورت استاندارد از دایره را می‌نویسیم $(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۹$

مرکز دایره $(۲,-۱)$ و شعاع آن $R=۳$ است. می‌دانیم فاصله مرکز دایره از خط مماس $۲x-y+۳m-۲=۰$ برابر شعاع دایره است.

$$\frac{|۴+۱+۳m-۲|}{\sqrt{۱+۴}}=۳\Rightarrow |m+۱|=\sqrt{۵}\Rightarrow m=-۱\pm\sqrt{۵}$$

۱۱۱ - گزینه ۴ شعاع دایره برابر فاصله مرکز دایره از خط مماس است.

$$R=\frac{|۴-۱-۵|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

معادله دایره چنین است.

$$(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=\frac{۴}{۵}\Rightarrow ۵x^۲+۵y^۲-۲۰x+۱۰y+۲۱=۰$$

۱۱۲ - گزینه ۴ چون خط قائم است پس سهمی افقی است در سهمی افقی $F\Big|_{\beta}^{\alpha+a}$ و $\Delta: x=\alpha-a$

$$F\Big|_{\beta=۳}^{\alpha+a=-۲}\qquad \Delta: x=\alpha-a=۴\Rightarrow\begin{cases}\alpha+a=-۲\\ \alpha-a=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=۱\\ a=-۳\end{cases}$$

معادله سهمی افقی: $(y-۳)^۲=۴x(-۳)(x-۱)\xrightarrow{y=۰}۹=-۱۲x+۱۲\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}$: طول نقطه برخورد با محور xها

۱۱۳ - گزینه ۳ نقطه $M(\alpha,۲\alpha-۱)$ انتخاب شود.

$$MA=\sqrt{(\alpha-۲)^۲+(۲\alpha-۱)^۲}=\sqrt{۵\alpha^۲-۸\alpha+۵}$$
$$MB=\sqrt{\alpha^۲+(۲\alpha-۲)^۲}=\sqrt{۵\alpha^۲-۸\alpha+۴}$$
$$\sqrt{۵\alpha^۲-۸\alpha+۵}+\sqrt{۵\alpha^۲-۸\alpha+۴}=۳$$
$$۵\alpha^۲-۸\alpha+۵=۵\alpha^۲-۸\alpha+۴+۹-۶\sqrt{۵\alpha^۲-۸\alpha+۴}$$
$$۳\sqrt{۵\alpha^۲-۸\alpha+۴}=۴\Rightarrow ۴۵\alpha^۲-۷۲\alpha+۲۰=۰$$
$$\alpha=\frac{۳۶\pm\sqrt{۳۶^۲-۹۰۰}}{۴۵}=\frac{۳۶\pm ۳\sqrt{۴۴}}{۴۵}=\frac{۱۲\pm ۲\sqrt{۱۱}}{۱۵}=۰/۸\pm\frac{۲\sqrt{۱۱}}{۱۵}$$

۱۱۴ - گزینه ۲ راه ۱) شرط لازم آنکه معادله $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ دایره باشد آن است که $a^۲+b^۲-۴c>۰$ باشد پس

$$۴+۳۶-۴(m-۲)>۰\Rightarrow m<۱۲$$

راه ۲) صورت استاندارد دایره را می‌نویسیم. شرط دایره بودن آن است که شعاع دایره بزرگتر از صفر باشد.

$$(x-۱)^۲+(y+۳)^۳=۱۲-m\Rightarrow ۱۲-m>۰\Rightarrow m<۱۲$$

۱۱۵ - گزینه ۴

$$M(x,y)\quad A(۲,-۱)\quad B(۱,-۲)$$
$$|MA|=\sqrt{۲}|MB|\Rightarrow (x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۲\left[(x-۱)^۲+(y+۲)^۲\right]$$
$$x^۲-۴x+۴+y^۲+۲y+۱=۲x^۲-۴x+۲+۲y^۲+۸y+۸$$
$$x^۲+y^۲+۶y+۵=۰\Rightarrow x^۲+(y+۳)^۲=۴$$

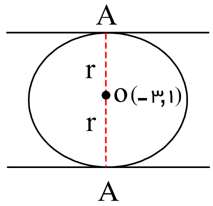
مرکز دایره به مختصات $(۰,-۳)$ و شعاع آن $R=۲$ است.

۱۱۶ - گزینه ۲ چون مرکز دایره $C(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})\Rightarrow C(-۳,۰)$ در خط داده شده صدق می‌کند پس خط داده شده قطری از دایره است و فاصله بین دو نقطه‌ای که دایره را قطع می‌کنند قطر دایره است.

$$R^2 = \frac{a^2+b^2-4c}{4} \xrightarrow[R=5]{\text{قطر}=10} 25 = \frac{36+0+4c}{4} \Rightarrow 4c+36=100 \Rightarrow 4c=64 \Rightarrow c=16$$

۱۱۷ - گزینه ۳ اگر مماس بر مقطع مخروطی در نقطه ای روی آن موازی یکی از محورها باشد آن مماس قطعاً در یکی از رئوس آن مقطع رسم شده پس نقطه ی A یا $(-3, 1+r)$ می باشد یا $(-3, 1-r)$

$$\begin{cases} (-3, 1+4) = (-3, 5) \Rightarrow -3+5 = 2 \\ (-3, 1-4) = (-3, -3) \Rightarrow -3+(-3) = -6 \end{cases} \Rightarrow a+b \text{ کمترین مقدار} = -6$$



۱۱۸ - گزینه ۱ مرکز دایره ها به ترتیب $(0, 0)$ و $(1, 0)$ می باشند یعنی مرکزها هم عرض اند پس در صورتی مماس مشترک خارجی موازی محورy ها (یعنی عمود بر خط المرکزین) است که دو دایره مماس داخل باشند.

$$d = |R - R'|$$

$$\begin{cases} d = OO' = 1 \\ R' = \frac{1}{2}\sqrt{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 = |R-1|$$

$1 = R-1 \Rightarrow R = 2$ ق ق

$1 = 1-R \Rightarrow R = 0$ شعاع نمی تواند صفر باشد

$$R = 2 \Rightarrow R^2 = \frac{a^2+b^2-4c}{4} \Rightarrow 2 = \frac{1}{2}\sqrt{4c} \Rightarrow 4 = \sqrt{4c} \Rightarrow 16 = 4c \Rightarrow c = 4$$

۱۱۹ - گزینه ۴ معادله نیم‌ساز ناحیه دوم و چهارم $y=-x$ است پس هر نقطه روی آن به‌صورت $A\left|\begin{matrix}\alpha\\-\alpha\end{matrix}\right.$ است این نقطه را در معادله دایره صدق داده و عدد حاصل را P می‌نامیم و دقت کنید طول مماس $\sqrt{P}$ است.

$$\text{طول مماس} = \sqrt{c(\alpha,-\alpha)} = \sqrt{(\alpha-1)^2+(-\alpha+3)^2-2} \Rightarrow 2\sqrt{2} = \sqrt{(\alpha-1)^2+(-\alpha+3)^2-2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 8 = \alpha^2-2\alpha+1+\alpha^2-6\alpha+9-2 \Rightarrow 2\alpha^2-8\alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \Rightarrow A\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right. \\ \alpha = 4 \Rightarrow A\left|\begin{matrix}4\\-4\end{matrix}\right. \end{cases}$$

۱۲۰ - گزینه ۲ سهمی قائم رو به بالا می‌باشد و رأس آن $S\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right.$ است.

$$\text{معادله سهمی}: (x-\alpha)^2 = 4p(y-\beta) \to (x-2)^2 = 4p(y-1) \xrightarrow{\text{صدق}\left|\begin{matrix}0\\5\end{matrix}\right.} 4 = 16p \to p = \frac{1}{4}$$

$$\text{مختصات کانون}: F\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta+p\end{matrix}\right. \to F\left|\begin{matrix}2\\ 1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}\end{matrix}\right.$$

۱۲۱ - گزینه ۳ از هر نقطه خارج سهمی می‌توان دو مماس بر سهمی رسم کرد یعنی باید $f(1, -2) > 0$ باشد (فقط در موقع صدق دادن نقطه در معادله سهمی باید ضریب درجه دوم مثبت باشد)

$$x^2+2x-12y-m = 0$$

$$\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} 1+2+24-m > 0 \to m < 27$$

۱۲۲ - گزینه ۴

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1-(\frac{b}{a})^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} \xrightarrow{\text{به توان } 2} 2a^2 = 4a^2-4b^2 \Rightarrow 2a^2 = 4b^2$$

$$a = \sqrt{2}b \Rightarrow \text{طول وتر کانونی} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2b^2}{\sqrt{2}b} = \frac{2}{\sqrt{2}}b \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}b = a$$

۱۲۳ - گزینه ۳

$$\left.\begin{matrix} S_{BOF} = \frac{1}{2}\times b\times c = 6 \\ S_{ABA'} = \frac{1}{2}\times 2a\times b = 15 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تقسیم می کنیم}} \frac{6}{15} = \frac{\frac{1}{2}\times b\times c}{\frac{1}{2}\times 2a\times b} \Rightarrow \frac{c}{2a} = \frac{6}{15} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = e$$

۱۲۴ - گزینه ۱ اگر P نقطه‌ای دلخواه از بیضی باشد مجموع فواصل آن از دو کانون برابر $2a$ است پس داریم:

$PF+PF'=2a \quad , \quad P(10,1)$

$\sqrt{(10-2)^2+(1+3)^2}+\sqrt{(10-2)^2+(1-5)^2}=2a$

$\Rightarrow 2\sqrt{80}=2a\Rightarrow a=4\sqrt{5}$

از طرفی:

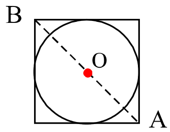
$FF'=2c\Rightarrow 8=2c\Rightarrow c=4$

$b^2=a^2-c^2=80-16=64\Rightarrow b=8$

طول قطر غیرکانونی $=2b=16$

۱۲۵ - گزینه ۴

در این صورت وسط قطر مربع، مرکز دایره و طول ضلع مربع برابر قطر دایره خواهد شد و داریم:



$O(\frac{1+3}{2},\frac{3+1}{2})\Rightarrow O(2,2)$

می‌دانیم طول قطر مربعی به ضلع a برابر است با $a\sqrt{2}$، حال:

$\Rightarrow a=2\xrightarrow{2R=a}2R=2\Rightarrow R=1$

معادله‌ی دایره:

$(x-2)^2+(y-2)^2=1$

۱۲۶ - گزینه ۱

تذکر: در سهمی قائم به معادله $ax^2+bx+cy+d=0$ معادله خط هادی $y=\beta-p$: Δ می‌باشد که در آن رأس سهمی و $2p$فاصله کانون تا خط هادی، پارامتر سهمی است.

$x^2-6x-2y+8=0\Rightarrow (x-3)^2=2y-8+9=2y+1$

$\Rightarrow x=3=\alpha\leftarrow$ طول رأس سهمی

مختصات رأس سهمی در معادله سهمی صدق می‌کند پس در معادله سهمی $x=3$ صدق می‌دهیم تا $y=\beta$ عرض رأس بدست آید.

$\xrightarrow[x=3\ \text{صدق}]{\text{در معادله ی سهمی}}\quad 9-18+8=2y\Rightarrow y=-\frac{1}{2}=\beta$

پارامتر سهمی $2p:p=\frac{-(\text{ضریب متغیر درجه}1)}{4\times\text{ضریب}\,x^2}=\frac{-(-2)}{4(1)}=\frac{1}{2}$

معادله خط هادی $\Delta:y=\beta-p\Rightarrow y=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-1$

طبق فرض $y=\frac{m}{2}$ معادله خط هادی می‌باشد پس:

$-1=\frac{m}{2}\Rightarrow m=-2$

۱۲۷ - گزینه ۴ تذکر: شرط آن‌که معادله $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ متعلق به یک دایره باشد آن است که اولا: ضرایب x^2,y^2 برابر باشند ثانیاً مقدار $D^2+E^2-4F>0$ باشد.

