

۱- در شکل، A و B دو سر یک قطر دایره‌اند. اگر $\widehat{AMB} = 5x$ و $\widehat{BAM} = 6x$ ، محیط دایره چند برابر کمان \widehat{ANM} است؟

۱۰ (۲)

۱۱ (۱)

۸ (۴)

۹ (۳)

۲- در دایره‌ای به شعاع ۶، طول وتری که عمود منصف یکی از شعاع‌های آن است، کدام است؟

۱۲ (۴)

$12\sqrt{3}$ (۳)

$6\sqrt{3}$ (۷)

$3\sqrt{3}$ (۱)

۳- در دایره‌ای به شعاع ۱۰، فاصله وتری به طول ۱۶ از مرکز آن کدام است؟

۸ (۴)

۶ (۳)

$2\sqrt{19}$ (۷)

۱۶ (۱)

۴- دایره C_1 داخل دایره C_2 قرار دارد به طوری که با آن هم مرکز است، اگر طول وتری که از C_2 بر C_1 مماس است، $2\sqrt{5}$ باشد، مساحت محصور

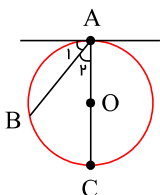
بین دو دایره کدام است؟

5π (۴)

$\frac{5}{2}\pi$ (۳)

10π (۷)

$\sqrt{5}\pi$ (۱)



۵- در شکل مقابل $\widehat{BC} + \widehat{A}_1 = 130^\circ$ ، \widehat{A}_2 کدام است؟

50° (۲)

40° (۱)

30° (۴)

35° (۳)

۶- نزدیک‌ترین و دورترین فاصله‌ی نقطه‌ی A از یک دایره به ترتیب ۸ و ۱۲ است، شعاع دایره کدام است؟

۴ (۴)

۶ (۳)

۲ (۷)

۳ (۱)

۷- دورترین فاصله نقطه‌ی A از دایره‌ای به شعاع r چقدر است در صورتی که طول مماسی که از A بر دایره رسم شود $\sqrt{3}r$ باشد؟

$3r$ (۴)

$\sqrt{3}r$ (۳)

$2r$ (۷)

$\sqrt{2}r$ (۱)

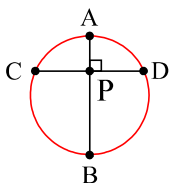
۸- در دایره شکل زیر به شعاع ۵، AB و CD دو وتر عمود بر هم هستند. اگر $PB = 2AP = 2PD$ باشد طول وتر AB کدام است؟

$2\sqrt{10}$ (۷)

$3\sqrt{10}$ (۱)

۲۰ (۴)

۳۰ (۳)



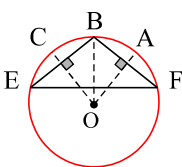
۹- در دو دایره‌ی هم‌مرکز، طول وتری از دایره‌ی بزرگتر که بر دایره‌ی کوچکتر مماس است، برابر ۴ می‌باشد، مساحت سطح بین دو دایره کدام است؟

16π (۴)

π (۳)

2π (۷)

4π (۱)



۱۰- اگر $\widehat{AOB} = \alpha$ و $\widehat{BOC} = \beta$ باشد، در دایره به شعاع واحد اندازه EF برابر کدام است؟

$\sin(\alpha + \beta)$ (۲)

$2 \cos(\alpha + \beta)$ (۱)

$\cos(\alpha + \beta)$ (۴)

$2 \sin(\alpha + \beta)$ (۳)

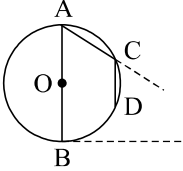
۱۱- دو دایره به شعاع‌های ۵ و ۹ متر هم مرکز هستند طول وتر از دایره بزرگتر مماس بر دایره کوچکتر کدام است؟

- ① $8\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{14}$ ③ $6\sqrt{7}$ ④ $4\sqrt{6}$

۱۲- نقطه‌ی O از رأس‌های مثلث ABC که در آن $\hat{A} = 100^\circ$ و $\hat{B} = 10^\circ$ به یک فاصله است. زاویه‌ی ABO چند درجه است؟

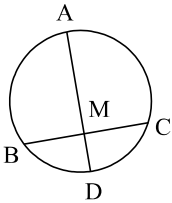
- ① 5° ② 10° ③ 15° ④ 20°

۱۳- در دایره‌ی زیر، O مرکز دایره است. وتر CD موازی با AB و به اندازه‌ی نصف آن، رسم شده است. اگر از B مماسی بر دایره رسم کنیم، امتداد وتر AC ، این مماس را با چه زاویه‌ای قطع می‌کند؟



