نام و نام خانوادگی: | پایه: دهم | فاخران

نام آزمون: هندسه ۱ فصل ۳

تاریخ آزمون: ۱۳۹۸/۱۲/۱۵

۱ـ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم تا این پاره‌خط را در نقطهٔ H قطع کند. حال به مرکز H و به شعاع AH دایره‌ای رسم می‌کنیم تا عمودمنصف را در نقاط C و D قطع کند. چهارضلعی $ACBD$ دقیقاً کدام است؟

(۱) مربع
(۲) لوزی‌ای که یک زاویهٔ آن 60° است.
(۳) ذوزنقه
(۴) مستطیلی که طول آن، دوبرابر عرض آن است.

۲ـ تعداد قطرهای یک چندضلعی، دو برابر تعداد اضلاع آن است. در چندضلعی دیگری که تعداد اضلاع آن دو برابر تعداد اضلاع چندضلعی اولیه است، نسبت تعداد قطرها به تعداد اضلاع کدام است؟

(۱) ۴
(۲) ۴٫۵
(۳) ۵
(۴) ۵٫۵

۳ـ کدام‌یک از عبارت‌های زیر، لزوماً یک متوازی‌الاضلاع را مشخص نمی‌کند؟

(۱) چهارضلعی که دو ضلع موازی و دو ضلع مساوی داشته باشد.
(۲) چهارضلعی که قطرهای آن منصف یکدیگر باشند.
(۳) چهارضلعی که زوایای مجاور در آن مکمل باشند.
(۴) چهارضلعی که اضلاع روبه‌روی هم در آن مساوی باشند.

۴ـ چه تعداد از گزاره‌های زیر صحیح است؟

الف) چهارضلعی‌ای که یک قطر آن عمودمنصف دیگری باشد، لوزی است.

ب) متوازی‌الاضلاعی که قطرهای برابر دارد، مستطیل است.

پ) متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن بر هم عمودند، لوزی است.

ت) لوزی‌ای که یک زاویهٔ قائمه دارد، مربع است.

(۱) ۴
(۲) ۳
(۳) ۲
(۴) ۱

۵ـ عکس کدام‌یک از قضیه‌های زیر درست نیست؟

(۱) در هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، زاویه‌های مجاور به هر قاعده، هم‌اندازه‌اند.
(۲) در هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، قطرها مساوی یکدیگرند.
(۳) در هر ذوزنقهٔ متساوی الساقین، زاویه‌های مقابل، مکمل هم هستند.
(۴) در هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، زاویه‌های مجاور به ساق‌ها، مکمل هم هستند.

۶ـ زاویه‌های داخلی مثلثی با اعداد، ۱، ۵ و ۶ متناسب هستند. اگر اندازهٔ بزرگ‌ترین ضلع مثلث a باشد، مساحت آن کدام است؟

(۱) $\frac{1}{8}a^2$
(۲) $\frac{1}{4}a^2$
(۳) $\frac{1}{2}a^2$
(۴) a^2

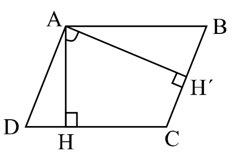
۷ـ در چهارضلعی $ABCD$، وسط اضلاع AB و CD و وسط دو قطر AC و BD رئوس یک لوزی هستند. در مورد چهارضلعی $ABCD$ کدام درست است؟

(۱) لوزی است.
(۲) متوازی‌الاضلاع است.
(۳) $AB = CD$
(۴) $AD = BC$

۸ـ از برخورد نیمسازهای زوایای داخلی یک مستطیل به طول m و عرض ۴، مربعی به مساحت ۱۸ واحد مربع ایجاد شده است. در این صورت مقدار m برابر .... است و مربع کاملاً داخل مستطیل واقع ....

(۱) ۸، می‌شود.
(۲) ۸، نمی‌شود.
(۳) ۱۰، می‌شود.
(۴) ۱۰، نمی‌شود.

۹ـ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، AH و AH' ارتفاع‌های نظیر رأس A هستند. زاویهٔ HAH' همواره برابر کدام است؟

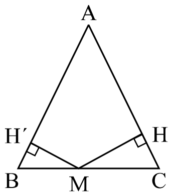


(۱) $\hat{B}$
(۲) $90^\circ - \frac{B\hat{A}D}{2}$
(۳) $90^\circ - \hat{B}$
(۴) $\frac{B\hat{A}D}{2}$

۱۰ - در مثلث قائم‌الزاویه‌ای با زاویهٔ حادهٔ ۷۵°، طول میانهٔ وارد بر وتر ۸ است. مساحت این مثلث کدام است؟

(۱) ۱۶ (۲) ۳۲ (۳) ۶۴ (۴) ۸۰

۱۱ - با توجه به شکل زیر، اگر مساحت مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC = ۶)$ برابر ۱۵ و $MH = ۲MH'$ باشد، آنگاه طول MH کدام است؟

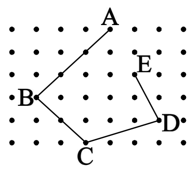


(۱) $\frac{۵}{۳}$ (۲) ۲٫۵ (۳) $\frac{۱۰}{۳}$ (۴) ۵

۱۲ - مساحت یک چند ضلعی شبکه‌ای $\frac{۱۷}{۲}$ واحد است. حداکثر تعداد نقاط درونی این چند ضلعی شبکه‌ای کدام است؟

(۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۱۰ (۴) ۹

۱۳ - با انتخاب رأس مناسب F و رسم شش‌ضلعی شبکه‌ای $ABCDEF$، کمترین مساحت ممکن برای آن کدام است؟



(۱) $\frac{۱۷}{۲}$ (۲) ۹ (۳) $\frac{۱۹}{۲}$ (۴) ۱۰

۱۴ - در یک چندضلعی که تعداد قطرها و ضلع‌هایش برابر است. مجموع اندازهٔ زاویه‌های داخلی چند درجه است؟

(۱) ۳۶۰ (۲) ۵۴۰ (۳) ۷۲۰ (۴) ۹۰۰

۱۵ - عکس کدام‌یک از قضایای زیر، لزوماً صحیح نیست؟

(۱) اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهای آن منصف یکدیگر هستند.

(۲) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، آنگاه قطرهای آن عمودمنصف یکدیگر هستند.

(۳) اگر یک چهارضلعی مربع باشد، آنگاه اندازهٔ دو قطر آن مساوی و عمود بر هم هستند.

(۴) اگر یک چهارضلعی مستطیل باشد آنگاه قطرهای آن مساوی و منصف هم هستند.

۱۶ - اگر نقطهٔ O محل تلاقی نیمسازهای داخلی زاویه‌های A و D در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشد، آنگاه در صورتی‌که $AB = ۸$ و $BC = ۶$ باشند، فاصلهٔ نقطهٔ O از وسط ضلع AD کدام است؟

(۱) ۲ (۲) $\frac{۸}{۳}$ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۷ - مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای، دو برابر مجذور ارتفاع وارد بر وتر آن است. اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویهٔ خارجی این مثلث چند درجه است؟

(۱) ۱۲۰ (۲) ۱۳۵ (۳) ۱۵۰ (۴) ۱۶۵

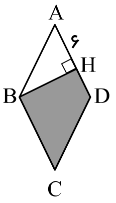
۱۸ - از تقاطع نیمسازهای زوایای داخلی مستطیلی به طول اضلاع ۲ و ۳، چهارضلعی $ABCD$ و از وصل کردن وسط‌های اضلاع مستطیل به‌طور متوالی، چهارضلعی $MNOP$ حاصل می‌شود. مساحت چهارضلعی $MNOP$، چند برابر مساحت چهارضلعی $ABCD$ است؟

(۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴) ۲۴

۱۹ - در مثلث متساوی‌الساقین ABC، $AB = AC = ۱۸$ و $B\hat{A}C = ۳۰^\circ$ است. اگر نقطهٔ D واقع بر BC به فاصلهٔ ۳ واحد از AB باشد، فاصلهٔ D از AC کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۲۰ - طول ضلع لوزی $ABCD$ برابر ۹ واحد است. اگر BH ارتفاع وارد بر ضلع AD و $AH = ۶$ باشد، آنگاه مساحت ناحیهٔ هاشورخورده کدام است؟



(۱) $۲۴\sqrt{۲}$ (۲) $۲۰\sqrt{۳}$
(۳) $۱۸\sqrt{۵}$ (۴) $۱۵\sqrt{۶}$

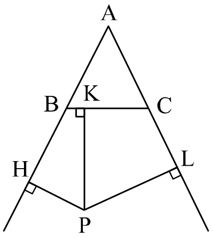
۲۱ - مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای، واسطهٔ حسابی تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی آن است. کمترین مساحت این چندضلعی شبکه‌ای کدام است؟

(۱) ۱٫۵ (۲) ۲٫۵ (۳) ۳٫۵ (۴) ۴٫۵

۲۲ - در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائمهٔ ۱۸ و ۲۴، مجموع فاصله‌های محل همرسی میانه‌ها تا اضلاع مثلث کدام است؟

(۱) ۱۸٫۸ (۲) ۳۷٫۶ (۳) ۷۵٫۲ (۴) ۱۴٫۴

۲۳ - در شکل مقابل ABC متساوی‌الاضلاع، $PH = ۳\sqrt{۳}$، $PK = ۴\sqrt{۳}$ و $PL = ۵\sqrt{۳}$ است. طول هر ضلع مثلث ABC کدام است؟



(۱) ۶ (۲) ۸
(۳) ۹ (۴) ۱۲

۲۴ - مساحت یک چند ضلعی شبکه‌ای برابر ۳ واحد است. حداقل تعداد نقاط مرزی این چند ضلعی کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۲۵ - چه تعداد از موارد زیر، همواره صحیح است؟

الف) متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی‌ای است که دو ضلع مقابل آن هم‌اندازه و موازی هستند.

ب) متوازی‌الاضلاعی که دو قطر برابر داشته باشد، مربع است.

پ) متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن بر هم عمود باشند، لوزی است.

ت) لوزی‌ای که قطرهای آن با هم برابر باشند مربع است.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۶ - تعداد قطرهای یک چندضلعی، دو برابر تعداد اضلاع آن است. این چند ضلعی حداکثر چند زاویهٔ ۱۴۰ درجه می‌تواند داشته باشد؟

(۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

۲۷ - چه تعداد از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

الف) چهارضلعی‌ای که دو قطر برابر داشته باشد، مستطیل است.

ب) چهارضلعی‌ای که قطرهای آن عمودمنصف یکدیگر باشند، مربع است.

پ) چهارضلعی‌ای که قطرهای آن نیمساز زاویه‌های داخلی باشند، لوزی است.

(۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲۸ - در یک متوازی‌الاضلاع که طول قطرهای آن برابر ۴ و ۷ واحد است، از هر رأس خطی به موازات یکی از قطرها رسم کرده‌ایم، محیط چهارضلعی حاصل از تقاطع این خطوط کدام است؟

(۱) ۲۲ (۲) ۱۱ (۳) ۲۸ (۴) ۱۶

۲۹ - وسط‌های اضلاع یک مستطیل را به‌طور متوالی به هم وصل کرده‌ایم و یک چهارضلعی با یک زاویهٔ ۶۰° حاصل شده است. نسبت طول به عرض این مستطیل کدام است؟

(۱) ۲ (۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ (۳) $\sqrt{۲}$ (۴) $\sqrt{۳}$

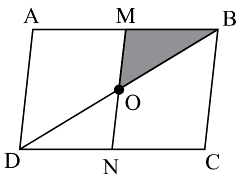
۳۰- نقطهٔ M درون مثلث متوازی‌الاضلاع ABC به مساحت $۴\sqrt{۳}$ قرار دارد. اگر فاصلهٔ نقطهٔ M از اضلاع AB و AC به‌ترتیب برابر ۱ و ۲ باشد، آن‌گاه فاصلهٔ این نقطه از ضلع BC کدام است؟

① $۲\sqrt{۳}-۳$ ② ۱ ③ ۲ ④ $۳-\sqrt{۳}$

۳۱- در مثلث متساوی‌الساقینی به طول ساق ۱۰ و قاعدهٔ ۱۲، مجموع فواصل هر نقطه روی قاعده از دو ساق آن کدام است؟

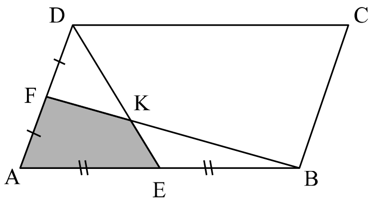
① ۴٫۸ ② ۷٫۲ ③ ۹٫۶ ④ ۱۲

۳۲- مطابق شکل زیر، اگر M و N وسط‌های دو ضلع AB و CD باشد، مساحت مثلث BMO چه کسری از مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$ است؟



① $\frac{۱}{۱۶}$ ② $\frac{۱}{۸}$ ③ $\frac{۱}{۶}$ ④ $\frac{۱}{۴}$

۳۳- اگر مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$ برابر ۱۲۰ واحد مربع باشد، مساحت چهارضلعی $AEKF$ کدام است؟

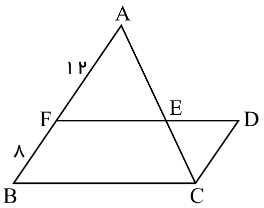


① ۱۲ ② ۱۵ ③ ۱۸ ④ ۲۰

۳۴- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول اضلاع قائم ۳ و ۴، فاصلهٔ نقطهٔ همرسی میانه‌ها تا وسط وتر کدام است؟

① $\frac{۴}{۵}$ ② $\frac{۵}{۶}$ ③ $\frac{۵}{۴}$ ④ $\frac{۶}{۵}$

۳۵- در شکل زیر، چهارضلعی $FDCB$ متوازی‌الاضلاع است. نقطهٔ E، ضلع FD را به چه نسبتی تقسیم کرده است؟



① $\frac{۳}{۲}$ ② $\frac{۵}{۲}$ ③ $\frac{۴}{۳}$ ④ $\frac{۵}{۳}$

۳۶- در مثلث ABC، $AB=۴$ و $AC=۲\sqrt{۲}$ است. اگر محل تلاقی عمودمنصف‌های این دو ضلع به روی ضلع BC قرار داشته باشد، آنگاه فاصلهٔ نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها تا نقطهٔ هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث ABC کدام است؟

① $\sqrt{۲}$ ② $\sqrt{۳}$ ③ ۲ ④ $\sqrt{۶}$

۳۷- قطر یک مستطیل با یکی از اضلاع آن، زاویهٔ ۱۵ درجه می‌سازد. یک نقطه روی بزرگ‌ترین ضلع مستطیل از دو قطر آن به فاصله‌های ۱ و ۲ واحد قرار دارد اندازهٔ مساحت مستطیل کدام است؟

① ۱۸ ② ۳۶ ③ ۴۸ ④ ۷۲

۳۸- در یک مثلث متساوی‌الاضلاع، فاصله نقطهٔ دلخواه F درون مثلث از سه ضلع آن به‌ترتیب برابر ۱، ۲ و ۳ می‌باشد. مجموع فواصل نقطهٔ هم‌رسی میانه‌ها از سه رأس این مثلث کدام است؟

① ۶ ② ۹ ③ ۱۲ ④ ۱۸

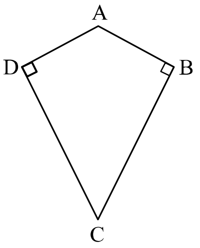
۳۹- اگر تعداد مرزی درونی یک چندضلعی شبکه‌ای را دو برابر کنیم، مساحت آن چندضلعی چگونه تغییر می‌کند؟

① دقیقاً دو برابر می‌شود.
② کمتر از دو برابر می‌شود.
③ بیشتر از دو برابر می‌شود.
④ بسته به تعداد نقاط مرزی و درونی چندضلعی، هر یک از سه حالت امکان‌پذیر است.