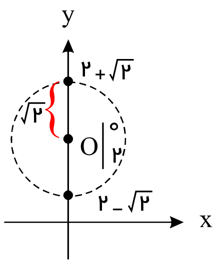
تذکر: اگر معادله $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ متعلق به یک دایره باشد آن است آنگاه مرکز $O\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ می باشد و $R=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ شعاع می‌باشد.

در آغاز باید ضرایب x^2,y^2 را برابر هم قرار دهیم.

$2a-1=-3\Rightarrow a=-1\to c:-3x^2-3y^2+12y-1-5=0$

$\Rightarrow c:-3x^2-3y^2+12y-6=0\xrightarrow{\div(-3)}c:x^2+y^2-4y+2=0$

مرکز $O=(0,2)$

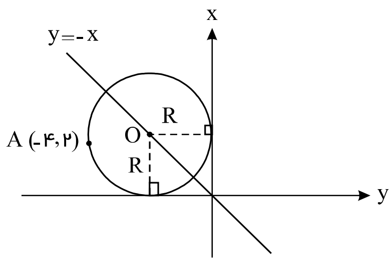


مطابق شکل واضح است که بیش ترین فاصله محیط دایره تا محور xها برابر $2+\sqrt{2}$ می‌باشد.

۱۲۸ - گزینه ۳

با توجه به شکل دایره‌ای که بر هر دو محور مختصات مماس است و از نقطه $A(-4,2)$ می‌گذرد بر روی نیمساز ربع دوم و چهارم به معادله خط $y=-x$ قرار دارد. بنابراین مختصات مرکز دایره $O(-R,R)$ می‌باشد و معادله دایره به صورت روبه‌رو می‌باشد.

$$(x+R)^2+(y-R)^2=R^2$$



نقطه $A(-4,2)$ روی دایره قرار دارد و مختصات آن در معادله دایره صدق می‌کند. یعنی:

$$(-4+R)^2+(2-R)^2=R^2 \to 16-8R+R^2+4-4R+R^2=R^2$$

$$\to R^2-12R+20=0 \to (R-10)(R-2)=0 \to \begin{cases} R=10 \\ R=2 \end{cases}$$

۱۲۹ - گزینه ۴

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+5^2-4a}=\frac{1}{2}\sqrt{34-4a}$$

عبارت زیر رادیکال باید مثبت باشد. داریم:

$$34-4a>0 \to 34>4a \to \frac{17}{2}>a$$

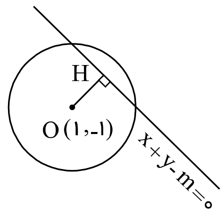
۱۳۰ - گزینه ۲ برای این‌که خط و دایره متقاطع باشند باید فاصله مرکز دایره از خط کم‌تر از اندازه شعاع دایره باشد.

$$x^2+y^2-2x+2y-6=0 \to O(-\frac{-2}{2},-\frac{2}{2})=(1,-1)$$

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+2^2-4(-6)}=\frac{1}{2}\sqrt{32}=2\sqrt{2}$$

$$OH<R \to \frac{|1-1-m|}{\sqrt{1^2+1^2}}<2\sqrt{2} \to |m|<4$$

$$\to -4<m<4$$



۱۳۱ - گزینه ۴ با استفاده از معادله ضمنی $C' : x^2+y^2-14x-2y-119=0$ مختصات مرکز (O') و شعاع (R') را محاسبه می‌کنیم:

$$O'(-\frac{x \text{ ضریب}}{2},-\frac{y \text{ ضریب}}{2})=(-\frac{-14}{2},-\frac{-2}{2})=(7,1)$$

$$R'=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{14^2+2^2-4(-119)}=\frac{1}{2}\sqrt{676}=\frac{26}{2}=13$$

چون هر خط قائم بر دایره مورد نظر سوال از نقطه $(-1,-5)$ می‌گذرد، پس این نقطه مرکز دایره است. در ادامه با داشتن مختصات مرکزهای دو دایره اندازه خط‌المرکزین آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{matrix} O(-1,-5) \\ O'(7,1) \end{matrix}\right\} \to OO'=\sqrt{(7-(-1))^2+(1-(-5))^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$$

چون $R'>OO'$ $(13>10)$ می‌باشد نقطه O درون دایره C' قرار می‌گیرد، بنابراین مسئله دارای دو جواب است.

برای این‌که دو دایره مماس داخل باشند باید داشته باشیم.

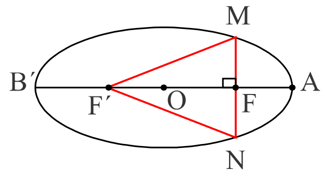
$$OO'=|R-R'| \to 10=|R-13| \to \begin{cases} R_1-13=10 \to R_1=23 \\ R_2-13=-10 \to R_2=3 \end{cases}$$

۱۳۲ - گزینه ۳

$$\frac{S_{BA'B'}}{S_{ABF}}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}OA'\times BB'}{\cancel{\frac{1}{2}}OB\times AF}=\frac{a\times 2\cancel{b}}{\cancel{b}\times(a-c)}=\frac{2a}{a-c}=3 \to 2a=3a-3c \to 3c=a$$

$$\frac{S_{FBA'B'}}{S_{ABF}}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}A'F\times BB'}{\cancel{\frac{1}{2}}OB\times AF}=\frac{(a+c)\times 2\cancel{b}}{\cancel{b}\times(a-c)}=\frac{2(a+c)}{a-c}=\frac{2(3c+c)}{3c-c}=\frac{\cancel{2}\times 4\cancel{c}}{\cancel{2}\cancel{c}}=4$$

۱۳۳ ـ گزینه ۴



$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}FF'=2c\\ FF'=\frac{\sqrt{3}}{2}MN\end{array}\right\}\rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}MN=2c\\ MN=\frac{2b^2}{a}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2b^2}{a}=2c\rightarrow\sqrt{3}b^2=2ac\\ a^2=c^2+b^2\rightarrow b^2=a^2-c^2\end{array}\right\}\rightarrow\sqrt{3}(a^2-c^2)=2ac\\ \text{خروج از مرکز }e=\frac{c}{a}\rightarrow c=ae\end{array}\right\}$$

$$\rightarrow\sqrt{3}(a^2-a^2e^2)=2a\times ae\rightarrow\sqrt{3}\cancel{a^2}(1-e^2)=2\cancel{a^2}e$$

$$\sqrt{3}e^2+2e-\sqrt{3}=0$$

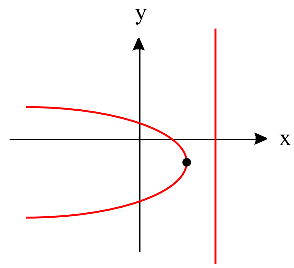
$$e=\frac{-1\pm\sqrt{1+3}}{\sqrt{3}}=\frac{-1\pm2}{\sqrt{3}}\rightarrow\begin{cases}e_1=\frac{-1+2}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\\ e_2=\frac{-1-2}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}\end{cases}$$

۱۳۴ ـ گزینه ۴

$$(y+2)^2=-32(x-5)\rightarrow\begin{cases}\text{سهمی افقی و دهانهٔ آن رو به چپ است.}\\ \text{مختصات رأس }S(5,-2)\\ 4a=32\rightarrow a=8\end{cases}$$

معادلهٔ خط هادی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$x=5+8=13$$

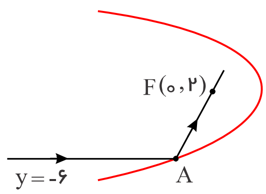


۱۳۵ ـ گزینه ۱

$$y^2=4(y-x)\rightarrow y^2-4y=-4x\xrightarrow{+4}y^2-4y+4=-4x+4$$

$\rightarrow(y-2)^2=-4(x-1)\rightarrow$ سهمی افقی و دهانهٔ آن رو به چپ است

$$\left.\begin{array}{l}S(1,2)\\ 4a=4\rightarrow a=1\end{array}\right\}\rightarrow F(1-1,2)=(0,2)$$



مختصات نقطهٔ A محل تقاطع $y=-6$ با سهمی را می‌یابیم:

$$(y-2)^2=-4(x-1)\xrightarrow{y=-6}(-6-2)^2=-4(x-1)$$

$$\rightarrow 64=-4(x-1)\rightarrow -16=x-1\rightarrow x_A=-15$$

$\rightarrow A$ مختصات $(-15,-6)$

با داشتن مختصات کانون و نقطهٔ A معادلهٔ پرتو بازتاب (AF) را می‌نویسیم:

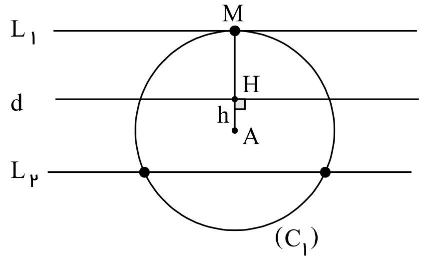
$$\left.\begin{array}{l}F(۰,۲)\\ A(-۱۵,-۶)\end{array}\right\} \rightarrow m_{AF} = \frac{-۶-۲}{-۱۵-۰} = \frac{۸}{۱۵}$$

$$y-۲=\frac{۸}{۱۵}(x-۰) \xrightarrow{\times ۱۵} ۱۵y-۳۰=۸x \rightarrow ۸x-۱۵y+۳۰=۰$$

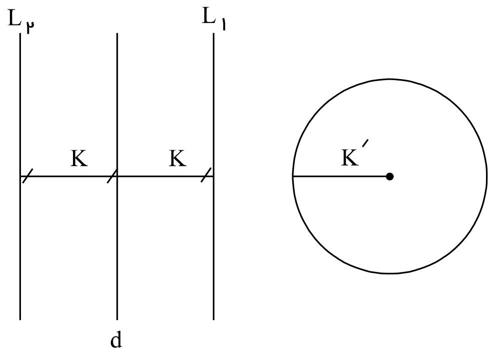
$$\begin{cases} a=۸ \\ b=-۱۵ \\ c=۳۰ \end{cases} \rightarrow a+b+c=۸-۱۵+۳۰=۲۳$$

۱۳۶ - گزینه ۳ مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۶ واحد هستند. دو خط موازی به فاصلهٔ ۶ واحد در دو طرفش می‌باشند. (خط‌های $L_۱$ و $L_۲$). مکان هندسی نقاطی که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۸ واحد هستند دایره‌ای به مرکز A با شعاع ۸ می‌باشد $(C_۱)$. محل تقاطع نقاط خط‌های $L_۱$ و $L_۲$ با دایرهٔ $C_۱$ جواب مسأله است. مطابق شکل در حالتی که سه جواب وجود دارد داریم:

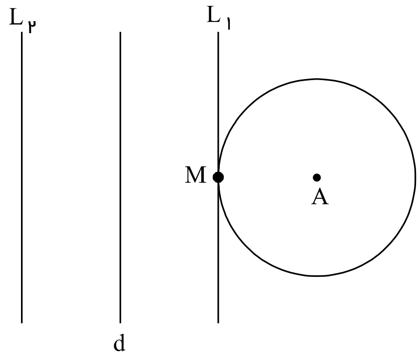
$$AM = AH + HM \rightarrow ۸ = h + ۶ \rightarrow h = ۲$$