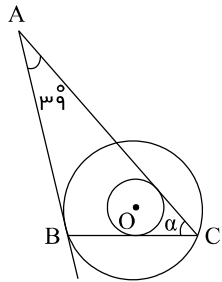
- ① 15° ② 30°
③ 45° ④ 60°

۱۴- در شکل زیر D وسط کمان BC و M وسط وتر BC است. اگر $AD = 2BC$ ، آن گاه کمان AB چند درجه است؟



- ① 120° ② 135°
③ 150° ④ 165°

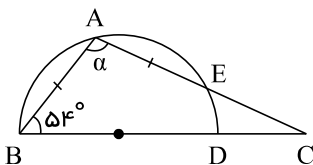
۱۵- دو دایره‌ی هم مرکز مطابق شکل، مفروضند. وتر BC در دایره‌ی بزرگ‌تر بر دایره‌ی کوچک‌تر و AB در نقطه‌ی B بر دایره‌ی بزرگ‌تر مماس است. اندازه‌ی α کدام است؟



- ① 34° ② 32°
③ 30° ④ 36°

۱۶- در مثلث ABC میانه‌ی BC و عمود منصف AB همدیگر را در نقطه‌ی O قطع می‌کنند. اگر نقطه‌ی O مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC باشد، نوع مثلث ABC لزوماً کدام است؟

- ① قائم‌الزاویه ② متساوی‌الاضلاع ③ متساوی‌الساقین ④ قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین



۱۷- در شکل زیر، $AB = AE$ و BD قطر نیم دایره است. زاویه‌ی α چند درجه است؟

- ① 108° ② 116°
③ 120° ④ 126°

۱۸- تعداد از جملات زیر درست است؟

- ۱- در یک دایره، از دو وتر نابرابر، آنکه بزرگ‌تر است به مرکز دایره نزدیک‌تر است.
- ۲- در دایره‌ی $C(O, R)$ اگر وتر AB از وتر CD بزرگتر باشد، مساحت مثلث OAB از مساحت مثلث OCD بیشتر است.
- ۳- در دایره‌ی $C(O, R)$ اگر وتر AB از وتر CD بزرگتر باشد، محیط مثلث OAB از محیط مثلث OCD بیشتر است.
- ۴- در دایره‌ی $C(O, R)$ اگر وتر AB از وتر CD بزرگتر باشد، مساحت قطاع OAB از مساحت قطاع OCD بیشتر است.
- ۵- در دایره‌ی $C(O, R)$ اگر وتر AB از وتر CD بزرگتر باشد، محیط قطاع OAB از محیط قطاع OCD بیشتر است.

- ① ۶ ② ۵ ③ ۴ ④ ۳



۱۹- چه تعداد از جملات زیر صحیح است؟

(۱) در دو دایره، کمان‌های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند.

(۲) در دو دایره، وترهای نظیر دو کمان مساوی با هم برابرند.

(۳) در دو دایره، وترهای مساوی، از مرکز دایره به یک فاصله‌اند.

(۴) در دو دایره، وترهایی که از مرکز دایره به یک فاصله باشند، با هم برابرند.

(۴) هیچکدام

(۳) ۳

(۷) ۲

(۱) ۱

۲۰- وتر $AB = a$ در دایره‌ی $C(O, R)$ جابجا می‌شود. نقطه‌ی M روی این وتر طوری قرار دارد که همواره داریم: $AM = \frac{1}{3}BM$. مساحت مکان هندسی نقطه‌ی M کدام است؟

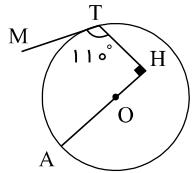
(۴) $\pi(R^2 - \frac{3a^2}{16})$

(۳) $\pi(R^2 - \frac{a^2}{16})$

(۷) $\pi(R^2 - \frac{a^2}{9})$

(۱) $\frac{\pi a^2}{9}$

۲۱- در شکل مقابل MT مماس بر دایره‌ی $C(O, R)$ در نقطه‌ی T بوده و $\widehat{MTH} = 110^\circ$ می‌باشد. اندازه‌ی \widehat{AT} چند درجه است؟