۴۰- یک مربع شبکه‌ای با مساحت ۸ واحد مربع مفروض است. اختلاف بیشترین تعداد نقاط مرزی و کمترین نقاط درونی آن کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۶

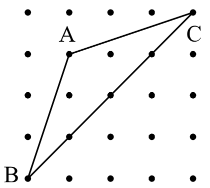
۴۱- در چهارضلعی شکل مقابل $AB = AD = ۳$ و $BC = CD = ۶$ است. محیط چهارضلعی حاصل از وصل کردن متوالی وسط‌های اضلاع چهارضلعی $ABCD$ کدام است؟



(۱) $۵\sqrt{۵}$ (۲) $\frac{۲۷\sqrt{۵}}{۵}$

(۳) $۶\sqrt{۵}$ (۴) $\frac{۳۲\sqrt{۵}}{۵}$

۴۲- در شکل زیر مجموع فواصل هر نقطهٔ دلخواه روی پاره‌خط BC از دو پاره‌خط AB و AC کدام است؟ (فاصلهٔ بین هر دو نقطهٔ متوالی افقی یا عمودی یک واحد است.)



(۱) $\frac{۴}{۵}\sqrt{۱۰}$ (۲) $\frac{۲}{۵}\sqrt{۱۰}$

(۳) $\frac{۴}{۵}\sqrt{۵}$ (۴) $\frac{۲}{۵}\sqrt{۵}$

۴۳- در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$، قطر AC به طول $۴\sqrt{۳}$ با قاعدهٔ AB زاویهٔ ۳۰° می‌سازد. مساحت ذوزنقه کدام است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) $۱۲\sqrt{۳}$ (۴) $۱۶\sqrt{۳}$

۴۴- در چهارضلعی $ABCD$، وسط دو ضلع غیرمجاور و وسط دو قطر آن، رأس‌های یک لوزی است. الزاماً کدام نتیجه‌گیری در مورد چهارضلعی مفروض، درست است؟

(۱) دو ضلع غیرمجاور، دیگر، برابرند. (۲) دو قطر عمود برهم‌اند.

(۳) دو ضلع شامل رأس‌های لوزی، برابرند. (۴) دو ضلع غیرمجاور، موازی‌اند.

۴۵- کدام مورد مثال نقض ندارد؟

(۱) چهارضلعی‌ای که قطرهای آن نیمساز زوایای آن باشند، لوزی است. (۲) چهارضلعی‌ای که قطرهایش برهم عمود باشند، لوزی است.

(۳) چهارضلعی‌ای که قطرهایش با هم برابر باشند، مستطیل است. (۴) چهارضلعی‌ای که دو ضلع موازی و دو ضلع برابر هم دارد، متوازی‌الاضلاع است.

۴۶- در یک ذوزنقه متساوی‌الساقین، قاعدهٔ کوچک با هر ساق برابر و قاعدهٔ بزرگ دو برابر هر یک از آن‌هاست. اندازهٔ زاویهٔ حادهٔ این ذوزنقه کدام است؟

(۱) ۳۰° (۲) ۴۰° (۳) ۷۵° (۴) ۶۰°

۴۷- در مثلث قائم‌الزاویهٔ $(\hat{C} = ۵\hat{B}, \hat{A} = ۹۰^\circ)$، از نقطهٔ H پای ارتفاع وارد بر وتر، دو عمود HD و HE به‌ترتیب بر اضلاع AB و AC رسم شده است. نسبت مساحت چهارضلعی $ADHE$ به مساحت مثلث ABC کدام است؟

(۱) $\frac{۱}{۴}$ (۲) $\frac{۱}{۸}$ (۳) $\frac{۱}{۱۲}$ (۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۴۸- در مثلث متساوی الساقین ABC، $(AB = AC, \hat{A} = ۴۵^\circ)$ است، اگر مجموع فواصل نقطهٔ دلخواه D واقع بر قاعدهٔ BC از دو ساق مثلث برابر $۲\sqrt{۲}$ باشد، آنگاه مساحت مثلث ABC کدام است؟

(۱) $۲\sqrt{۲}$ (۲) ۴ (۳) $۴\sqrt{۲}$ (۴) ۸

۴۹- در ساق مثلث متساوی الاضلاع به مساحت $۳\sqrt{۳}$، اگر فاصلهٔ نقطهٔ M درون مثلث از اضلاع AB و AC به ترتیب برابر $\frac{۳}{۸}$ و $\frac{۱۵}{۸}$ باشد، آنگاه فاصلهٔ نقطهٔ M از ضلع BC کدام است؟

(۱) $\frac{۱}{۴}$ (۲) $\frac{۳}{۴}$ (۳) $\frac{۵}{۴}$ (۴) $\frac{۷}{۴}$

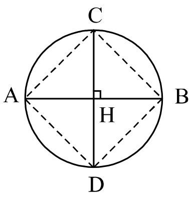
هندسه 1 فصل 3

۵۰- در ذوزنقه قائم‌الزاویهٔ $ABCD$ $(\hat{A} = \hat{D} = ۹۰^\circ)$، اگر $AB = ۲$ ، $AD = ۳$ ، $CD = ۴$ و O محل تلاقی قطرها باشد، آنگاه مساحت مثلث OBC کدام است؟

① ۲
② ۲٫۵
③ ۳
④ ۴

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱ می‌دانیم در یک چهارضلعی، اگر قطرها عمودمنصف یکدیگر باشند و طول آن‌ها نیز برابر باشد، آن چهارضلعی مربع است.



$$AH = BH = CH = DH \Rightarrow AH + BH = CH + DH \Rightarrow AB = CD$$

$$\left.\begin{array}{l} AH = BH \\ CH = DH \\ CD \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow CD, AB \text{ عمودمنصف یکدیگرند.}$$

بنابراین از دو رابطهٔ فوق نتیجه می‌گیریم که $ACBD$ مربع است.

۲ - گزینه ۴

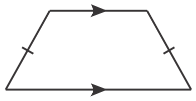
$$\text{چند ضلعی اول} \left\{\begin{array}{l} \text{تعداد قطرها} = \frac{n(n-3)}{2} \\ \text{تعداد اضلاع} = n \end{array}\right. \Rightarrow \frac{n(n-3)}{2} = 2n \Rightarrow n^2 - 3n = 4n \rightarrow n^2 - 7n = 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} n = 0 \text{ غق} \\ n = 7 \text{ ق} \end{array}$$

$$\text{چندضلعی دوم} = 2 \times 7 = 14 \text{ چهارده ضلع دارد} \Rightarrow \text{تعداد اقطار} = \frac{14 \times (14-3)}{2} = 77$$

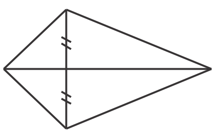
$$\text{نسبت اقطار به اضلاع} = \frac{77}{14} = \frac{11}{2} = 5/5$$

۳ - گزینه ۱



در گزینهٔ اول، چهارضلعی که دو ضلع موازی و همان دو ضلع مساوی باشند متوازی‌الاضلاع است ولی در این گزینه به همان دو ضلع اشاره نشده است. بنابراین می‌تواند ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین باشد.

۴ - گزینه ۲



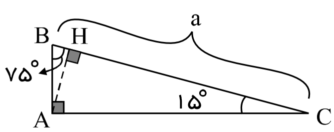
جملهٔ «الف» نادرست و بقیهٔ جملات درست می‌باشند.

برای مشخص کردن نادرستی جمله (گزاره) «الف» می‌توان شکل زیر را رسم کرد که در آن یکی از قطرها عمودمنصف دیگری است. اما لوزی نیست.