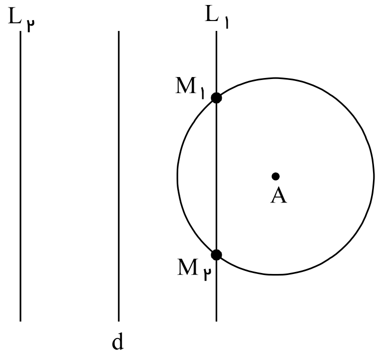
۱۳۷ - گزینه ۳ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ A به فاصلهٔ معلوم K هستند دایره‌ای به مرکز A و شعاع K است $(C_۱)$. مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصلهٔ K' هستند دو خط موازی به فاصلهٔ K' در دو طرفش می‌باشد (خط‌های $L_۱$ و $L_۲$). محل تقاطع دایرهٔ $C_۱$ با خط‌های $L_۱$ و $L_۲$ جواب مسأله است. در ادامه روی تعداد جواب‌ها در حالت‌های مختلف بحث می‌کنیم



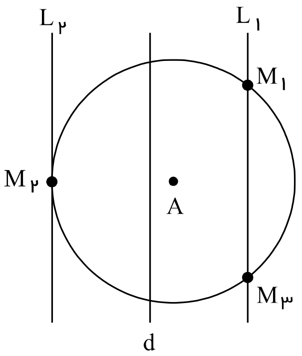
– جوابی نداریم



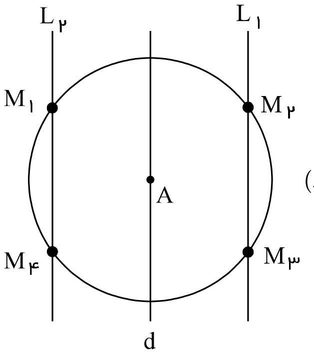
– یک جواب (نقطهٔ M)



– دو جواب $(M_۱, M_۲)$



– سه جواب $(M_۱, M_۲, M_۳)$



– چهار جواب $(M_۱, M_۲, M_۳, M_۴)$

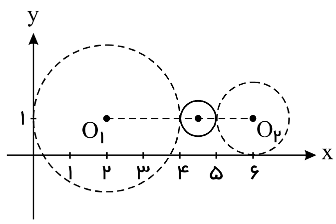
بنابراین حداکثر چهار جواب وجود دارد.

۱۳۸ – گزینه ۳ ابتدا معادلات دو دایره را استاندارد می‌کنیم:

$$C_۱ : x^۲ + y^۲ - ۴x - ۲y + ۱ = ۰ \Rightarrow C_۱ : (x-۲)^۲ + (y-۱)^۲ = ۴ \Rightarrow \begin{cases} O_۱(۲\,,\,۱) \\ R_۱ = ۲ \end{cases}$$

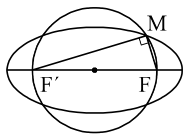
$$C_۲ : x^۲ + y^۲ - ۱۲x - ۲y + ۳۶ = ۰ \Rightarrow C_۲ : (x-۶)^۲ + (y-۱)^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} O_۲(۶\,,\,۱) \\ R_۲ = ۱ \end{cases}$$

مطابق شکل مختصات مرکز $O_۳(\frac{۹}{۲}, ۱)$ دایره مطلوب و شعاع آن $R_۳ = \frac{۱}{۲}$ می‌باشد. $C_۳ : (x - \frac{۹}{۲})^۲ + (y-۱)^۲ = \frac{۱}{۴}$



۱۳۹ – گزینه ۱

چون M نقطه‌ای روی بیضی است، پس $MF + MF' = ۲a$ و چون M روی دایره‌ای به قطر FF' قرار دارد، پس MF و MF' بر هم عمودند.



$$۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳$$

بنابراین:

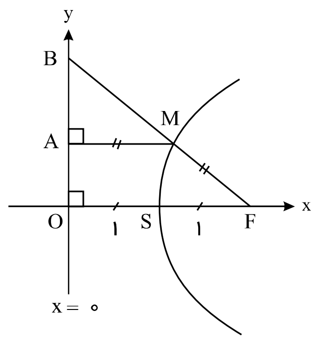
$$MF^۲ + MF'^۲ = FF'^۲ = ۴c^۲$$

حال داریم:

$$(MF + MF')^۲ = MF^۲ + MF'^۲ + ۲MF \times MF'$$

$$\Rightarrow MF \times MF' = \frac{۱}{۲}[\underbrace{(MF + MF')^۲}_{۴a^۲} - \underbrace{(MF^۲ + MF'^۲)}_{۴c^۲}] = ۲(a^۲ - c^۲) = ۲b^۲ = ۲ \times ۹ = ۱۸$$

۱۴۰ - گزینه ۲



$y^۲ = ۴(x-۱)$

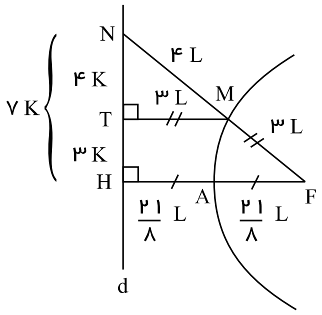
$a=۱ \quad , \quad S\Big|_{۰}^{۱} \quad , \quad F\Big|_{۰}^{۲} \quad , \quad x=۰$: خط هادی

$OS = SF = ۱$

$$\begin{cases} \text{جزء به جزء} : \dfrac{AB}{OA} = \dfrac{BM}{MF=AM} \quad (۱) \\ \text{جزء به کل} : \dfrac{AB}{OB} = \underbrace{\dfrac{BM}{BF} = \dfrac{AM}{OF}}_{\frac{BM}{AM}=\frac{BF}{OF}} \quad (۲) \end{cases}$$

$$\frac{BF}{OF} = \frac{AB}{OA} \Rightarrow \frac{OA \times BF}{AB} = OF = ۲$$

۱۴۱ - گزینه ۳ می‌دانیم $MT = MF$ و $AF = AH$.



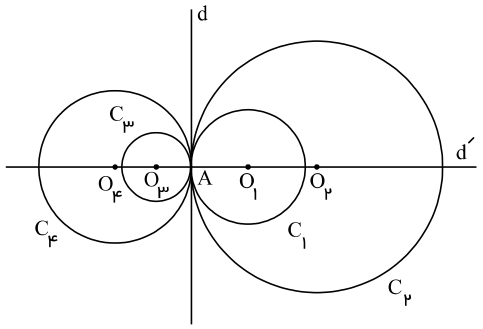
$$۳NT = ۴TH \Rightarrow \frac{NT}{TH} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \begin{cases} NT = ۴k \\ TH = ۳k \end{cases} \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{NM}{MF} = \frac{NT}{TH} = \frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} NM = ۴L \\ MF = ۳L \end{cases} \Rightarrow TM = MF = ۳L$$

$$\text{جزء به کل} : \frac{TM}{HF} = \frac{NT}{NH} \Rightarrow \frac{۳L}{HF} = \frac{۴k}{۷k} \Rightarrow HF = \frac{۲۱}{۴}L$$

$$\xrightarrow{HF \text{ وسط } A} AH = AF = \frac{۲۱}{۸}L \Rightarrow \frac{AH}{FN} = \frac{\frac{۲۱}{۸}L}{۷L} = \frac{۳}{۸}$$

۱۴۲ - گزینه ۳ می‌دانیم خط مماس بر دایره در نقطهٔ تماس، بر شعاع گذرنده از آن نقطه عمود است، بنابراین اگر مطابق شکل، $O_۱$، $O_۲$، $O_۳$ و $O_۴$ مرکز تعدادی از دایره‌های مماس بر خط d در نقطهٔ A باشند، آنگاه خط d بر شعاع‌های $O_۱A$ ، $O_۲A$ ، $O_۳A$ و $O_۴A$ از این دایره ها عمود است. در نتیجه تمامی این نقاط بر روی خطی مانند d' که در نقطهٔ A بر خط d عمود است، قرار می‌گیرند. از طرفی هر نقطهٔ واقع بر خط d' می‌تواند مرکز دایره‌ای باشد که در نقطهٔ A بر خط d عمود است، پس خط d' مکان هندسی مراکز این دایره‌ها می باشد.



۱۴۳ - گزینه ۲ نکته: در فرم ضمنی معادلهٔ دایره $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ مرکز $O=(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})$ و شعاع از دستور $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$ حاصل شود.

نکته: شرط آن‌که دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مماس بیرون باشند آن است که: $OO' = R + R'$

$$C' : x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y + ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} O' = (-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}) = (۱, -۱) \\ R' = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴ + ۴ - ۴(۱)} = ۱ \end{cases}$$

طبق فرض دو دایره مماس بیرون هستند پس:

$$OO' = R + R' \Rightarrow \sqrt{(x_{o'} - x_o)^۲ + (y_{o'} - y_o)^۲} = \sqrt{(۱ - ۲)^۲ + (-۱ - ۰)^۲} = R + ۱ \Rightarrow \sqrt{۲} = R + ۱ \to R = \sqrt{۲} - ۱$$

۱۴۴ -

$$\vec{a} = (۲, ۲, -۱) \to r\vec{b} - \vec{a} \xlongequal{r=۲} ۲\vec{b} - \vec{a} = (۶, ۲, -۲) - (۲, ۲, -۱) = (۴, ۰, -۱)$$

۱۴۵ -

$$\vec{b} + \vec{c} = (۲, -۳, ۶) \ , \ \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})}{|(\vec{b} + \vec{c})|^۲}(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{(-۱, -۳, ۰)(۲, -۳, ۶)}{۴۹}(۲, -۳, ۶) = \frac{۱}{۷}(۲, -۳, ۶)$$

۱۴۶ -

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ۰ \Leftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = ۰ \xrightarrow[|\vec{b}| \neq ۰]{|\vec{a}| \neq ۰} \cos\theta = ۰ \xrightarrow{o \leq \theta \leq \frac{\pi}{۲}} \theta = \frac{\pi}{۲}$$

۱۴۷ -

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta \Rightarrow ۷۲ = ۳ \times ۲۶ \times \sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{۱۲}{۱۳} \to \cos\theta = \pm\sqrt{۱ - (\frac{۱۲}{۱۳})^۲} = \pm\frac{۵}{۱۳} \ \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = ۳ \times ۲۶ \times (\pm\frac{۵}{۱۳}) = \pm۳۰$$

۱۴۸ -

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-۱, -۱, ۱)$$

مساحت متوازی‌الاضلاع: $S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{۱ + ۱ + ۱} = \sqrt{۳}$

۱۴۹ -

$$\vec{a} - ۲\vec{b} = (۲, ۰, -۱) - (۲, ۴, ۲) = (۰, -۴, -۳) \ , \ |\vec{a} - ۲\vec{b}| = \sqrt{۱۶ + ۹} = ۵$$

۱۵۰ -

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o} \Leftrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{o}| \Leftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta = ۰ \xleftrightarrow{|\vec{a}| \neq ۰ \ , \ |\vec{b}| \neq ۰} \sin\theta = ۰ \Leftrightarrow \theta = ۰ \vee \theta = \pi \Leftrightarrow \vec{a} || \vec{b}$$

۱۵۱ -

$$\vec{b} \times \vec{c} = (۲, ۳, -۱) \times (۱, -۱, ۳) = (۸, -۷, -۵)$$

شرط در یک صفحه بودن: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = ۰ \to (۱, m, -۱۱) \cdot (۸, -۷, -۵) = ۸ - ۷m + ۵۵ = ۰ \to m = ۹$

۱۵۲ -

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{۱۲}{۴ \times ۶} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۳}$$

روش اول:

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{۱}{۲}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{۱}{۲}|\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶\sqrt{۳}$$