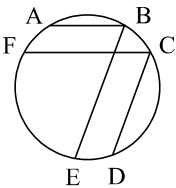
(۷) 100°

(۱) 90°

(۴) 120°

(۳) 110°

۲۲- در شکل $AB \parallel FC$ و $CD \parallel BE$ و $\widehat{AB} = 60^\circ$ و $\widehat{CD} = 40^\circ$ باشد آنگاه زاویه‌ی \widehat{FCD} چقدر است؟



(۷) 55°

(۱) 90°

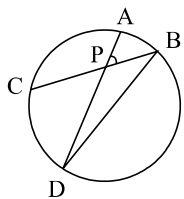
(۴) 80°

(۳) 70°

۲۳- در دایره کدام مورد غلط است؟

(۱) از دو وتر نامساوی در یک دایره، آن که طولش کمتر است به مرکز نزدیکتر است. (۷) دو وتر مساوی از مرکز به یک فاصله‌اند.

(۳) اگر وسط کمان را به وسط وتر همان کمان وصل کنیم از مرکز دایره می‌گذرد. (۴) قطر عمود بر یک وتر آنرا نصف می‌کند.



۲۴- در شکل روبرو $\widehat{D} = \frac{1}{2}\widehat{B}$ زاویه‌ی \widehat{P} چند برابر کمان AB است؟

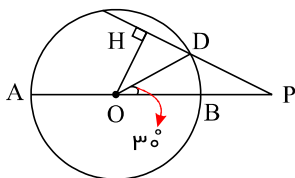
(۴) ۲

(۳) $\frac{3}{2}$

(۷) ۱

(۱) $\frac{2}{3}$

۲۵- در شکل زیر AB قطر دایره زاویه‌ی $O = 30^\circ$ و طول PD برابر شعاع دایره است. اندازه‌ی OH چه مضربی از شعاع دایره است؟



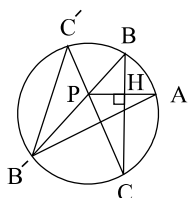
(۷) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۴) $\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{3}{4}$

۲۶- در شکل مقابل BC عمودمنصف AP است. اگر $\widehat{PCH} = \alpha$ باشد، زاویه‌ی $\widehat{BB'A}$ کدام است؟



(۷) $\frac{\alpha}{2}$

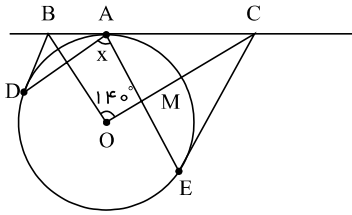
(۱) α

(۴) $\frac{\alpha}{3}$

(۳) $\frac{2\alpha}{3}$

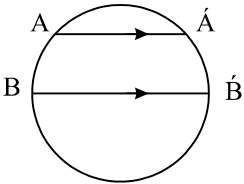


۲۷- در شکل مقابل BC و CE و BD بر دایره مماسند و نقطه‌ی O مرکز دایره است. اگر $\widehat{O} = 14^\circ$ باشد، x کدام است؟



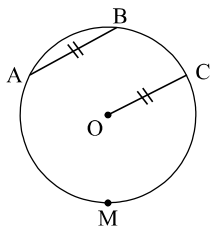
- ۱) 100°
- ۲) 140°
- ۳) 40°
- ۴) 120°

۲۸- دو وتر موازی AA' و BB' در دایره‌ای رسم می‌شوند. اگر M نقطه‌ای روی محیط دایره باشد، دو زاویه‌ی \widehat{AMB} و $\widehat{A'MB'}$ چگونه‌اند؟



- ۱) مساوی
- ۲) مکمل
- ۳) با اختلاف قائمه
- ۴) مساوی یا مکمل

۲۹- در شکل مقابل $AB \parallel OC$ و $AB = OC$ و O مرکز دایره است. اندازه‌ی کمان \widehat{AMC} کدام است؟



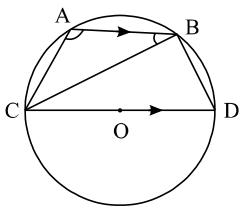
- ۱) 260°
- ۲) 210°
- ۳) 200°
- ۴) 240°

۳۰- اگر مساحت دایره، وقتی شعاع دایره به اندازه‌ی n زیاد می‌شود، دو برابر شود، آنگاه R برابر است با:

- ۱) $n(1 + \sqrt{2})$
- ۲) $n(\sqrt{2} - 1)$
- ۳) n
- ۴) $n(2 - \sqrt{2})$

۳۱- وترهای AB و CD از دایره‌ی $C(O, R)$ در فواصل ۳ و $2\sqrt{6}$ سانتی‌متری از مرکز دایره واقع اند. اگر $3AB = 2CD$ ، شعاع دایره کدام است؟

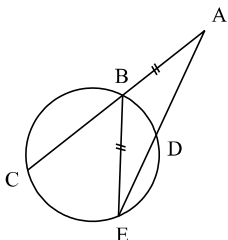
- ۱) $3\sqrt{2}$
- ۲) $2\sqrt{3}$
- ۳) $3\sqrt{6}$
- ۴) ۶



۳۲- در شکل زیر، وتر AB با قطر CD موازی است. در مثلث ABC ، مقدار $\widehat{A} - \widehat{B}$ کدام است؟

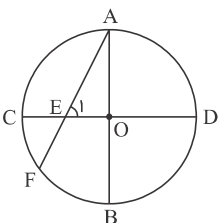
- ۱) 60°
- ۲) 90°
- ۳) 100°
- ۴) 120°

۳۳- مطابق شکل $AB = BE$ است. نسبت اندازه‌ی کمان \widehat{CE} به اندازه‌ی کمان \widehat{BD} کدام است؟



- ۱) ۱
- ۲) ۲
- ۳) ۳
- ۴) ۴

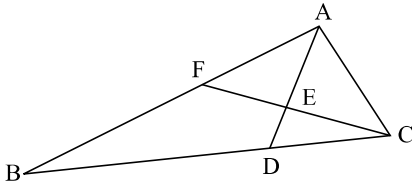
۳۴- در شکل مقابل، دو قطر AB و CD بر هم عمودند. اگر $OE = EF$ باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی E_1 کدام است؟



- ۱) 30°
- ۲) 40°
- ۳) 45°
- ۴) 60°

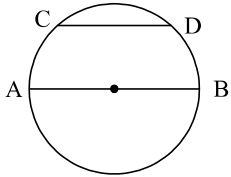
۳۵- نیم‌دایره‌ای به قطر AB و به مرکز O مفروض است. نقاط E و D روی محیط این نیم‌دایره طوری قرار دارند که $\widehat{AD} = 60^\circ$ و $\widehat{DE} = 80^\circ$ می‌باشد. اگر فاصله نقطه O از وترهای AD ، DE و EB را به ترتیب با h_1 ، h_2 و h_3 نمایش دهیم، کدام گزینه صحیح است؟

- ۱ $h_1 > h_2 > h_3$
 ۲ $h_2 > h_3 > h_1$
 ۳ $h_1 > h_3 > h_2$
 ۴ $h_3 > h_1 > h_2$



۳۶- در شکل مقابل، اگر $AF = AD = AC$ و $\widehat{BAD} = 70^\circ$ باشد، زاویه \widehat{FCB} کدام است؟

- ۱ 20°
 ۲ 30°
 ۳ 35°
 ۴ 45°



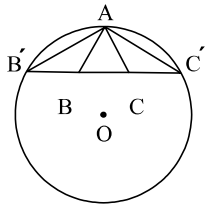
۳۷- در دایره مقابل، وتر CD به موازات قطر AB رسم شده است. اندازه $\widehat{ACD} - \widehat{ADC}$ کدام است؟

- ۱ 60°
 ۲ 90°
 ۳ 30°
 ۴ 45°

۳۸- خط d در نقطه A بر شعاع OA از دایره $C(O, r)$ عمود است و B نقطه دیگری روی خط d است. کدام گزینه نادرست است؟

- ۱ d بر دایره C مماس است.
 ۲ $OB < OA$
 ۳ OB بر d عمود نیست.
 ۴ d دایره C را در نقطه دیگری قطع نمی‌کند.

۳۹- در مثلث ABC ضلع BC را از طرف B به اندازه AB تا نقطه B' و از طرف C به اندازه AC تا نقطه C' امتداد می‌دهیم. اگر مرکز دایره محیطی مثلث $AB'C'$ باشد، آنگاه کدام گزینه لزوماً صحیح نمی‌باشد؟



- ۱ AO نیمساز زاویه BAC است.
 ۲ $\widehat{OAB} = \widehat{OB'B}$
 ۳ $\widehat{OAC} = \widehat{OC'C}$
 ۴ AO عمودمنصف $B'C'$ است.