۵ - گزینه ۴ عکس قضیهٔ مربوط به گزینهٔ «۴»، به صورت زیر است:

«اگر در ذوزنقه‌ای زوایای مجاور به ساق‌ها مکمل هم باشند، آن ذوزنقه متساوی‌الساقین است.» و این گزاره لزوماً صحیح نمی‌باشد؛ زیرا در هر ذوزنقه‌ای این مطلب درست است و فقط ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین را شامل نمی‌شود.

۶ - گزینه ۱



$$1x + 5x + 6x = 180^\circ$$

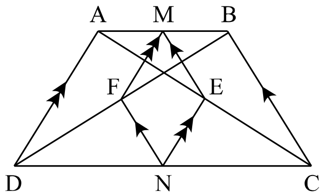
$$\Rightarrow 12x = 180^\circ \Rightarrow x = 15^\circ \text{ و } 5x = 75^\circ \text{ و } 6x = 90^\circ$$

از طرفی می‌دانیم که در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویهٔ ۱۵ درجه $\frac{1}{4}$ وتر است. پس: $AH = \frac{1}{4}a$.

بنابراین مساحت مثلث موردنظر برابر است با :

$$S = \frac{1}{2}AH \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}a \times a = \frac{1}{8}a^2$$

۷ - گزینه ۴ در چهارضلعی $ABCD$، نقاط M و N وسط اضلاع AB و CD و نقاط E و F وسط قطرها هستند.



$$\overset{\Delta}{ABC}: \frac{AM}{MB}=\frac{AE}{EC}=۱ \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} ME=\frac{BC}{۲}$$

$$\overset{\Delta}{BDC}: \frac{DF}{FB}=\frac{DN}{NC}=۱ \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} NF=\frac{BC}{۲}$$

بنابراین $ME=NF=\frac{BC}{۲}$ است. همچنین به طریق مشابه می‌توان نشان داد که $MF=NE=\frac{AD}{۲}$ است. بنابراین با فرض لوزی بودن چهار ضلعی $MENF$ داریم:

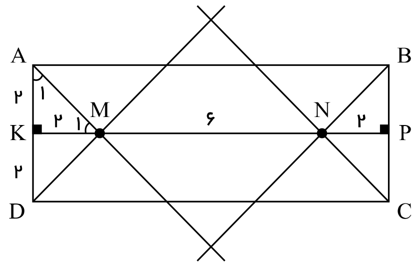
$$ME=MF \Rightarrow \frac{BC}{۲}=\frac{AD}{۲} \Rightarrow BC=AD$$

۸ ـ گزینه ۴ اگر از وسط عرض مستطیل خطی را موازی با طول آن رسم کنیم، این خط دقیقاً روی قطر مربع واقع شده و با توجه به این‌که مساحت مربع برابر است با $\frac{(\text{قطر})^۲}{۲}$، خواهیم داشت:

$$\frac{(MN)^۲}{۲}=۱۸ \Rightarrow (MN)^۲=۳۶ \Rightarrow MN=۶$$

از طرفی در مثلث AKM داریم: $\hat{A}_۱=\hat{M}_۱=۴۵^\circ$ پس:

$$AK=KM=۲$$



به طریق مشابه در مثلث BNP داریم: $NP=۲$ بنابراین:

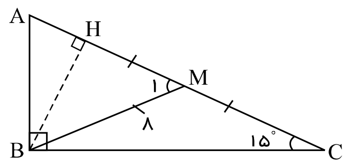
$$AB=KM+NP+MN \Rightarrow AB=m=۱۰$$

و چون طول مستطیل از دو برابر عرض آن بزرگ‌تر شد پس مربع حاصل کاملاً داخل مستطیل قرار نخواهد گرفت و بخشی از آن بیرون می‌افتد.

۹ ـ گزینه ۱

$$\left.\begin{array}{l} AHCH' \text{ درچهارضلعی}: \hat{A}_۱+\underbrace{\hat{H}+\hat{H}'}_{۱۸۰^\circ}+\hat{C}=۳۶۰^\circ \rightarrow \hat{A}_۱+\hat{C}=۱۸۰^\circ \\ ABCD \text{ درمتوازی الاضلاع} \rightarrow \hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{B}=D$$

۱۰ ـ گزینه ۲



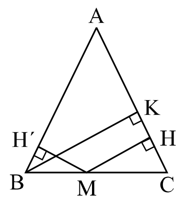
$$\text{متساوی‌الساقین } \overset{\Delta}{BMC} \rightarrow \hat{C}=\hat{B}=۱۵^\circ \rightarrow \hat{M}_۱=۳۰^\circ$$

$$\text{قائم‌الزاویه } \overset{\Delta}{BMH}: \hat{M}_۱=۳۰^\circ \rightarrow BH=\frac{۱}{۲}BM=\frac{۱}{۲}\times ۸=۴$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}\times BH\times AC=\frac{۱}{۲}\times ۴\times(۸+۸)=۳۲$$

۱۱ ـ گزینه ۳ در هر مثلث متساوی‌الساقین، مجموع فواصل هر نقطهٔ دلخواه روی قاعده از دو ساق، برابر ارتفاع وارد بر ساق است.

$$S_{ABC}=\frac{BK\times AC}{۲} \Rightarrow ۱۵=\frac{BK\times ۶}{۲} \Rightarrow BK=۵$$



بنابراین با توجه به این‌که $MH=۲MH'$، داریم:

$$MH+MH'=BK \Rightarrow MH+\frac{MH}{۲}=۵ \Rightarrow \frac{۳}{۲}MH=۵ \Rightarrow MH=\frac{۱۰}{۳}$$

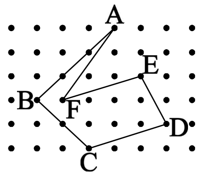
۱۲ ـ گزینه ۱

$$S=\frac{b}{۲}+i-۱ \Rightarrow \frac{۱۷}{۲}=\frac{b}{۲}+i-۱ \Rightarrow ۱۷=b+۲i-۲ \Rightarrow ۲i=۱۹-b$$

بیشترین مقدار i به ازای کمترین مقدار b حاصل می‌شود. می‌دانیم در یک چندضلعی شبکه‌ای $b\geq ۳$ است. پس:

$$۲i=۱۹-۳ \Rightarrow ۲i=۱۶ \Rightarrow i=۸$$

۱۳ ـ گزینه ۳ با توجه به فرمول $S=\frac{b}{۲}+i-۱$، کمترین مقدار برای S زمانی حاصل می‌شود که $(\frac{b}{۲}+i)$ کمترین مقدار خود را داشته باشد. حال با توجه به شکل داریم:



$b=9, i=6$

در نتیجه:

$$S=\frac{9}{2}+6-1=\frac{19}{2}$$

۱۴ - گزینه ۲ در هر nضلعی تعداد قطرها $\frac{n(n-3)}{2}$ است. بنابراین داریم:

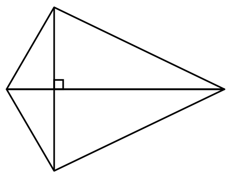
$$\text{تعداد قطرها} = \text{تعداد ضلع‌ها} \Rightarrow \frac{n(n-3)}{2}=n \Rightarrow n-3=2 \Rightarrow n=5$$

مجموع اندازهٔ زاویه‌های داخلی هر nضلعی برابر $(n-2)\ 180^\circ$ است. پس:

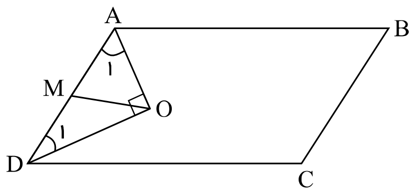
$$180^\circ(5-2)=180^\circ\times 3=540^\circ$$

۱۵ - گزینه ۳

گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ قضیه‌های دو شرطی هستند. اما برای عکس قضیهٔ گزینهٔ ۳، «اگر در یک چهارضلعی اندازهٔ دو قطر مساوی و عمود بر هم باشند، آن‌گاه چهارضلعی مربع است.» مثال نقض وجود دارد، مانند شکل زیر:



۱۶ - گزینه ۳



می‌دانیم در هر متوازی‌الاضلاع، هر دو زاویهٔ مجاور، مکمل یکدیگرند، بنابراین داریم:

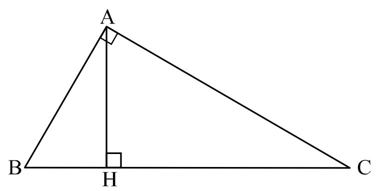
$$\hat{A}+\hat{D}=180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{D}}{2}=90^\circ \Rightarrow \hat{A}_1+\hat{D}_1=90^\circ \xrightarrow{\overset{\Delta}{AOD}} \hat{O}=90^\circ$$

یعنی مثلث $\overset{\Delta}{AOD}$ قائم‌الزاویه است و فاصلهٔ نقطهٔ O از وسط ضلع AD، برابر طول میانهٔ وارد بر وتر می‌باشد. با توجه به این‌که طول میانهٔ وارد بر وتر، نصف طول وتر است، پس داریم:

$$OM=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\times 6=3$$

۱۷ - گزینه ۴

با توجه به فرض مسئله $S_{\overset{\Delta}{ABC}}=2AH^2$ است. از طرفی با توجه به شکل $S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{1}{2}AH\times BC$ می‌باشد، پس:

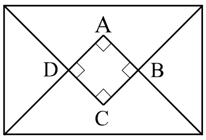


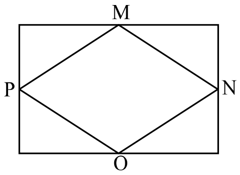
$$\Rightarrow 2AH^2=\frac{1}{2}AH\times BC \Rightarrow AH=\frac{BC}{4}$$

یعنی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، طول ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{1}{4}$ طول وتر است. (طبق تمرینات کتاب درسی)، اندازهٔ یک زاویهٔ داخلی این مثلث قائم‌الزاویه 15° و در نتیجه اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویهٔ خارجی آن برابر $180^\circ-15^\circ=165^\circ$ است.

۱۸ - گزینه ۲ از تقاطع نیمسازهای زوایای داخلی یک مستطیل به طول ضلع‌های a و b، یک مربع به طول ضلع $|a-b|\frac{\sqrt{2}}{2}$ تشکیل می‌شود.

پس مساحت چهارضلعی $ABCD$ برابر $\frac{1}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(3-2)\right)^2$ است و چهارضلعی حاصل از وصل کردن وسط‌های اضلاع همان مستطیل، لوزی $MNOP$ است که مساحت آن نصف مساحت مستطیل است، پس $S_{MNOP}=\frac{2\times 3}{2}=3$، بنابراین داریم:

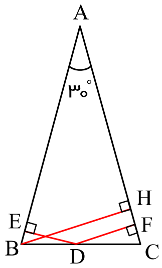




$$\frac{S_{MNOP}}{S_{ABCD}}=\frac{۳}{\frac{۱}{۲}}=۶$$

۱۹ - گزینه ۴ از B بر AC عمود رسم می‌کنیم، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH داریم: (ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰ در مثلث قائم‌الزاویه نصف وتر است.)

$$\hat{A}=۳۰^\circ \Rightarrow BH=\frac{۱}{۲}AB=\frac{۱}{۲}(۱۸)=۹$$



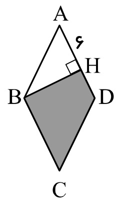
از طرفی می‌دانیم مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ واقع بر قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن، برابر طول ارتفاع وارد بر ساق است، پس داریم:

$$DE+DF=BH \Rightarrow ۳+DF=۹ \Rightarrow DF=۶$$

۲۰ - گزینه ۳ با نوشتن قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH داریم:

$$BH^۲=AB^۲-AH^۲=۹^۲-۶^۲=۸۱-۳۶=۴۵ \Rightarrow BH=۳\sqrt{۵}$$

پس مساحت ناحیهٔ هاشورخورده برابر است با:



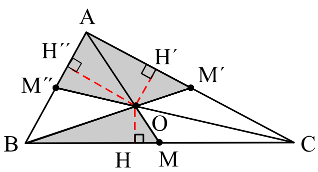
$$S_{BHDC}=S_{ABCD}-S_{\overset{\triangle}{ABH}}=AD\times BH-\frac{AH\times BH}{۲}$$
$$=۹\times ۳\sqrt{۵}-\frac{۶\times ۳\sqrt{۵}}{۲}=۲۷\sqrt{۵}-۹\sqrt{۵}=۱۸\sqrt{۵}$$

۲۱ - گزینه ۲ بنابر فرض $S=\frac{b+i}{۲}$ است. با استفاده از دستور پیک داریم:

$$S=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{b+i}{۲} \Rightarrow \frac{b}{۲}+i-۱=\frac{b}{۲}+\frac{i}{۲} \Rightarrow \frac{i}{۲}=۱ \Rightarrow i=۲$$
$$S=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{b}{۲}+۱ \xrightarrow[\text{کوچک‌ترین چندضلعی}]{b=۳} S_{\min}=\frac{۳}{۲}+۱=۲٫۵$$

۲۲ - گزینه ۱

$$AB^۲+AC^۲=BC^۲ \Rightarrow BC=۳۰$$



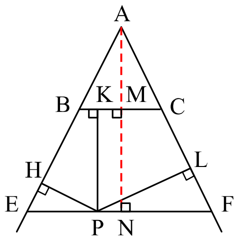
از تلاقی میانه‌های هر مثلث، شش مثلث هم‌مساحت ایجاد می‌شود، بنابراین داریم:

$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{AB\times AC}{۲}=\frac{۱۸\times ۲۴}{۲}=۲۱۶$ پس مساحت هر قسمت برابر $۳۶=\frac{۲۱۶}{۶}$ است، حال داریم:

$$\begin{cases}\frac{OH\times BM}{۲}=۳۶ \Rightarrow \frac{OH\times ۱۵}{۲}=۳۶ \Rightarrow OH=۴٫۸\\ \frac{OH'\times AM'}{۲}=۳۶ \Rightarrow \frac{OH'\times ۱۲}{۲}=۳۶ \Rightarrow OH'=۶\\ \frac{OH''\times AM''}{۲}=۳۶ \Rightarrow \frac{OH''\times ۹}{۲}=۳۶ \Rightarrow OH''=۸\end{cases}$$
$$\Rightarrow OH+OH'+OH''=۴٫۸+۶+۸=۱۸٫۸$$

۲۳ - گزینه ۲

از نقطهٔ P خطی موازی با BC رسم می‌کنیم تا امتداد اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط E و F قطع کند.



از نقطهٔ A، عمودی بر BC (و در نتیجه EF) رسم می‌کنیم. مثلث AEF متساوی‌الاضلاع است. زیرا سه زاویهٔ ۶۰° دارد و در نتیجه طول ارتفاع‌های این مثلث برابر یکدیگر است. پس داریم:

$$PH + PL = AN \Rightarrow ۸\sqrt{۳} = AN \Rightarrow ۸\sqrt{۳} = AM + MN$$

$$\xrightarrow{MN=PK} ۸\sqrt{۳} = AM + ۴\sqrt{۳} \Rightarrow AM = ۴\sqrt{۳}$$

اگر طول هر ضلع مثلث ABC را a فرض کنیم، داریم:

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}a = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow a = ۸$$

۲۴ - گزینه ۲ اگر i تعداد نقاط درونی و b تعداد نقاط مرزی باشد، آن‌گاه مساحت این چند ضلعی برابراست با:

$$S = \frac{b}{۲} + i - ۱$$

می‌دانیم نقاط درونی عددی حسابی و حداقل نقاط مرزی لازم برای ایجاد چند ضلعی ۳ است، بنابراین یکی از سه حالت زیر امکان‌پذیر است. داریم:

b	۸	۶	۴
i	۰	۱	۲

پس حداقل نقاط مرزی لازم جهت ایجاد مساحت ۳ واحد ۴ تا است.