روش دوم:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^۲ + (\vec{a} \cdot \vec{b})^۲ = |\vec{a}|^۲|\vec{b}|^۲ \to |\vec{a} \times \vec{b}|^۲ + (۱۲)^۲ = (۴)^۲(۶)^۲ \to |\vec{a} \times \vec{b}| = ۱۲\sqrt{۳}$$

مساحت مثلث برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲}|\vec{a} \times \vec{b}| = ۶\sqrt{۳}$$

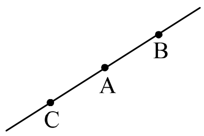
۱۵۳ -

طبق فرض سؤال: $\vec{a} = r\vec{b}$

تصویرقائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}$: $\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b} = \frac{(r\vec{b}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b} = \frac{r|\vec{b}|^۲}{|\vec{b}|^۲}\vec{b} = r\vec{b} = \vec{a}$

۱۵۴ - چون سه نقطهٔ $A(۱, ۲a - ۱, -۲)$، $B(b - ۱, a - b, ۴)$ و $C(۱, ۲, ۱)$ تشکیل مثلث نمی‌دهند یعنی در یک راستا قرار دارند. بنابراین:

$$\overrightarrow{CA} || \overrightarrow{CB} \Rightarrow (۰, ۲a - ۳, -۳) || (b - ۲, a - b - ۲, ۳)$$



از آن‌جا که مؤلفهٔ اول $\overrightarrow{CA}$ صفر است باید مؤلفهٔ اول $\overrightarrow{CB}$ نیز صفر باشد. (هر دو در صفحهٔ yoz قرار دارند.)

$$\Rightarrow \begin{cases} b-2=0 \Rightarrow b=2 \\ \dfrac{2a-3}{a-b-2}=\dfrac{-3}{3}=-1 \end{cases} \Rightarrow a=\dfrac{7}{3}$$

۱۵۵ -

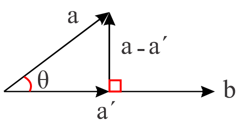
$$\begin{cases} \vec{a}=(3,-1,-2) \xrightarrow[\text{محور } y \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} a'=(-3,-1,2) \\ \vec{b}=(m,n,-1) \xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} b'=(m,-n,1) \\ a' || b' \end{cases} \Rightarrow \frac{m}{-3}=\frac{-n}{-1}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow m=-\frac{3}{2} \quad , \quad n=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad b'=(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},1)$$

$$\Rightarrow \vec{a'}+2\vec{b'}=(-6,-2,4) \Rightarrow \quad |a'+2b'|=\sqrt{36+4+16}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$$

۱۵۶ -

مطابق شکل با فرض $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ اگر تصویر قائم بردار a در امتداد بردار b، بردار a' باشد، بدیهی است:



$$\begin{cases} a' \parallel b \Rightarrow \begin{cases} a'=rb \quad (1) \\ r>0 \end{cases} \\ (a-a')\perp b \Rightarrow (a-a')\cdot b=0 \end{cases} \Rightarrow (a-rb)\cdot b=0 \Rightarrow a\cdot b-r|b|^2=0$$

$$\Rightarrow r=\frac{a\cdot b}{|b|^2} \xrightarrow{\text{طبق (۱)}} a'=\frac{a\cdot b}{|b|^2}b$$

۱۵۷ -

$$A(2,-1,1), B(3,2,-1), M(x,y,z)$$

$$\overrightarrow{AM}=M-A=(x-2,y+1,z-1), \overrightarrow{BM}=M-B=(x-3,y-2,z+1)$$

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=\frac{7}{2} \Rightarrow (x-2,y+1,z-1)\cdot(x-3,y-2,z+1)=\frac{7}{2}$$

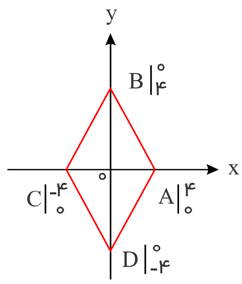
$$\Rightarrow x^2-5x+6+y^2-y-2+z^2-1=\frac{7}{2} \Rightarrow x^2-5x+y^2-y+z^2=\frac{1}{2} \ (1)$$

$$B, A \text{ وسط } N=(\frac{5}{2},\frac{1}{2},0) \Rightarrow |MN|=\sqrt{(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2+z^2}$$

$$\Rightarrow |MN|=\sqrt{\underbrace{x^2-5x+y^2-y+z^2}_{\text{طبق (۱)}\ \frac{1}{2}}+\frac{26}{4}}=\sqrt{7}$$

۱۵۸ - فرض می‌کنیم قطرهای لوزی منطبق بر محورهای مختصات باشد.

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}=(C-A)\cdot(D-C)=(-8,0)\cdot(4,-4)=-32$$



۱۵۹ -

$$|a|=2 \ , \ |b|=\sqrt{2} \ , \ |a'|=?$$

$$|2a+b|^2=12a\cdot b \Rightarrow 4|a|^2+|b|^2+4a\cdot b=12a\cdot b \Rightarrow 16+2=8a\cdot b$$

$$\Rightarrow a\cdot b=\frac{9}{4} \Rightarrow |a|\underbrace{|b|}_{\sqrt{2}}\cos\theta=\frac{9}{4} \Rightarrow \underbrace{|a|\cos\theta}_{|a'|}=\frac{9}{4\sqrt{2}}=\frac{9\sqrt{2}}{8}$$

۱۶۰ -

$$\begin{cases} a=(m,-۱,۱) \\ b=(۱,n,۲) \\ a\cdot b=۳ \end{cases} \Rightarrow a\cdot b=m-n+۲=۳ \Rightarrow m=n+۱ \ (۱)$$

$$|a+b|=۳\sqrt{۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} |a|^۲+|b|^۲+۲a\cdot b=۱۸$$

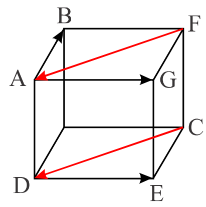
$$\Rightarrow m^۲+۱+۱+۱+n^۲+۴+۶=۱۸ \Rightarrow m^۲+n^۲=۵ \ (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow (n+۱)^۲+n^۲=۵ \Rightarrow ۲n^۲+۲n-۴=۰$$

$$\Rightarrow n^۲+n-۲=۰ \Rightarrow n=\begin{cases} ۱ \\ -۲ \end{cases} \Rightarrow m=\begin{cases} ۲ \\ -۱ \end{cases}$$

۱۶۱ -

یال مکعب $a=۳\sqrt{۲} \Rightarrow$ (وجه‌ها) قطر مربع $=a\sqrt{۲}=۳\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}=۶$



الف) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FA}=\underbrace{|AB|}_{a}\underbrace{|FA|}_{a\sqrt{۲}}\cos ۱۳۵^\circ$

$$=۳\sqrt{۲}\times ۶(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-۱۸$$

ب) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}=\underbrace{|AB|}_{a}\underbrace{|AG|}_{a}\cos ۴۵^\circ=۳\sqrt{۲}\times۳\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۹\sqrt{۲}$

۱۶۲ -

$$\begin{cases} \min(\underbrace{۱۶x^۲+۲۵y^۲+۲z^۲})=? \\ \text{جذر تک تک}: u=(۴x,۵y,\sqrt{۲}z) \Rightarrow v=(۲,۳,\frac{۱}{\sqrt{۲}}) \\ \underbrace{۸x+۱۵y+z}_{u\cdot v}=۳ \end{cases}$$

نامساوی کوشی - شوارتز : $|u\cdot v|\le|u|\,|v| \Rightarrow ۳\le\sqrt{۱۶x^۲+۲۵y^۲+۲z^۲}\times\underbrace{\sqrt{۴+۹+\frac{۱}{۲}}}_{\frac{۳\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}\le\sqrt{۱۶x^۲+۲۵y^۲+۲z^۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{۲}{۳}\le ۱۶x^۲+۲۵y^۲+۲z^۲$$

$$\Rightarrow \min(۱۶x^۲+۲۵y^۲+۲z^۲)=\frac{۲}{۳}$$

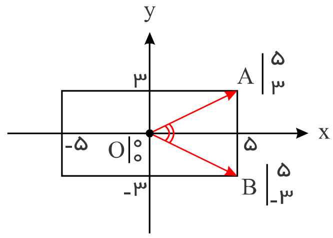
۱۶۳ -

$$\begin{cases} \max\underbrace{|۳a-b+۲c|}_{u\cdot v}=? \\ \underbrace{۹a^۲+۳b^۲+c^۲}=۳ \xrightarrow{\text{جذر تک تک}} u=(۳a,\sqrt{۳}b,c) \end{cases} \Rightarrow v=(۱,-\frac{۱}{\sqrt{۳}},۲)$$

نامساوی کوشی - شوارتز : $|u\cdot v|\le|u|\,|v| \rightarrow |۳a-b+۲c|\le\sqrt{\underbrace{۹a^۲+۳b^۲+c^۲}_{۳}}\times\sqrt{۱+\frac{۱}{۳}+۴}$

$$\Rightarrow |۳a-b+۲c|\le\sqrt{۳}\times\frac{۴}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \max|۳a-b+۲c|=۴$$

۱۶۴ - فرض می‌کنیم O محل تلاقی قطرهای مستطیل باشد و θ زاویهٔ بین $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ بنابراین داریم:

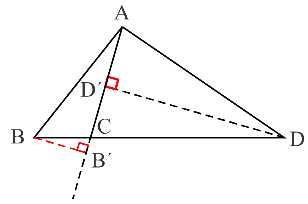


$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|OA|\,|OB|} = \frac{(۵,۳)\cdot(۵,-۳)}{\sqrt{۲۵+۹}\times\sqrt{۲۵+۹}} = \frac{۲۵-۹}{۲۵+۹}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{۱۶}{۳۴} = \frac{۸}{۱۷}$$

۱۶۵ - چون در تمامی جملات بردار $\overrightarrow{AC}$ وجود دارد، تصویر بردارهای دیگر را بر $\overrightarrow{AC}$ در نظر می‌گیریم.