۴۰- اگر دایره $C(O, 7x - 5)$ و خط d نقطه مشترکی نداشته باشند و فاصله مرکز دایره تا خط d برابر $x^2 + 1$ باشد، تعداد جواب طبیعی x کدام است؟

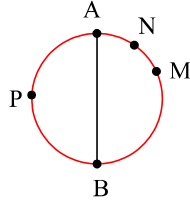
- ۱ بی شمار
 ۲ ۱
 ۳ ۴
 ۴ ۰



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲

AB قطر دایره است، پس محیط آن را نصف می کند



$$\text{محیط: } 2 \times \widehat{AMB} = 2 \times 5x = 10x$$

از طرفی:

$$\widehat{BAM} = \widehat{BPA} + \widehat{ANM}$$

$$6x = 5x + \widehat{ANM} \Rightarrow \widehat{ANM} = x$$

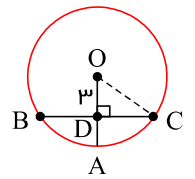
$$? = \frac{\text{محیط}}{\widehat{ANM}} = \frac{10x}{x} = 10$$

۲ - گزینه ۲

$$OD = 3, OC = 6$$

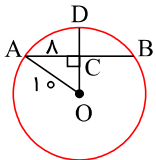
$$\triangle ODC: OD^2 + CD^2 = OC^2$$

$$3^2 + CD^2 = 6^2 \Rightarrow CD = 3\sqrt{3}$$



BC، دو برابر CD است پس می شود $6\sqrt{3}$

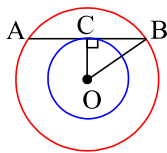
۳ - گزینه ۳ OC عمود بر AB است پس منصف آن نیز می باشد.



$$\triangle AOC: OC^2 = AO^2 - AC^2 \Rightarrow OC = 6$$

۴ - گزینه ۴

شعاع C_1 را R_1 و شعاع C_2 را R_2 فرض می کنیم:



AB وتر مورد نظر که شعاع OC از دایره C_1 بر آن عمود در نتیجه، منصف آن نیز هست پس:

$$AC = BC = \sqrt{5}$$

حال در مثلث $\triangle OCB$ داریم:

$$\triangle OCB: OC^2 + BC^2 = OB^2$$

$$R_2^2 + (\sqrt{5})^2 = R_1^2$$

$$R_2^2 - R_1^2 = 5$$

$$? = S_{C_2} - S_{C_1} = \pi R_2^2 - \pi R_1^2 = 5\pi$$

پس داریم:

حال این رابطه را در π ضرب می کنیم:



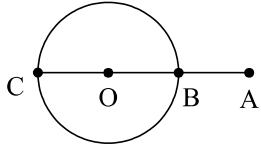
$$\widehat{BC} + \widehat{A}_1 = 130^\circ$$

$$\widehat{BC} + \widehat{AB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BC} + 2\widehat{A}_1 = 180^\circ \Rightarrow \underbrace{(\widehat{BC} + \widehat{A}_1)}_{130^\circ} + \widehat{A}_1 = 180^\circ$$

دو رابطه فوق را از هم کم می کنیم:

$$\Rightarrow \widehat{A}_1 = 50^\circ \Rightarrow \widehat{A}_r = 40^\circ$$

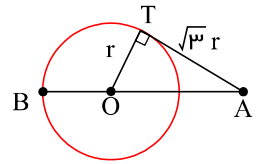
۶ - گزینه ۲ اگر از A به مرکز دایره وصل کنیم تا دایره را در نقاط B و C قطع کند آنگاه AB نزدیک ترین فاصله و AC دورترین فاصله است.



$$2R = BC = AC - AB = 12 - 8 = 4 \Rightarrow R = 2$$

۷ - گزینه ۴ در شکل AB دورترین فاصله ی A تا دایره است.

$$\begin{aligned} \triangle TOA : OT^2 + AT^2 &= OA^2 \\ r^2 + 3r^2 &= OA^2 \Rightarrow OA = 2r \\ ? = AO + OB &= 2r + r = 3r \end{aligned}$$



۸ - گزینه ۱

طبق روابط طولی: $AP \times PB = CP \times PD$

$$PD = x \Rightarrow x \times 2x = CP \times x \Rightarrow CP = 2x$$

مجموع مربعات طول قطعات ایجاد شده توسط دو وتر عمود بر هم برابر مربع قطر دایره است. داریم:

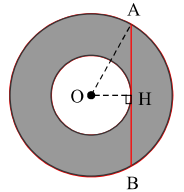
$$(AP)^2 + (PB)^2 + (PC)^2 + (PD)^2 = (2R)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x^2 + 4x^2 + x^2 = (2 \times 5)^2 = 100 \Rightarrow 10x^2 = 100 \Rightarrow x = \sqrt{10}$$

$$AB = AP + PB = x + 2x = 3x = 3\sqrt{10}$$

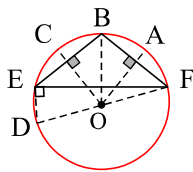
۹ - گزینه ۱ اگر مساحت ناحیه ی هاشورزده را با S نمایش دهیم، داریم:

$$\begin{aligned} AH = HB = \frac{1}{2}AB = 2 \Rightarrow S &= \pi(OA)^2 - \pi(OH)^2 \\ &= \pi(OA^2 - OH^2) \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} S = \pi(AH)^2 = \pi(2)^2 = 4\pi \end{aligned}$$



۱۰ - گزینه ۳

می دانیم شعاع عمود بر وتر، کمان آن را نصف می کند با توجه به شکل داریم:



$$\widehat{AOC} = \alpha + \beta \Rightarrow \widehat{EF} = 2(\alpha + \beta)$$

اگر قطر گذرا بر F رسم شود در مثلث قائم الزاویه DEF داریم:

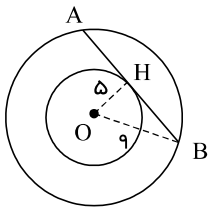
$$(D = \alpha + \beta, DF = 2) \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \frac{\widehat{EF}}{2} \Rightarrow \widehat{EF} = 2 \sin(\alpha + \beta)$$

۱۱ - گزینه ۲

$$BH = \sqrt{9^2 - 5^2} = \sqrt{81 - 25} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

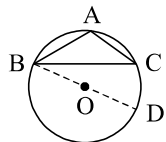
باتوجه به شکل $AB = 2BH$ است: $AB = 4\sqrt{14}$ در نتیجه

$$AB = 4\sqrt{14}$$



۱۲ - گزینه ۴

نقطه ای که از هر سه رأس مثلث به یک فاصله باشد، مرکز دایره محیطی آن است. مطابق شکل دایره ی محیطی مثلث ABC و قطر گذرنده از B را در آن رسم می کنیم،

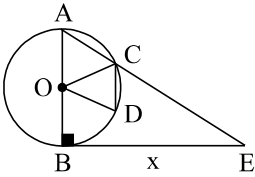


داریم:

$$\widehat{ABD} = \frac{\widehat{ACD}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{AB}}{2} = \frac{180^\circ - 2\widehat{C}}{2} = 90^\circ - \widehat{C}$$

$$= 90^\circ - (180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B}) = 90^\circ - (180^\circ - 110^\circ) = 20^\circ$$

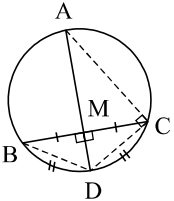
۱۳ - گزینه ۲



از O به C و D وصل می‌کنیم، در این صورت مثلث ODC متساوی‌الاضلاع است (چرا؟) و در نتیجه $\widehat{COD} = 60^\circ$ همچنین ثابت می‌شود $\triangle OAC$ هم متساوی‌الاضلاع است و $\widehat{OAC} = 60^\circ$.

از آن جا که شعاع دایره، بر مماس رسم شده از یک نقطه واقع بر دایره، در آن نقطه عمود است، پس $\widehat{OBE} = 90^\circ$ و در نتیجه در مثلث ABE داریم $\widehat{E} = 30^\circ$ که زاویه‌ی میان امتداد AC و BE است.

۱۴ - گزینه ۳



از آنجا که AD وتر و کمان BC را نصف کرده است، پس قطر دایره است. در نتیجه مثلث ACD قائم‌الزاویه است. چون $AD = 2BC = 4CM$ و ارتفاع وارد بر وتر AD است، پس $\widehat{DAC} = 15^\circ$ (در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که ارتفاع وارد بر وتر، یک چهارم وتر باشد، یک زاویه 15° است)، داریم:

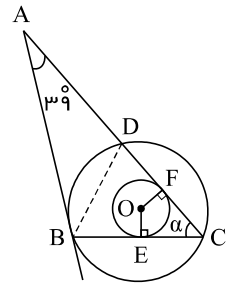
$$\widehat{ADC} = 75^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{AB} = 15^\circ$$

۱۵ - گزینه ۱ می‌دانیم اگر فاصله‌ی مرکز دایره از دو وتر برابر باشد، آن گاه دو وتر مساویند.