۲۵ - گزینه ۳ عبارت‌های «الف»، «پ» و «ت» صحیح‌اند و عبارت «ب» نادرست است؛ زیرا متوازی‌الاضلاعی که دو قطر برابر دارد، مستطیل است.

۲۶ - گزینه ۱

$$\frac{n(n-۳)}{۲} = ۲n \to n = ۷$$

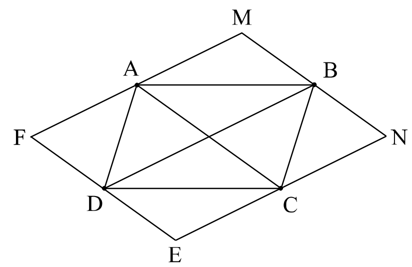
$$\text{مجموع زاویه‌های داخلی} = (۷ - ۲) \times ۱۸۰^\circ = ۹۰۰^\circ = ۶ \times ۱۴۰^\circ + ۶۰^\circ$$

بنابراین این هفت ضلعی حداکثر می‌تواند ۶ زاویه ۱۴۰° داشته باشد.

۲۷ - گزینه ۲ عبارت (پ) درست و عبارت‌های (الف) و (ب) نادرست هستند.

زیرا بی‌شمار چهارضلعی وجود دارد که قطرهایش برابرند و چهارضلعی که قطرهای آن عمودمنصف یکدیگرند لوزی است.

۲۸ - گزینه ۱

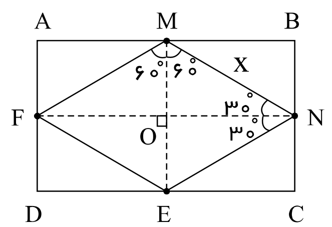


$$\left.\begin{matrix} MN||AC||FE \\ MF||BD||EN \end{matrix}\right\} \to \text{متوازی‌الاضلاع است} \ MNEF$$

$$\text{محیط}\ MNEF = ۲MN + ۲MF = ۲AC + ۲BD = ۲(۴ + ۷) = ۲۲$$

۲۹ - گزینه ۴

چهارضلعی حاصل از به هم وصل کردن وسط‌های اضلاع هر مستطیل یک لوزی است و در لوزی قطرهای عمودمنصف و نیمساز زوایا می‌باشند. اگر ضلع لوزی را برابر x در نظر بگیریم داریم:

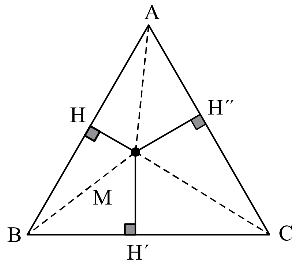


$\overset{\Delta}{MON}$: ۳۰° ضلع روبه‌رو $OM=\frac{x}{۲}\to BC=۲OM=۲\times\frac{x}{۲}=x$

۶۰° ضلع روبه‌رو $ON=\frac{\sqrt{۳}}{۲}x\to DC=۲ON=۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}x=\sqrt{۳}x$

$\frac{\text{طول مستطیل}}{\text{عرض مستطیل}}=\frac{DC}{BC}=\frac{\sqrt{۳}x}{x}=\sqrt{۳}$

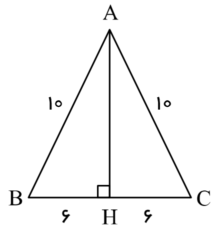
۳۰ - گزینه ۱



مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a $=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}=۴\sqrt{۳}\to a^{۲}=۱۶\to a=۴$

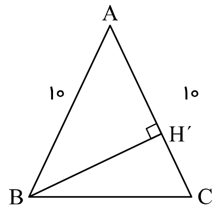
$MH+MH'+MH''=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a\to ۱+MH'+۲=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۴\to \boxed{MH'=۲\sqrt{۳}-۳}$

۳۱ - گزینه ۳ مجموع فواصل هر نقطه روی قاعده مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن برابراست با ارتفاع وارد بر ساق مثلث. بنابراین داریم:

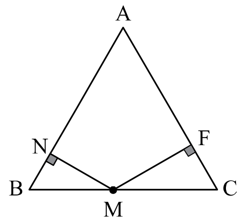


$\overset{\Delta}{ABH}: AH=\sqrt{۱۰^{۲}-۶^{۲}}=۸$

$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۱۲=۴۸$

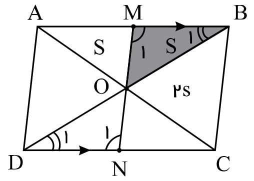


$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}BH'\times AC\to ۴۸=\frac{۱}{۲}\times BH'\times ۱۰\to BH'=۹/۶$



$MN+MF=BH'=۹/۶$

۳۲ - گزینه ۲



$AB=DC\to ۲MB=۲DN\to \left.\begin{array}{l}MB=DN\\ \hat{M}_{۱}=\hat{N}_{۱}\\ \hat{D}_{۱}=\hat{B}_{۱}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ز ض ز}}\overset{\Delta}{MOB}\cong\overset{\Delta}{NOD}\xrightarrow{\text{اجزای نظیر}}\left\{\begin{array}{l}OB=OD\\ ON=ON\end{array}\right.$

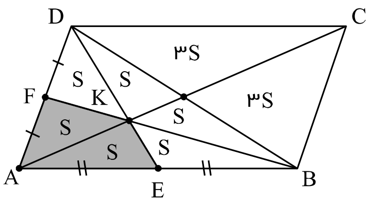
$\overset{\Delta}{AOB}$: میانه $OM\to S_{\overset{\Delta}{AOM}}=S_{\overset{\Delta}{BOM}}=S\to S_{\overset{\Delta}{AOB}}=۲S$

$\overset{\Delta}{ABC}$: میانه $DB\to S_{\overset{\Delta}{AOB}}=S_{\overset{\Delta}{BOC}}=۲S\to S_{ABC}=۴S$

$S_{ABC}=S_{ADC}=۴S\to S_{ABCD}=۸S\to S_{\overset{\Delta}{BMO}}=\frac{۱}{۸}S_{ABCD}$

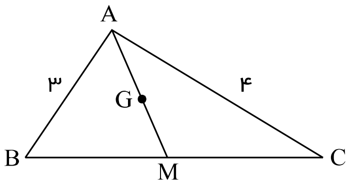
۳۳ - گزینه ۴

قطر AC را رسم می‌کنیم. در مثلث ABD سه میانه رسم شده است. بنابراین با رسم قطر AC، ۶ مثلث هم‌مساحت تشکیل می‌گردد و داریم:



$$S_{AFKE}=\frac{۱}{۶}S_{ABCD}=\frac{۱}{۶}\times ۱۲۰=۲۰$$

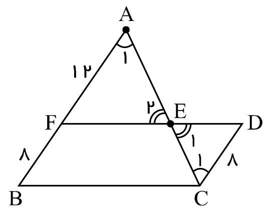
۳۴ - گزینه ۲ در هر مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است و میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند؛ بنابراین:



$$BC=\sqrt{AC^۲+AB^۲}=۵\rightarrow AM=\frac{BC}{۲}=۲/۵$$

$$\rightarrow GM=\frac{۱}{۳}AM=\frac{۲/۵}{۳}=\frac{۵}{۶}$$

۳۵ - گزینه ۱



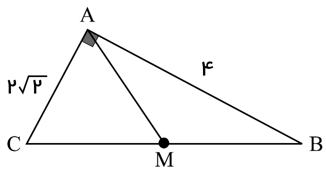
$$FDCB \text{ متوازی‌الاضلاع} \rightarrow DC=FB=۸$$

$$\left.\begin{array}{l}AB||DC\\ AC \text{ مورب}\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{موازی و مورب}]{\text{قضیه خطوط}}\left.\begin{array}{l}\hat{A}_۱=\hat{C}_۱\\ \hat{E}_۱=\hat{E}_۲\end{array}\right\}\xrightarrow{(\text{ز ز})}$$

$$\overset{\Delta}{AFE}\sim\overset{\Delta}{DCE}\rightarrow\frac{FE}{ED}=\frac{۱۲}{۸}=\frac{۳}{۲}$$

۳۶ - گزینه ۴

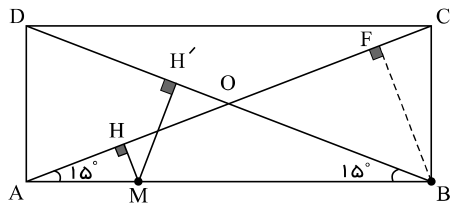
بنابراین این مثلث قائم‌الزاویه ($\hat{A}=۹۰^\circ$) است. نقطه همرسی ارتفاع‌ها A و نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها M وسط ضلع BC است و فاصله این دو از هم AM (میانه وارد بر وتر) است. می‌دانیم درمثلث قائم‌الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است.