الف) نادرست زیرا:



$$\begin{cases} \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = |AD'|\,|AC| \\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} = |AC|\,|AC| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} < |AC|\,|AC|$$

ب) درست زیرا:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |AB'|\,|AC| \\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} = |AC|\,|AC| \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} > \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$$

۱۶۶ -

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (۲,-۱,۳),\ \overrightarrow{AC} = (-۲,۲,۲)$$

$$\text{مساحت متوازی الاضلاع} = \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & -۱ & ۳ \\ -۲ & ۲ & ۲ \end{vmatrix} = i(-۲-۶) - j(۴+۶) + k(۴-۲) = -۸i - ۱۰j + ۲k$$

$$\xrightarrow{\text{اندازه}} \text{مساحت متوازی‌الاضلاع} = \sqrt{۶۴+۱۰۰+۴} = \sqrt{۱۶۸} = ۲\sqrt{۴۲}$$

۱۶۷ -

فرض: $a+b+c=\bar{۰}$

طرفین فرض را یکبار در a و بار دیگر در b ضرب خارجی می‌کنیم:

$$\begin{cases} \xrightarrow{a\times} \underbrace{a\times a}_{\bar{۰}} + a\times b + a\times c = \underbrace{a\times\bar{۰}}_{\bar{۰}} \Rightarrow a\times b = -a\times c \Rightarrow a\times b = c\times a\ (۱) \\ \xrightarrow{b\times} b\times a + \underbrace{b\times b}_{\bar{۰}} + b\times c = \underbrace{b\times\bar{۰}}_{\bar{۰}} \Rightarrow b\times c = -b\times a \Rightarrow b\times c = a\times b\ (۲) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۲),(۱)}\ a\times b = b\times c = c\times a$$

۱۶۸ -

$$\begin{cases} a,b \text{ در یک راستا هستند.} \Rightarrow a \parallel b \Rightarrow \begin{cases} b = ra\ (۱) \\ r\in\mathbb{R}-\{۰\} \end{cases} \\ \text{فرض}: a=(a_۱,a_۲) \xrightarrow{\text{طبق } (۱)} b=(ra_۱,ra_۲) \Rightarrow |b| = \sqrt{r^۲a_۱^۲+r^۲a_۲^۲} \end{cases}$$

$$a' = \frac{a\cdot b}{|b|^۲}b = \frac{ra_۱^۲+ra_۲^۲}{r^۲a_۱^۲+r^۲a_۲^۲}b = \frac{ra_۱^۲+ra_۲^۲}{r(ra_۱^۲+ra_۲^۲)}b = \frac{۱}{r}b \Rightarrow a' = \frac{۱}{r}b \Rightarrow b = ra'\ (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲),(۱)} ra' = ra \Rightarrow a' = a$$

۱۶۹ - الف)

$$\begin{cases} a,b \neq \bar{۰} \\ a\parallel b \Rightarrow \text{زاویهٔ بین دو بردار}\ \theta = ۰ \text{ یا } \pi \Rightarrow |a\times b| = |a|\,|b|\underbrace{\sin\theta}_{۰} = ۰ \end{cases} \Rightarrow |a\times b| = ۰ \Rightarrow a\times b = \bar{۰}$$

ب)

$$\begin{cases} a, b \neq \bar{\circ} \\ a \times b = \bar{\circ} \Rightarrow |a \times b| = \circ \Rightarrow \underbrace{|a|\,|b|}_{\neq \circ} \sin\theta = \circ \Rightarrow \sin\theta = \circ \end{cases} \Rightarrow \theta = \circ \text{ یا } \pi \Rightarrow a \parallel b$$

۱۷۰ - بردار عمود بر دو بردار a و b، برداری است که از ضرب خارجی آن دو به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases} a = (۱, -۳, ۲)\times \\ b = (-۲, ۱, -۵) \end{cases}$$
$$a \times b = (۱۵ - ۲, -۴ + ۵, ۱ - ۶) = (۱۳, ۱, -۵)$$

و نیز هر مضربی از این بردار بر a و b عمود است.

۱۷۱ -

$$|a| = ۳ \ , \ \ |b| = ۲۶$$

$$|a \times b| = ۷۲ \Rightarrow |a|\,|b| \sin\theta = ۷۲ \Rightarrow ۳ \times ۲۶ \sin\theta = ۷۲ \Rightarrow \sin\theta = \frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{۱ - \sin^۲\theta} = \pm\sqrt{۱ - \frac{۱۴۴}{۱۶۹}} = \pm\sqrt{\frac{۲۵}{۱۶۹}} = \pm\frac{۵}{۱۳}$$

$$\Rightarrow a \cdot b = |a|\,|b| \cos\theta = ۳ \times ۲۶ \times (\pm\frac{۵}{۱۳}) = \pm ۳۰$$

۱۷۲ -

تصویر قائم بردار a در امتداد b $\quad a' = \frac{a \cdot b}{|b|^۲} b$

الف) $\begin{cases} a = (۲, -۱, ۲) \\ b = i = (۱, \circ, \circ) \Rightarrow |b| = ۱ \end{cases} \Rightarrow a \cdot b = ۲ + \circ + \circ = ۲ \Rightarrow a' = \frac{۲}{۱} b = ۲b = (۲, \circ, \circ)$

ب) $\begin{cases} a = (۲, ۳, ۱) \Rightarrow a \cdot b = ۶ + ۶ + ۱ = ۱۳ \\ b = (۳, ۲, ۱) \Rightarrow |b| = \sqrt{۹ + ۴ + ۱} = \sqrt{۱۴} \end{cases} \Rightarrow a' = \frac{۱۳}{۱۴} b = \frac{۱۳}{۱۴}(۳, ۲, ۱)$

ج) $\begin{cases} a = (۱, ۱, \circ) \Rightarrow a \cdot b = -۱ + ۲ + \circ = ۱ \\ b = (-۱, ۲, ۴) \Rightarrow |b| = \sqrt{۱ + ۴ + ۱۶} = \sqrt{۲۱} \end{cases} \Rightarrow a' = \frac{۱}{۲۱} b = \frac{۱}{۲۱}(-۱, ۲, ۴)$

۱۷۳ - روش اول:

$$|a| = ۲ \ , \ \ |b| = ۱ \ , \ \ |c| = ۳ \qquad a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = ?$$

فرض : $a + b + c = \bar{\circ} \xrightarrow{\text{توان دوم اندازه}} \underbrace{|a + b + c|^۲}_{\bar{\circ}} = |a|^۲ + |b|^۲ + |c|^۲ + ۲a \cdot b + ۲a \cdot c + ۲b \cdot c$

$$\Rightarrow \circ = ۴ + ۱ + ۹ + ۲(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) \Rightarrow a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c = -۷$$

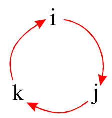
روش دوم: کافی است طرفین فرض را یکبار در a، یکبار در b و بار دیگر در c ضرب داخلی کنیم.

$$a + b + c = \bar{\circ} \ \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{a\cdot} & a \cdot a + a \cdot b + a \cdot c = \underbrace{a \cdot \bar{\circ}}_{\circ} \Rightarrow a \cdot b + a \cdot c = -|a|^۲ = -۴ \\ \xrightarrow{b\cdot} & b \cdot a + b \cdot b + b \cdot c = \underbrace{b \cdot \bar{\circ}}_{\circ} \Rightarrow a \cdot b + b \cdot c = -|b|^۲ = -۱ \\ \xrightarrow{c\cdot} & c \cdot a + c \cdot b + c \cdot c = \underbrace{c \cdot \bar{\circ}}_{\circ} \Rightarrow a \cdot c + b \cdot c = -|c|^۲ = -۹ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} ۲(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) = -۱۴ \Rightarrow a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c = -۷$$

۱۷۴ - گزینه ۲ از تبدیل دایره‌ای زیر برای محاسبه ضرب خارجی بردارهای i و j و k استفاده می‌کنیم.

$$(\vec{i} \times \underbrace{(\vec{i} \times \vec{j})}_{k}) \times \vec{k} = \underbrace{(i \times k)}_{-j} \times k = -j \times k = -i$$



۱۷۵ - گزینه ۲

$$(a - c) \times b = a \times c \Rightarrow a \times b - c \times b = a \times c$$

$\xrightarrow[\text{ضرب داخلی می‌کنیم } a]{\text{طرفین را در}} \underbrace{a \cdot (a \times b)}_{\circ} - a \cdot (c \times b) = \underbrace{a \cdot (a \times c)}_{\circ} \Rightarrow a \cdot (c \times b) = \circ \Rightarrow$ بردارهای a, b, c در یک صفحه‌اند.

۱۷۶ - گزینه ۱ زاویه A در حقیقت زاویه بین بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ می باشد.

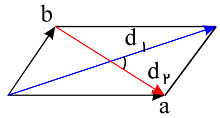
$$\overrightarrow{AB}=(1,-2,2)$$
$$\overrightarrow{AC}=(-3,0,-3)$$
$$\cos\widehat{A}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{-3+0+6}{3\times\sqrt{18}}=\frac{3}{3\times3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

۱۷۷ - گزینه ۳

نکته: حجم متوازی السطوح ساخته شده روی ۳ بردار x و y و z از دستور $|\overrightarrow{x}\cdot(\overrightarrow{y}\times\overrightarrow{z})|$ حاصل می‌شود.

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}1&-2&3\\2&1&-1\end{vmatrix}=(-1,7,5)$$
$$V=\left|(\bar{a}\times\bar{b})\cdot(\bar{a}\times\bar{b})\right|=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|^2=(\sqrt{75})^2=75$$

۱۷۸ - گزینه ۳ **مطابق شکل بردارهای $d_1=a+b$ و $d_2=a-b$ قطرهای این متوازی الاضلاع هستند:**



$$\begin{cases}d_1=a+b=(4,2,-2)\Rightarrow|d_1|=2\sqrt{6}\\d_2=a-b=(2,4,2)\Rightarrow|d_2|=2\sqrt{6}\end{cases}$$

کسینوس زاویه‌ی بین d_1 و d_2 عبارت است از :

$$\cos\theta=\frac{d_1\cdot d_2}{|d_1|\,|d_2|}=\frac{(4,2,-2)\cdot(2,4,2)}{2\sqrt{6}\times2\sqrt{6}}=\frac{8+8-4}{24}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$$

۱۷۹ - گزینه ۱ **می‌دانیم مختصات هر پیکان برابر تفاضل نقطه‌ی انتهای آن از نقطه‌ی ابتدای آن می‌باشد به همین دلیل داریم.**

$$A\vec{M}=\frac{2}{3}A\vec{B}\Rightarrow3A\vec{M}=2A\vec{B}\Rightarrow3(M-A)=2(B-A)$$
$$\Rightarrow3M-3A=2B-2A\Rightarrow3M=2B+A\Rightarrow3M=2(-1,2,4)+(5,-4,1)$$
$$\Rightarrow3M=(3,0,9)\Rightarrow M=(1,0,3)\Rightarrow|OM|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

۱۸۰ - گزینه ۲ **باتوجه به رابطه $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$ و $AB=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ داریم.**

$$\overrightarrow{AM}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\Rightarrow4(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA})=-3(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$
$$\Rightarrow4\overrightarrow{OM}-4\overrightarrow{OA}=-3\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OA}\Rightarrow4\overrightarrow{OM}=-3\overrightarrow{OB}+7\overrightarrow{OA}$$
$$\Rightarrow4\overrightarrow{OM}=-3(-i+5j+4k)+7(3i+j)=24i-8j-12k\Rightarrow\overrightarrow{OM}=6i-2j-3k$$
$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{j}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|\left|\overrightarrow{j}\right|}=\frac{-2}{\sqrt{36+4+9}}=-\frac{2}{7}$$

۱۸۱ - گزینه ۱ **راه‌حل اول: چون سه بردار مذکور دوبه‌دو بر هم عمودند، پس حاصلضرب داخلی دوبه‌دوی آنها برابر صفر است، لذا داریم:**

$$V_1\cdot V_2=0\Rightarrow(1,-1,a)\cdot(2,b,1)=0\Rightarrow2-b+a=0\Rightarrow a-b=-2\quad(1)$$
$$V_1\cdot V_3=0\Rightarrow(1,-1,a)\cdot(c,3,2)=0\Rightarrow c-3+2a=0\Rightarrow2a+c=3\quad(2)$$
$$V_2\cdot V_3=0\Rightarrow(2,b,1)\cdot(c,3,2)=0\Rightarrow2c+3b+2=0\Rightarrow3b+2c=-2\quad(3)$$

با حل این سه معادله، مقادیر $a=14$، $b=16$ و $c=-25$ به دست می‌آید که در آن صورت:

$$a+b+c=5$$

راه‌حل دوم: چون V_1 بر هر دو بردار V_2 و V_3 عمود است، بر مجموع یا تفاضل آن دو نیز عمود است، پس:

$$V_1\cdot(V_2-V_3)=0\Rightarrow(1,-1,a)\cdot(2-c,b-3,-1)=0\Rightarrow2-c-b+3-a=0\Rightarrow a+b+c=5$$

توجه: عملی که در راه‌حل دوم انجام دادیم، معادل با این است در راه‌حل اول، معادله (۲) را از معادله (۱) کم کنیم.