شعاع دایره کوچک‌تر: $OE = OF \Rightarrow BC = CD$

$$\Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{BDC} = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABD \text{ زاویه‌ی خارجی: } \widehat{BDC} = \widehat{A} + \widehat{ABD} \\ \triangle ABD \text{ زاویه‌ی ظلی: } \widehat{ABD} = \frac{\widehat{BD}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 39^\circ + \frac{\widehat{BD}}{2}$$



از طرفی $\widehat{BCD} = \frac{\widehat{BD}}{2}$ (زاویه‌ی محاطی) پس $\alpha = \frac{\widehat{BD}}{2}$ در نتیجه:

$$90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 39^\circ + \alpha \Rightarrow \frac{3\alpha}{2} = 51^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2 \times 51^\circ}{3} = 2 \times 17^\circ = 34^\circ$$

۱۶ - گزینه ۳ نقطه‌ی هم‌رسمی عمود منصف‌های مثلث ABC است، (زیرا O مرکز دایره‌ی محیطی مثلث است.) یعنی میانه‌ی ضلع BC عمود منصف این ضلع نیز هست، بنابراین مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

۱۷ - گزینه ۱

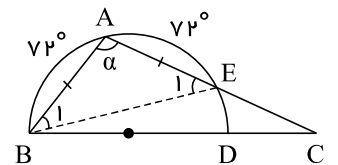
$$\widehat{ABC} = \frac{\widehat{AED}}{2} \Rightarrow 54^\circ = \frac{\widehat{AED}}{2} \Rightarrow \widehat{AED} = 108^\circ$$

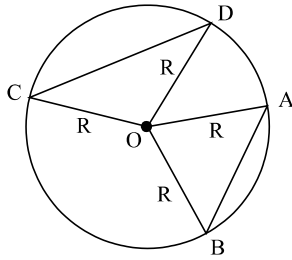
$$\widehat{AB} = \widehat{BAD} - \widehat{AED} \Rightarrow \widehat{AB} = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$$

$$AB = AE \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AE} \Rightarrow \widehat{AE} = 72^\circ$$

$$\widehat{B}_1 = \widehat{E}_1 = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

$$\triangle ABE: \alpha + \widehat{B}_1 + \widehat{E}_1 = 180^\circ \Rightarrow \alpha + 2 \times 36^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 108^\circ$$





جمله ۱: بر طبق مطالب کتاب درسی درست است.

جمله ۲: بر طبق نکته نادرست است.

جمله ۳: بر اساس تعریف محیط مثلث درست است.

جمله ۴: باتوجه به شکل مقابل و براساس نکات قبلی می دانیم که: $\widehat{COD} > \widehat{AOB}$

مساحت قطاع‌ها بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{\widehat{AOB}} = \pi R^2 \times \frac{\widehat{AOB}}{2\pi}, \quad R_{\triangle COD} = \pi R^2 \times \frac{\widehat{COD}}{2\pi}$$

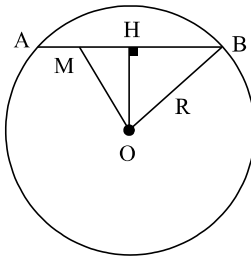
بنابراین $S_{\widehat{COD}} > S_{\widehat{AOB}}$ بنا بر این جمله درست است.

جمله ۵: بر اساس این نکته که کمان CD از کمان AB بزرگتر است، درست می‌باشد.

۱۹ - گزینه ۴ در موارد ۱ و ۲ و ۳ و ۴، با شرایط مطرح شده، حتماً باید دو دایره برابر باشند که در حالت کلی درست نیست.