بنابراین:

$$AM=\frac{BC}{۲}=\frac{\sqrt{(۲\sqrt{۲})^۲+۴^۲}}{۲}=\frac{۲\sqrt{۶}}{۲}=\sqrt{۶}$$

۳۷ - گزینه ۲



$$\overset{\Delta}{AOB}:OA=OB$$

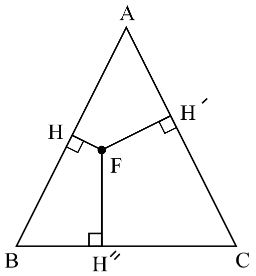
$$\rightarrow MH+MH'=\text{ارتفاع وارد بر ساق مثلث متساوی‌الساقین}=BF\rightarrow BF=۱+۲=۳$$

$$\overset{\Delta}{ABC}:۱۵^\circ \text{ ارتفاع روبه‌رو } BF=\frac{AC}{۴}\rightarrow ۳=\frac{AC}{۴}\rightarrow AC=۱۲$$

$$S_{ABCD}=۲S_{\overset{\Delta}{ABC}}=۲\times\frac{۳\times ۱۲}{۲}=۳۶$$

۳۸ - گزینه ۳

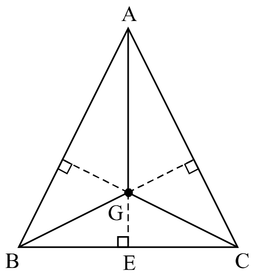
مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن برابر است با: ارتفاع مثلث.



$$FH + FH' + FH'' = ۱ + ۲ + ۳ = ۶$$

در مثلث متساوی‌الاضلاع میانه، ارتفاع و نیمساز هر رأس بر هم منطبق و برابرند و می‌دانیم میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کند.

بنابراین:



$$BG + GC + AG = ۳AG = ۳ \times \frac{۲}{۳}AE = ۲AE = ۲ \times ۶ = ۱۲$$

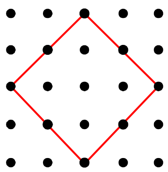
۳۹ - گزینه ۳

b تعداد نقاط مرزی و i تعداد نقاط درونی چندضلعی شبکه‌ای است؛ داریم:

$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{b}{۲} + i - ۱ \\ S' &= \frac{۲b}{۲} + ۲i - ۱ \end{aligned}\right\} \to S' - S = \frac{b}{۲} + i \xrightarrow{-۱} S' - S - ۱ = \frac{b}{۲} + i$$

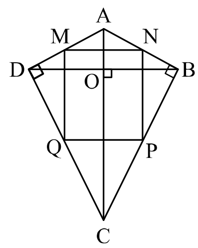
$$\to S' - S - ۱ = S \to S' = ۲S + ۱ \to S' > ۲S$$

۴۰ - گزینه ۱ فقط یک مربع شبکه‌ای وجود دارد که ضلع آن برابر $۲\sqrt{۲}$ است و با توجه به به شکل زیر تفاضل مقادیر b و i برابر است با:



$$\begin{cases} b = ۸ \\ i = ۵ \end{cases} \to b - i = ۸ - ۵ = ۳$$

۴۱ - گزینه ۲



$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ABD} \xrightarrow{\text{تالس}} MN = \frac{DB}{۲} \\ \overset{\Delta}{CBD} \xrightarrow{\text{تالس}} QP = \frac{DB}{۲} \end{cases} \xrightarrow{+} MN + QP = DB \quad (۱)$$

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ADC} \xrightarrow{\text{تالس}} MQ = \frac{AC}{۲} \\ \overset{\Delta}{ABC} \xrightarrow{\text{تالس}} NP = \frac{AC}{۲} \end{cases} \xrightarrow{+} MQ + NP = AC \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \underbrace{MN + QP + MQ + NP}_{\text{محیط ۴ ضلعی}} = DB + AC$$

$$\overset{\Delta}{ABC} : AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ \to AC^۲ = ۹ + ۳۶ \to AC = ۳\sqrt{۵}$$

$$\overset{\Delta}{ABC} : AB \times BC = BO \times AC \to ۶ \times ۳ = BO \times ۳\sqrt{۵} \to BO = \frac{۶}{\sqrt{۵}}$$

$$\to DB = \frac{۱۲}{\sqrt{۵}} = \frac{۱۲\sqrt{۵}}{۵}$$

$$(MNPQ)\ \text{محیط} = DB + AC = \frac{۲۷\sqrt{۵}}{۵}$$

۴۲ - گزینه ۱ نکته: مثلث ABC متساوی‌الساقین است مجموع فاصلهٔ هر نقطه روی قاعده از ساق‌ها برابر ارتفاع وارد بر ساق است.

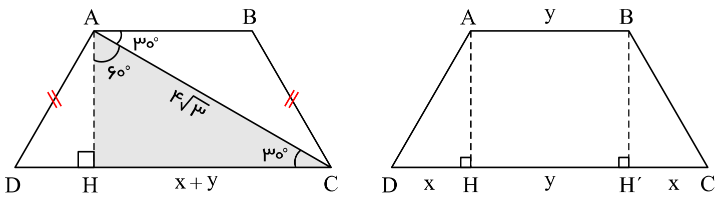
$b = ۶$ تعداد نقاط مرزی و $i = ۲$ تعداد نقاط درونی

$$S=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{۶}{۲}+۲-۱=۴$$

$$AC=\sqrt{۳^۲+۱^۲}=\sqrt{۱۰}$$

ارتفاع وارد بر ساق : $h=\dfrac{۲S}{AC}=\dfrac{۲\times ۴}{\sqrt{۱۰}}=\dfrac{۴\sqrt{۱۰}}{۵}$

۴۳ - گزینه ۳

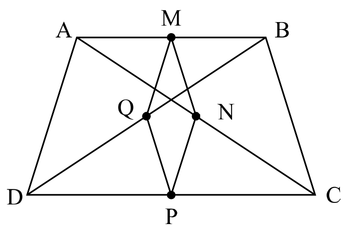


$\overset{\triangle}{AHC}$: ۳۰° روبه‌رو $AH=\dfrac{AC}{۲}=\dfrac{۴\sqrt{۳}}{۲}=۲\sqrt{۳}$

۶۰° روبه‌رو $HC=\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}AC=\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۴\sqrt{۳}=۶\rightarrow x+y=۶$

$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}AH(AB+DC)=\frac{۱}{۲}AH(y+۲x+y)=AH(x+y)\rightarrow S_{ABCD}=۲\sqrt{۳}(۶)=۱۲\sqrt{۳}$$

۴۴ - گزینه ۱



$\left.\begin{array}{l} M \text{ وسط } AB \\ Q \text{ وسط } BD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{نتیجهٔ تالس}} MQ=\dfrac{۱}{۲}AD$

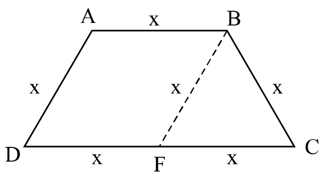
$\left.\begin{array}{l} M \text{ وسط } AB \\ N \text{ وسط } AC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{نتیجهٔ تالس}} MN=\dfrac{۱}{۲}BC$

از طرفی چهارضلعی $MNPQ$ لوزی است پس $MN=MQ$ بنابراین $AD=BC$.