۱۸۲ - گزینه ۴ **طبق فرض داریم:**

$$\begin{cases}a\times d=c\times b\\a\times c=d\times b\end{cases}\xrightarrow[\text{(نظیر به نظیر)}]{\text{جمع طرفین تساوی}}\underline{a}\times d+\underline{a}\times c=c\times\underline{\underline{b}}+d\times\underline{\underline{b}}$$
$$\Rightarrow a\times(d+c)=(c+d)\times b\Rightarrow a\times(c+d)-\underbrace{(c+d)\times b}_{-b\times(c+d)}=\overrightarrow{0}$$
$$\Rightarrow a\times(c+d)+b\times(c+d)=0\Rightarrow(a+b)\times(c+d)=\overrightarrow{0}$$

چون ضرب خارجی دو بردار غیر صفر $a+b$ و $c+d$ برابر صفر شده، پس این دو بردار با هم موازی‌اند.

۱۸۳ ـ گزینه ۳

$\vec{a}(۳,m,۵)\ ,\ \ b(۳-m,۷,۰)$

$(a+b)\perp(a-b)\Rightarrow |a|=|b|$

$\sqrt{۹+m^۲+۲۵}=\sqrt{(۳-m)^۲+۴۹}\xrightarrow{\text{توان۲}} m^۲+۳۴=۹-۶m+m^۲+۴۹$

$\Rightarrow ۶m=۲۴\Rightarrow m=۴\Rightarrow \begin{cases}\vec{a}=(۳,۴,۵)\\ b=(-۱,۷,۰)\end{cases}$

تذکر: برای محاسبه زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ از دستور $\cos\alpha=\dfrac{a\cdot b}{|a|\,|b|}$ استفاده می‌کنیم.

$$\cos\alpha=\frac{a\cdot b}{|a|\,|b|}=\frac{-۳+۲۸+}{\sqrt{۹+۱۶+۲۵}\times\sqrt{۱+۴۹}}=\frac{۲۵}{۵۰}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\alpha=۶۰^\circ$$

۱۸۴ ـ گزینه ۳

$|a-b|^۲=|a|^۲+|b|^۲-۲a\cdot b\Rightarrow(\sqrt{۴+۱+۹})^۲=۲۵+۴۹-۲a\cdot b$

$\Rightarrow ۱۴=۷۴-۲a\cdot b\Rightarrow a\cdot b=-۳۰$

$\Rightarrow \underbrace{\left|\overrightarrow{b'}\right|}_{\text{اندازه تصویر } b \text{ روی } a}=\dfrac{|a\cdot b|}{|a|}=\dfrac{|-۳۰|}{۵}=۶\Rightarrow\dfrac{|b'|}{|a|}=\dfrac{۶}{۵}=۱٫۲$

۱۸۵ ـ گزینه ۲ نکته: تصویر بردار $\vec{a}$ روی بردار $\vec{b}$ از دستور $a'=\dfrac{a\cdot b}{|b|^۲}b$ حاصل می‌شود.

نکته: اگر α و β و γ زوایای بردار $\vec{b}$ با محورهای مختصات باشد بردار یکه (جهت) بردار $\vec{b}$ از دستور $\overrightarrow{e_b}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ با شرط $\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta+\cos^۲\gamma=۱$ حاصل می‌شود.

نکته: تصویر بردار $\vec{a}$ روی $\vec{b}$ همان تصویر $\vec{a}$ روی بردار یکه $\vec{b}$ یا هر مضربی از بردار یکه $\vec{b}$ می‌باشد.

$\vec{a}=(۷,۳,-\sqrt{۲})$

$\overrightarrow{e_b}=(\cos ۶۰,\cos ۶۰,\cos\gamma)$

از طرفی : $\cos^۲ ۶۰+\cos^۲ ۶۰+\cos^۲\gamma=۱\rightarrow\dfrac{۱}{۴}+\dfrac{۱}{۴}+\cos^۲\gamma=۱\rightarrow\cos^۲\gamma=\dfrac{۱}{۲}\rightarrow\cos^۲\gamma=\pm\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$

$\xrightarrow{\text{مولفه‌های مثبت}}\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$

$\rightarrow\overrightarrow{e_b}=(\dfrac{۱}{۲},\dfrac{۱}{۲},\dfrac{\sqrt{۲}}{۲})\xrightarrow{\times ۲}(۱,۱,\sqrt{۲})=\vec{x}$

نام این بردار را $\vec{x}$ نامیده و تصویر $\vec{a}$ را روی آن می‌یابیم:

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}\cdot\vec{x}}{|\vec{x}|^۲}\vec{x}=\frac{۷+۳-۲}{\sqrt{۱+۱+۲}}(۱,۱,\sqrt{۲})=۲(۱,۱,\sqrt{۲})=(۲,۲,۲\sqrt{۲})$$

۱۸۶ ـ گزینه ۱ نکته: شرط لازم و کافی برای آنکه بردار $\vec{a}$ را بتوان به صورت مجموع یا ترکیب خطی از بردارهای b و c نوشت آن است که a و b و c همگی در یک صفحه باشند.

نکته: شرط آنکه سه بردار a و b و c همگی در یک صفحه باشند آن است که ضرب مختلط آن‌ها صفر باشد یعنی $a\cdot(b\times c)=۰$ باشد.

$\vec{a}(-۳,۱۰,m)\quad ,\quad \vec{b}(۳,۱,۲)\quad ,\quad \vec{c}(۱,۴,-۲)$

$$b\times c=\begin{pmatrix}۳&۱&۲\\ ۱&۴&-۲\end{pmatrix}=(-۱۰,۸,۱۱)$$

$$a\cdot(b\times c)=۰\Rightarrow(-۳,۱۰,m)\cdot(-۱۰,۸,۱۱)=۰\Rightarrow ۳۰+۸۰+۱۱m=۰\Rightarrow m=-۱۰$$

۱۸۷ ـ گزینه ۲ حجم متوازی‌السطوح ساخته روی بردارهای a و b و $a\times b$ برابر $(a\times b)\cdot(a\times b)$ یعنی $|a\times b|^۲$ است.

$$a\times b=\begin{bmatrix}i&j&k\\ ۲&-۳&۱\\ ۱&۲&-۴\end{bmatrix}=۱۰i+۹j+۷k$$

بنابراین

$\text{حجم متوازی‌السطوح}=|a\times b|^۲=۱۰^۲+۹^۲+۷^۲=۱۰۰+۸۱+۴۹=۲۳۰$

پس گزینهٔ ۲ درست است.

۱۸۸ ـ گزینه ۳

نکته: اگر ضرب مختلط ۳ بردار غیر صفر برابر صفر باشد $(a\cdot(b\times c)=۰)$ ۳ بردار در یک صفحه قرار دارند.

$$a\times b+b\times c+c\times a=\overrightarrow{o}\xrightarrow[\text{داخلی می‌کنیم.}]{\text{طرفین را در } \overrightarrow{a} \text{ ضرب}} \underbrace{a\cdot(a\times b)}_{\circ}+a\cdot(b\times c)+\underbrace{a\cdot(c\times a)}_{\circ}=\circ$$

$\Rightarrow a\cdot(b\times c)=\circ\Rightarrow$ سه بردار c, b, a در یک صفحه قرار دارند.

۱۸۹ - گزینه ۴ نکته (۱): مساحت مثلثی که روی دو بردار $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ ساخته می‌شود، از دستور $\frac{۱}{۲}|a\times b|$ حاصل می‌شود.

نکته (۲):

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{a}=\overrightarrow{o}\ ,\ \overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=-\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$$

$$S_{\text{مثلث}}=\frac{۱}{۲}|(a\times b)\times(a+۲b)|$$

ابتدا بردارهای $a\times b$ و $a+۲b$ را می‌سازیم:

$$\begin{matrix}\overrightarrow{a}=(۲,-۱,۱)\\ \overrightarrow{b}=(\circ,۱,-۱)\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}a\times b=\begin{pmatrix}۲&-۱&۱\\ \circ&۱&-۱\end{pmatrix}=(\circ,۲,۲)\\ a+۲b=(۲,-۱,۱)+(\circ,۲,-۲)=(۲,۱,-۱)\end{cases}$$

$$\Rightarrow(a\times b)\times(a+b)=\begin{pmatrix}\circ&۲&۲\\ ۲&۱&-۱\end{pmatrix}=(-۴,۴,-۴)$$

$$S_{\triangle}=\frac{۱}{۲}|(a\times b)\times(a+۲b)|=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۱۶+۱۶}=۲\sqrt{۳}$$

۱۹۰ - گزینه ۴

نکته: شرط آن‌که سه بردار $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ در یک صفحه قرار داشته باشند آن است که ضرب مختلط آن‌ها صفر باشد.

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\circ$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}i&j&k\\ -۱&۲&۳\\ ۲&\circ&۱\end{vmatrix}=۲i+۷j-۴k$$

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\circ\Rightarrow-۸+۷m-۲\circ=\circ\Rightarrow m=۴$$

۱۹۱ - گزینه ۴ نکته: حجم متوازی سطوح ساخته روی سه بردار a و b و c برابر قدر مطلق ضرب مختلط این سه بردار است:

$$V=|a\cdot(b\times c)|=|b\cdot(a\times c)|=|c\cdot(a\times b)|$$

حجم متوازی‌السطوح ساخته شده روی سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ برابراست با:

$$V=|a\cdot((a\times b)\times b)|=|b\cdot((a\times b)\times a)|=\underbrace{|(a\times b)\cdot(a\times b)|}_{\text{محاسبات کمتر}}$$

$$a\times b=\begin{bmatrix}i&j&k\\ ۲&۳&-۱\\ ۴&\circ&۱\end{bmatrix}=۳i-۶j-۱۲k$$

$$V=|(a\times b)\cdot(a\times b)|=|a\times b|^۲=(\sqrt{۹+۳۶+۱۴۴})^۲=۱۸۹$$

۱۹۲ - گزینه ۳

بردارهای گذرا بر دو به دوی نقاط منطبق‌اند بنابراین

$$\frac{۲-\circ}{۱-\circ}=\frac{a-۲}{-۱-۲}=\frac{b-۱}{۲-۱}$$

$$\begin{cases}a-۲=-۶\\ b-۱=۲\end{cases}\Rightarrow a+b=-۱$$

۱۹۳ - گزینه ۳ مساحت متوازی‌الاضلاع برابر اندازه حاصلضرب خارجی دو بردار است.

$$a\times b=\begin{vmatrix}۲&-۱&۳\\ ۴&\circ&-۱\end{vmatrix}=(۱,۱۴,۴)\Rightarrow|a\times b|=\sqrt{۱+۱۹۶+۱۶}=\sqrt{۲۱۳}$$

۱۹۴ - گزینه ۳

حاصلضرب $a\cdot(b\times c)$ یک عدد است که حجم متوازی‌السطوح بر روی سه بردار را نشان می‌دهد و جهت آن در جابجایی‌ها حفظ می‌شود همواره داریم.

$$a\cdot(b\times c)=b\cdot(c\times a)=c\cdot(a\times b)$$

توجه نمایید که گزینه ۱ اصلا تعریف نمی‌شود و گزینه‌های ۲ و ۴ قرینه $a\cdot(b\times c)$ می‌باشند.

۱۹۵ - گزینه ۴ مساحت مثلث برابر نصف اندازه حاصلضرب خارجی دو برداری است که بر روی سه نقطه ساخته شود.

$$\overrightarrow{AB}=(-۲,۳,-۳) \quad \overrightarrow{AC}=(-۴,۳,-۴) \rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-۲ & ۳ & -۳\\ -۴ & ۳ & -۴\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-۳,۴,۶)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{۹+۱۶+۳۶}=\sqrt{۶۱}$$

پس مساحت مثلث برابر $\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۱}$ می‌باشد.

۱۹۶ - گزینه ۱

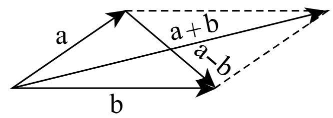
ضرب مختلط سه بردار مذکور صفر است.

$$a(۱,۰,۱)\ ,\ b(۰,۱,۱)\ ,\ c(m,-۱,۲)$$

$$a\times b=\begin{vmatrix}۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۱\end{vmatrix}=(-۱,-۱,۱)$$

$$c\cdot(a\times b)=(m,-۱,۲)\cdot(-۱,-۱,۱)=-m+۱+۲=۰\Rightarrow m=۳$$

۱۹۷ - گزینه ۴ اگر بر روی دو بردار متوازی‌الاضلاع ساخته شود دو قطر آن برابر مجموع دو بردار و همچنین تفاضل دو بردار می‌باشد.



$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=۳i+j\ ,\ a-b=-i-۵j+۲k$$

$$|a-b|=\sqrt{۱+۲۵+۴}=\sqrt{۳۰}\ ,\ |a+b|=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰}$$

اندازه قطر بزرگتر در این جا برابر $\sqrt{۳۰}$ است.

۱۹۸ - گزینه ۱ بنابر شرط عمود بودن دو بردار داریم: $a\cdot b=۰\Rightarrow -۲+۸-۳m=۰$ در نتیجه $m=۲$ لذا مجموع دو بردار چنین است.

$$a+b=(-۱,۶,-۱)\Rightarrow|a+b|=\sqrt{۱+۳۶+۱}=\sqrt{۳۸}$$

۱۹۹ - گزینه ۱ تصویر قائم بردار a روی امتداد بردار b به صورت $\frac{a\cdot b}{|b|^۲}\overrightarrow{b}$ است.

در این پرسش

$$\left.\begin{array}{l}a\cdot b=-۱(۲)+(۰)(۱)+(۲)(-۴)=-۱۰\\ |b|^۲=(-۱)^۲+(۲)^۲=۵\end{array}\right\}\Rightarrow a'=\frac{a\cdot b}{|b|^۲}b=-\frac{۱۰}{۵}(-i+۲k)$$

لذا تصویر مورد نظر $-۲(-i+۲k)$ یا به صورت $(۲,۰,-۴)$ است.

۲۰۰ - گزینه ۳

$$a\cdot b=۱\times۲\times\cos۶۰=۱$$

$$\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(۲\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)=۲|a|^۲+a\cdot b-۲b\cdot a-|b|^۲=|a|^۲-a\cdot b-|b|^۲=۲-۱-۴=-۳$$

$$\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|^۲=|a|^۲+|b|^۲-۲\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=۱+۴-۲=۳\Rightarrow|a-b|=\sqrt{۳}$$

$$\left|۲\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|^۲=۴|a|^۲+|b|^۲+۴\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=۴+۴+۴=۱۲\Rightarrow|۲a+b|=\sqrt{۱۲}$$

$$\cos\theta=\frac{\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(۲\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)}{|a-b|\,|۲a+b|}=\frac{-۳}{\sqrt{۳}\times\sqrt{۱۲}}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta=۱۲۰^\circ$$

۲۰۱ - گزینه ۱

فصل مشترک دو صفحه xoz, xoy همان محور xها است بنا بر این نقطه A روی محور xهاست. بنابراین مولفه‌های y و z برابر صفر است.

$$\begin{cases}m^۲+۴m+۳=۰\Rightarrow\{-۱,۳\}\\ m-۱=۰\Rightarrow\{۱\}\end{cases}$$

بنابراین هیچ مقداری برای m یافت نمی شود که هر دو مؤلفه را صفر کند.

۲۰۲ - گزینه ۲

$$|a+b+c|^۲=۰\Rightarrow|a|^۲+|b|^۲+|c|^۲+۲(a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c)=۰$$

$$\Rightarrow ۲۵+۲۵+۲۵+۲x=۰\ \Rightarrow\ x=\frac{-۷۵}{۲}$$

۲۰۳ - گزینه ۱

$$\begin{cases}u(a\ ,\ b\ ,\ c)\\ a+۲b+۲c=۹\end{cases}\Rightarrow v(۱\ ,\ ۲\ ,\ ۲)$$

$$|u\cdot v|\le|u|\times|v|\Rightarrow|a+۲b+۲c|\le\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}\times\sqrt{۱+۴+۴}$$

$$\Rightarrow ۹\le ۳\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}\Rightarrow ۹\le a^۲+b^۲+c^۲\Rightarrow\min(a^۲+b^۲+c^۲)=۹$$

۲۰۴ - گزینه ۳

$a\times b = a\times c \Rightarrow a\times b - a\times c = \vec{0} \Rightarrow a\times(b-c)=\vec{0} \Rightarrow a \parallel (b-c)$

$\Rightarrow \begin{cases} b-c=(\alpha-2)i+(1-\beta)j+2k \\ a=i+2j+k\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\alpha-2}=\frac{2}{1-\beta}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases}\alpha=4\\ \beta=-3\end{cases} \Rightarrow \alpha+\beta=1$

۲۰۵ - گزینه ۲

بردار $\vec{u}$ بر محور xها عمود است پس مؤلفه x آن صفر است، زیرا این بردار در صفحه yoz قرار می گیرد.

$$\left.\begin{cases} m^2+m=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0\\ m=-1\end{cases} \\ m+1\neq 0\Rightarrow m\neq -1\end{cases}\right\} \xrightarrow{\cap} m=0 \Rightarrow \vec{u}(0,1,1)$$

تصویر روی xoz $u'(0,0,1) \Rightarrow |u'|=1$

۲۰۶ - گزینه ۴

اگر برداری بر صفحه‌ی xoy عمود باشد آنگاه بر محور z ها منطبق است یعنی مولفه‌های x و y آن صفر است.

$\vec{u}$ عمود بر xoy : $\begin{cases} a+2b=0\Rightarrow a=-2\\ b-1=0\Rightarrow b=1\end{cases}$

$\Rightarrow w(-4,-4,-1) \Rightarrow$ تصویر بر محور y ها $\Rightarrow w'(0,-4,0)$

۲۰۷ - گزینه ۳ فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x,y,z)$ تا صفحه yoz برابر $|x|$ می‌باشد.

فاصله A تا صفحه yoz $=|x|=|m|=2\Rightarrow m=\pm 2$

و فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x,y,z)$ از محور yها برابر $\sqrt{x^2+z^2}$ است.

فاصله A تا صفحه y $=\sqrt{m^2+1}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

۲۰۸ - گزینه ۲

$|a\times(b\times c)|^2+|a\cdot(b\times c)|^2=|a|^2|b\times c|^2$

بنا به فرض $a\cdot(b\times c)=45\,,\ |a|=5\,,\ |b|=3\,,\ |c|=4$ و زاویه دو بردار b و c برابر 60° است. پس:

$|a\times(b\times c)|^2+45^2=5^2\times3^2\times4^2\times\sin^2 60^\circ \Rightarrow |a\times(b\times c)|^2=60^2\times\frac{3}{4}-45^2$

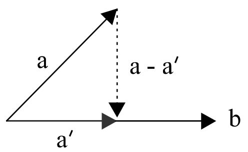
$\Rightarrow |a\times(b\times c)|^2=30^2\times3-45^2=2700-2025=675$

$|a\times(b\times c)|^2=27\times25\Rightarrow|a\times(b\times c)|=15\sqrt{3}$

۲۰۹ - گزینه ۴

مطابق شکل $(a'-a)$ بر b عمود است پس $b\cdot(a'-a)=0$

داریم:



$a'-a=(m,-m,3)-(m-2,-7,5)=(2,-m+7,-2)$

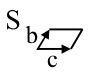
$b\cdot(a'-a)=0\Rightarrow(2,-2,1)\cdot(2,-m+7,-2)=0$

$\Rightarrow 4+2m-14-2=0\Rightarrow m=6\Rightarrow a'=(6,-6,3)$

$\Rightarrow |a'|=\sqrt{36+36+9}=\sqrt{81}=9$

۲۱۰ - گزینه ۱

۱) $|a+b|^2=|a|^2+|b|^2+2a\cdot b$

۲) 

$=|b\times c|$

۳) $|a\times b|^2+(a\cdot b)^2=|a|^2|b|^2$

$a+b=(-1,4,7)\Rightarrow |a+b|^2=|a|^2+|b|^2+2a\cdot b=(-1)^2+4^2+7^2$

$\Rightarrow 3^2+7^2+2a\cdot b=66\Rightarrow a\cdot b=4$

$|a\times b|^2+(a\cdot b)^2=|a|^2|b|^2\Rightarrow|a\times b|^2+4^2=3^2\times7^2\Rightarrow|a\times b|=\sqrt{17\times25}=5\sqrt{17}$

مساحت متوازی‌الاضلاع بنا شده روی a و b $=|a\times b|=5\sqrt{17}$

۲۱۱ – گزینه ۲ اگر معادلات وجه‌های یک مکعب مستطیل به صورت $x=۱$ ،$x=۳$ ،$y=۱$ ،$y=۴$ ،$z=-۲$ ،$z=۲$ باشد، روابط مشخص کنندهٔ وجه‌های مکعب عبارتند از:

$$\begin{cases} ۱\le x\le ۳ \\ ۱\le y\le ۴ \\ z=۲ \end{cases} \quad \begin{cases} ۱\le x\le ۳ \\ ۱\le y\le ۴ \\ z=-۲ \end{cases} \quad \begin{cases} ۱\le x\le ۳ \\ -۲\le z\le ۲ \\ y=۱ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۱\le x\le ۳ \\ -۲\le z\le ۲ \\ y=۴ \end{cases} \quad \begin{cases} ۱\le y\le ۴ \\ -۲\le z\le ۲ \\ x=۱ \end{cases} \quad \begin{cases} ۱\le y\le ۴ \\ -۲\le z\le ۲ \\ x=۳ \end{cases}$$

فقط مورد (پ) صحیح است.

۲۱۲ – گزینه ۲

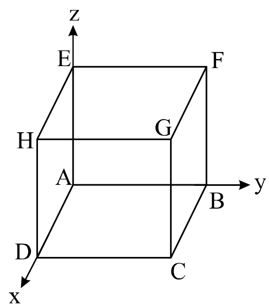
$$\begin{cases} \vec{a}=(\sqrt{۲}m, m-۲, -m) \\ |a|=۲ \end{cases} \Rightarrow \sqrt{۲m^۲+(m-۲)^۲+m^۲}=۴$$

$$\Rightarrow ۴m^۲-۴m+۴=۴ \Rightarrow ۴m^۲-۴m=۰ \Rightarrow ۴m(m-۱)=۰ \Rightarrow m=\left\langle \begin{matrix} ۱ & \text{ق ق} \\ \\ ۰ & \text{غ ق ق} \end{matrix}\right.$$

مقدار $m=۰$ قابل قبول نیست زیرا به ازای آن، بردار $\vec{a}$ به صورت $\vec{a}=(۰,-۲,۰)$ تبدیل می‌شود که بر صفحهٔ xoz عمود است، که با فرض مسأله در تناقض است.

۲۱۳ – گزینه ۳ رأس A را منطبق بر مبدأ مختصات قرار می‌دهیم و به رئوس مکعب، مختصات داده و بردارهای $\overrightarrow{DF}$ و $\overrightarrow{BC}$ را می‌سازیم.