۴۵ - گزینه ۱ بی‌شمار چهارضلعی وجود دارد که قطرهایش، عمود برهم یا برابر باهم باشد بنابراین گزینهٔ ۲ و ۳ مثال نقض دارد. همچنین مثال نقض گزینهٔ ۴ ذوزنقه متساوی‌الساقین است.

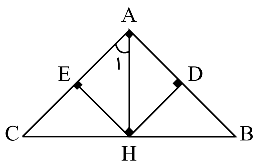
۴۶ - گزینه ۴

از B خطی موازی ساق AD رسم می‌کنیم تا DC را در F قطع کند، داریم:



$$BF=FC=BC=x\rightarrow \hat{C}=۶۰^\circ$$

۴۷ - گزینه ۲ نکته: در مثلث قائم‌الزاویه اگر یکی از زوایای آن ۱۵ درجه باشد، آن‌گاه طول ارتفاع وارد بر وتر، یک چهارم طول وتر است.



$\overset{\triangle}{ABC}:\hat{A}=۹۰^\circ\rightarrow \hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ\xrightarrow{\hat{C}=۵\hat{B}}۶\hat{B}=۹۰^\circ\rightarrow \hat{B}=۱۵\,,\ \hat{C}=۷۵^\circ$

$\overset{\triangle}{AHC}:\hat{A}_۱=\hat{B}=۱۵^\circ$

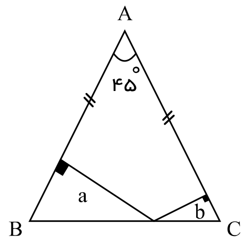
$\overset{\triangle}{AHB}:\hat{B}=۱۵^\circ\rightarrow HD=\dfrac{AB}{۴}$

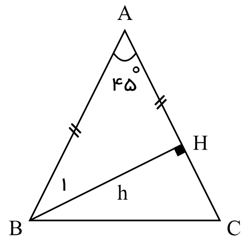
$\overset{\triangle}{AHC}:\hat{A}_۱=۱۵^\circ\rightarrow HE=\dfrac{AC}{۴}$

در نتیجه:

$$\Rightarrow \frac{S_{ADHE}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{HD\times HE}{\frac{۱}{۲}AB\times AC}=\frac{\frac{AB}{۴}\times\frac{AC}{۴}}{\frac{۱}{۲}AB\times AC}=\frac{۱}{۸}$$

۴۸ - گزینه ۳ می‌دانیم مجموع فواصل یک نقطه روی قاعدهٔ مثلث متساوی الساقین از ساق‌های مثلث با ارتفاع وارد بر ساق برابر است داریم:





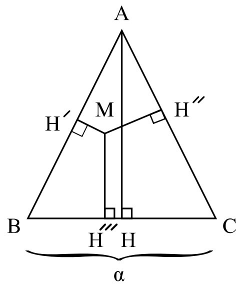
$$a+b=h\rightarrow h=۲\sqrt{۲}$$

$$\overset{\triangle}{ABH}:\begin{cases}\hat{A}=۴۵\\ \hat{H}=۹۰^\circ\rightarrow\hat{B}=۴۵^\circ\end{cases}\rightarrow AH=BH=h=۲\sqrt{۲}$$

$$\overset{\triangle}{ABH}:\xrightarrow{\text{فیثاغورس}}AB=\sqrt{AH^۲+BH^۲}=۴\rightarrow AB=AC=۴$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AC\times BH=\frac{۱}{۲}\times۴\times۲\sqrt{۲}=۴\sqrt{۲}$$

۴۹ - گزینه ۲



می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع مثلث برابر است با ارتفاع مثلث: بنابراین: $MH'+MH''+MH'''=AH$

از طرفی ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابراست با: $AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$

همچنین مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با: $S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$

$$S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲\rightarrow ۳\sqrt{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲\rightarrow a^۲=۱۲\rightarrow a=\sqrt{۱۲}$$

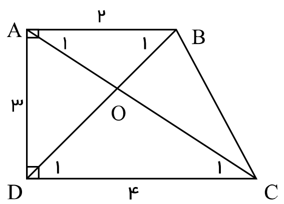
از طرفی:

$$AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a\rightarrow AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\sqrt{۱۲}=۳\rightarrow MH'+MH''+MH'''=۴$$

در نتیجه:

$$\rightarrow MH'''+\frac{۳}{۸}+\frac{۱۵}{۸}=۳\rightarrow MH'''=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$$

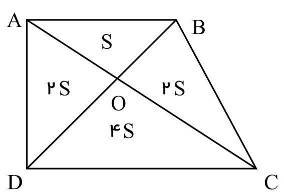
۵۰ - گزینه ۱



در ذوزنقه با رسم قطرها، مساحت دو مثلثی که ساق‌ها اضلاع آن هستند برابرند بنابراین:

$$S_{\overset{\triangle}{OAD}}=S_{\overset{\triangle}{OBC}}$$

دو قاعده ذوزنقه موازیند بنابراین: $\hat{D}_۱=\hat{B}_۱$ و $\hat{C}_۱=\hat{A}_۱$ و دو مثلث $\overset{\triangle}{OAB}$ و $\overset{\triangle}{OCD}$ متشابه اند داریم:



$$\frac{S_{\overset{\triangle}{OAB}}}{S_{\overset{\triangle}{OCD}}}=(\frac{AB}{DC})^۲=\frac{۱}{۴}$$

همچنین دو مثلث $\overset{\triangle}{OAB}$ و $\overset{\triangle}{OAD}$ هم ارتفاع هستند بنابراین نسبت مساحت ها با نسبت قاعده‌ها در این مثلث‌ها برابر است: $\frac{S_{\overset{\triangle}{OAB}}}{S_{\overset{\triangle}{OAD}}}=\frac{OB}{OD}=\frac{۲}{۴}$

بنابراین اگر مساحت مثلث OAB را برابر S در نظر گرفته و سایر مثلث‌ها را بر اساس آن مشخص کنیم داریم:

$S_{ABCD} = ۹S$

$S_{ABCD} = \frac{(۲ + ۴) \times ۳}{۲} = ۹ \rightarrow ۹S = ۹ \rightarrow S = ۱ \rightarrow S_{\overset{\Delta}{OBC}} = ۲S = ۲$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۹ - ۱	۱۷ - ۴	۲۵ - ۳	۳۳ - ۴	۴۱ - ۲	۴۹ - ۲
۲ - ۴	۱۰ - ۲	۱۸ - ۲	۲۶ - ۱	۳۴ - ۲	۴۲ - ۱	۵۰ - ۱
۳ - ۱	۱۱ - ۳	۱۹ - ۴	۲۷ - ۲	۳۵ - ۱	۴۳ - ۳	
۴ - ۲	۱۲ - ۱	۲۰ - ۳	۲۸ - ۱	۳۶ - ۴	۴۴ - ۱	
۵ - ۴	۱۳ - ۳	۲۱ - ۲	۲۹ - ۴	۳۷ - ۲	۴۵ - ۱	
۶ - ۱	۱۴ - ۲	۲۲ - ۱	۳۰ - ۱	۳۸ - ۳	۴۶ - ۴	
۷ - ۴	۱۵ - ۳	۲۳ - ۲	۳۱ - ۳	۳۹ - ۳	۴۷ - ۲	
۸ - ۴	۱۶ - ۳	۲۴ - ۲	۳۲ - ۲	۴۰ - ۱	۴۸ - ۳	