فرض می‌کنیم یال‌های AE ،AB و AD به‌ترتیب بر محور zها و yها و xها منطبق بوده و طول یال‌ها یک واحد باشد.



$$\begin{cases} D=(۱,۰,۰)\ ,\ F=(۰,۱,۱) \Rightarrow \overrightarrow{DF}=F-D=(-۱,۱,۱) \\ B=(۰,۱,۰)\ ,\ C=(۱,۱,۰) \Rightarrow \overrightarrow{BC}=C-B=(۱,۰,۰) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos\theta \frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DF}}{|BC||DF|}=\frac{-۱}{\sqrt{۳}}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۲۱۴ – گزینه ۲

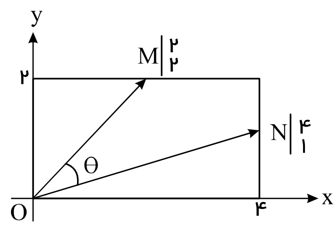
$$A(۲,۱,-۱)\ ,\ B(-۲,۳,۱)\ ,\ M=(x,y,z)\ ,\ N=(۰,۲,۰)$$

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=۴ \Rightarrow (x-۲,y-۱,z+۱)\cdot(x+۲,y-۳,z-۱)=۴$$

$$\Rightarrow x^۲-۴+y^۲-۴y+۳+z^۲-۱=۴ \Rightarrow x^۲+y^۲-۴y+z^۲=۶ \quad (۱)$$

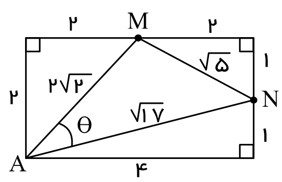
$$|MN|=\sqrt{x^۲+(y-۲)^۲+z^۲}=\sqrt{\underbrace{x^۲+y^۲-۴y+z^۲}_{۶}+۴}\ \overset{\text{طبق (۱)}}{=\!=}\ \sqrt{۱۰}$$

۲۱۵ – گزینه ۳ روش ۱: مطابق شکل فرض می‌کنیم یک رأس مستطیل بر مبدأ مختصات منطبق باشد.



$$\begin{cases} \cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}}{|OM|\cdot|ON|}=\dfrac{۸+۲}{\sqrt{۸}\times\sqrt{۱۷}} \\ =\dfrac{۱۰}{۲\sqrt{۲}\times\sqrt{۱۷}}=\dfrac{۵\sqrt{۳۴}}{۳۴} \\ \overrightarrow{OM}=(۲,۲)\ ,\ \overrightarrow{ON}=(۴,۱) \end{cases}$$

روش ۲: طبق رابطهٔ کسینوس‌ها در مثلث AMN:



$$(\sqrt{۵})^۲=(۲\sqrt{۲})^۲+(\sqrt{۱۷})^۲-۲\times\sqrt{۲}\times\sqrt{۱۷}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{۵\sqrt{۳۴}}{۳۴}$$

۲۱۶ – گزینه ۱ نامساوی کوشی – شوارتز: اگر $\vec{u}=(x,y,z)$ و $\vec{V}=(a,b,c)$ دو بردار در فضا باشند، همواره داریم:

$$|u\cdot V|\le|u||V|$$

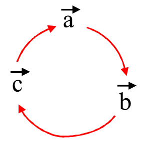
$$\left.\begin{array}{r}\min(\underline{\underline{9x^2}}+\underline{\underline{4y^2}}+\underline{\underline{z^2}})=?\xrightarrow{\text{جذر تک تک}}u=(3z,2y,z)\\ \underbrace{3x-2y+z=\sqrt{5}}_{u\cdot V}\end{array}\right\}\Rightarrow V=(1,-1,1)$$

$$|u\cdot V|\le|u||V|\Rightarrow\sqrt{5}\le\sqrt{9x^2+4y^2+z^2}\times\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow\frac{5}{3}\le 9x^2+4y^2+z^2\Rightarrow\min(9x^2+4y^2+z^2)=\frac{5}{3}$$

۲۱۷ ـ گزینه ۲ یادآوری: ضرب مختلط سه بردار a، b و c دارای خاصیت جابه‌جایی دوری است یعنی داریم:

$$a\cdot(b\times c)=b\cdot(c\times a)=c\cdot(a\times b)$$



$$(2a-3b+c)\cdot(b\times c+b\times a-a\times c)$$

$$=2a\cdot(b\times c)+\underbrace{2a\cdot(b\times a)}_{0}-\underbrace{2a\cdot(a\times c)}_{0}-\underbrace{3b\cdot(b\times c)}_{0}$$

$$\underbrace{3b\cdot(b\times a)}_{0}+\underbrace{3b\cdot(a\times c)}_{\underbrace{-3b\cdot(c\times a)}_{-3a\cdot(b\times c)}}+\underbrace{c\cdot(b\times c)}_{0}+\underbrace{c\cdot(b\times a)}_{\underbrace{-c\cdot(a\times b)}_{-a\cdot(b\times c)}}-\underbrace{c\cdot(a\times c)}_{0}$$

$$=2a\cdot(b\times c)-3a\cdot(b\times c)-a\cdot(b\times c)=-2a\cdot(b\times c)$$

۲۱۸ ـ گزینه ۲

$$\begin{cases}\text{بردار واقع بر نیمساز صفحه } xoy=(1,1,0)\xrightarrow[\text{طول } 3\sqrt{2}]{\text{تبدیل به}}\vec{a}=(3,3,0)\\ \text{بردار واقع بر نیمساز صفحه } xoz=(1,0,1)\xrightarrow[\text{طول } 4\sqrt{2}]{\text{تبدیل به}}\vec{b}=(4,0,4)\\ \text{بردار واقع بر نیمساز صفحه } yoz=(0,1,1)\xrightarrow[\text{طول } 5\sqrt{2}]{\text{تبدیل به}}\vec{c}=(0,5,5)\end{cases}$$

روش اول:

$$\begin{array}{l}\begin{cases}a=(3,3,0)\\ b=(4,0,4)\end{cases}\times\\ \hline a\times b=(12,-12,-12)\end{array}$$

$$\Rightarrow V=|c\cdot(a\times b)|=|(0,5,5)\cdot(12,-12,-12)|=|-60-60|=120$$

روش دوم: به‌جای استفاده از فرمول حجم متوازی‌السطوح، می‌توان از روش ساده برای حل دترمینان 3×3 استفاده نمود:

$$\mathrm{V}=\underbrace{\left|\begin{array}{ccc}3&3&0\\4&0&4\\0&5&5\end{array}\right|}_{\text{قدر مطلق دترمینان}}\begin{array}{cc}3&3\\4&0\\0&5\end{array}\Rightarrow V=|(0+0+0)-(0+60+60)|=|-120|=120$$

۲۱۹ ـ گزینه ۱ روش اول:

$$a=(2,0,-1)$$

$$\begin{array}{l}\begin{cases}b=(3,-2,1)\\ c=(-1,1,-2)\end{cases}\times\\ \hline b\times c=(3,5,1)\end{array}\quad V=|a\cdot(b\times c)|=|(2,0,-1)\cdot(3,5,1)|=|6+0-1|=5$$

روش دوم: حل دترمینان 3×3 به روش ساروس داریم:

$$V=|a\cdot(b\times c)|=\underbrace{\left|\begin{array}{ccc}2&0&-1\\3&-2&1\\-1&1&-2\end{array}\right|}_{\text{قدر مطلق دترمینان}}\begin{array}{cc}2&0\\3&-2\\-1&1\end{array}\Rightarrow V=|(8+0-3)-(-2+2+0)|=5$$

۲۲۰ ـ گزینه ۳

$|OA| = \sqrt{(m+۱)^۲ + ۱ + ۴} = \sqrt{(m+۱)^۲ + ۵}$

$|OB| = \sqrt{m^۲ + ۱ + ۱} = \sqrt{m^۲ + ۲}$

$|AB| = \sqrt{(m-m-۱)^۲ + (-۱-۱)^۲ + (۱+۲)^۲} = \sqrt{۱۴}$

$|AB|^۲ > |OA|^۲ \Rightarrow ۱۴ > (m+۱)^۲ + ۵ \Rightarrow (m+۱)^۲ < ۹ \Rightarrow -۴ < m < ۲ \qquad (۱)$

$|OA|^۲ > |OB|^۲ \Rightarrow (m+۱)^۲ + ۵ > m^۲ + ۲ \Rightarrow m > -۲ \qquad (۲)$

$(۱) \cap (۲) : -۲ < m < ۲$

پاسخنامه کلیدی

۱۵	۲
۱۶	۱
۱۷	۳
۱۸	۱
۱۹	۲
۲۰	۴
۲۱	۲
۲۲	۱
۲۳	۴
۲۴	۴
۲۵	۲
۲۶	۱
۲۷	۴
۲۸	۲
۲۹	۴
۳۰	۱
۳۱	۳
۳۲	۴
۳۳	۱
۳۴	۲
۳۵	۴
۳۶	۱
۳۷	۱
۳۸	۴
۳۹	۳
۴۰	۱
۴۱	۳
۴۲	۴
۴۳	۱
۴۴	۲
۴۵	۱
۴۶	۴
۴۷	۱
۴۸	۳
۴۹	۱
۵۰	۱
۵۱	۴
۵۲	۴
۵۳	۱
۵۴	۳
۵۵	۲
۵۶	۳
۵۷	۲
۵۸	۱
۸۷	۲
۸۸	۲
۸۹	۱
۹۰	۳
۹۱	۳
۹۲	۱
۹۳	۱
۹۴	۲
۹۵	۱
۹۶	۳
۹۷	۳
۹۸	۳
۹۹	۳
۱۰۰	۱
۱۰۱	۲
۱۰۲	۴
۱۰۳	۴
۱۰۴	۱
۱۰۵	۲
۱۰۶	۴
۱۰۷	۲
۱۰۸	۳
۱۰۹	۱
۱۱۰	۱
۱۱۱	۴
۱۱۲	۴
۱۱۳	۳
۱۱۴	۲
۱۱۵	۴
۱۱۶	۲
۱۱۷	۳
۱۱۸	۱
۱۱۹	۴
۱۲۰	۲
۱۲۱	۳
۱۲۲	۴
۱۲۳	۳
۱۲۴	۱
۱۲۵	۴
۱۲۶	۱
۱۲۷	۴
۱۲۸	۳
۱۲۹	۴
۱۳۰	۲
۱۳۱	۴
۱۳۲	۳
۱۳۳	۴
۱۳۴	۴
۱۳۵	۱
۱۳۶	۳
۱۳۷	۳
۱۳۸	۳
۱۳۹	۱
۱۴۰	۲
۱۴۱	۳
۱۴۲	۳
۱۴۳	۲
۱۷۴	۲
۱۷۵	۲
۱۷۶	۱
۱۷۷	۳
۱۷۸	۳
۱۷۹	۱
۱۸۰	۲
۱۸۱	۱
۱۸۲	۴
۱۸۳	۳
۱۸۴	۳
۱۸۵	۲
۱۸۶	۱
۱۸۷	۲
۱۸۸	۳
۱۸۹	۴
۱۹۰	۴
۱۹۱	۴
۱۹۲	۳
۱۹۳	۳
۱۹۴	۳
۱۹۵	۴
۱۹۶	۱
۱۹۷	۴
۱۹۸	۱
۱۹۹	۱
۲۰۰	۳
۲۰۱	۱
۲۰۲	۲
۲۰۳	۱
۲۰۴	۳
۲۰۵	۲
۲۰۶	۴
۲۰۷	۳
۲۰۸	۲
۲۰۹	۴
۲۱۰	۱
۲۱۱	۲
۲۱۲	۲
۲۱۳	۳
۲۱۴	۲
۲۱۵	۳
۲۱۶	۱
۲۱۷	۲
۲۱۸	۲
۲۱۹	۱
۲۲۰	۳