۲۰ - گزینه ۴

مطابق شکل داریم:



$$\left\{ \begin{array}{l} AM = \frac{a}{4} \Rightarrow MH = \frac{a}{4} \\ OH = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

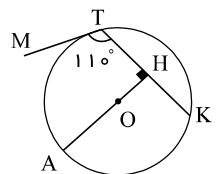
$$\begin{aligned} OM^2 &= \left(\frac{a}{4}\right)^2 + OH^2 = \frac{a^2}{16} + R^2 - \frac{a^2}{4} \\ OM^2 &= R^2 - \frac{3a^2}{16} \Rightarrow OM = \sqrt{R^2 - \frac{3a^2}{16}} \end{aligned}$$

بنابراین مکان هندسی نقطه M دایره‌ای به شعاع $\sqrt{R^2 - \frac{3a^2}{16}}$ و به مرکز نقطه O می‌باشد.

$$S = \pi \cdot OM^2 = \pi \left(R^2 - \frac{3a^2}{16} \right)$$

۲۱ - گزینه ۳ اگر TH را ادامه دهیم تا نقطه K ، زاویه K ظلی می‌باشد. همچنین چون OH شعاع عمود بر وتر TK می‌باشد. بنابراین کمان آن وتر را نصف می‌کند. داریم:

$$\widehat{TA}K = 2 \times 11^\circ = 22^\circ \Rightarrow \widehat{AT} = \widehat{AK} = \frac{22^\circ}{2} = 11^\circ$$



۲۲ - گزینه ۴ می‌دانیم که کمانهای بین دو وتر موازی، مساویند داریم:

$$\begin{cases} AB \parallel FC \Rightarrow \widehat{AF} = \widehat{BC} \\ CD \parallel BE \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{DE} \end{cases} \Rightarrow \widehat{AF} = \widehat{BC} = \widehat{DE} = x$$

$$\widehat{AB} + 3x + \widehat{CD} + \widehat{EF} = 360^\circ \Rightarrow 60^\circ + 3x + 40^\circ + 110^\circ = 360^\circ \Rightarrow x = 50^\circ$$

$$\widehat{FCD} = \frac{\widehat{FED}}{2} = \frac{\widehat{EF} + \widehat{DE}}{2} = \frac{110^\circ + 50^\circ}{2} = 80^\circ$$

۲۳ - گزینه ۱ بصورت زیر صحیح است: از دو وتر نامساوی در یک دایره، آن که طولش کمتر است از مرکز دایره دورتر است.

۲۴ - گزینه ۳

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{D} = \frac{1}{2} \widehat{B} \\ \widehat{P} = \widehat{D} + \widehat{B} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{P} = 3\widehat{D} = 3 \times \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{3}{2} \widehat{AB}$$

۲۵ - گزینه ۲

داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{OH}{OD} = \sin 60^\circ \\ OD = R \end{array} \right\} \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{3}}{2} R$$

شعاع دایره $OD = PD = R$

$$\triangle ODP \text{ متساوی‌الساقین} \Rightarrow \widehat{P} = \widehat{DOP} = 30^\circ$$

$$\widehat{ODH} = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ \text{ زاویه خارجی}$$

۲۶ - گزینه ۱ از C به A وصل می‌کنیم. دو مثلث $\triangle PCH$ و $\triangle ACH$ به حالت دو ضلع و زاویه بین (قائمه) هم‌نهشت هستند. داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{HCA} = \widehat{HCP}, \widehat{HCP} = \frac{\widehat{BC'}}{2} \\ \widehat{HCP} = \alpha \end{array} \right. \Rightarrow \widehat{BC'} = 2\alpha$$



$$H\hat{C}A = H\hat{C}P = \alpha \Rightarrow \widehat{AB} = 2\alpha, \quad \widehat{BB'A} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$

۲۷ - گزینه ۲ مماسهای رسم شده از نقطه بر دایره برابرند. داریم:

$$\begin{cases} CA = CE \Rightarrow OC \perp AE \Rightarrow M = 90^\circ \\ AB = BD \Rightarrow OB \perp AD \Rightarrow N = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow ANOM: 90^\circ + 90^\circ + 40^\circ + x = 360^\circ \Rightarrow x = 140^\circ$$

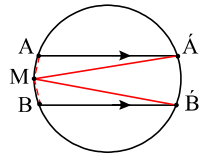
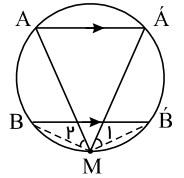
$$AA' \parallel BB' \Rightarrow \widehat{A'B'} = \widehat{AB} \Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{\widehat{A'B'}}{2}$$

$$\text{محاطی } \widehat{AMB} = \frac{\widehat{AA'} + \widehat{A'B} + \widehat{BB'}}{2}$$

$$\text{محاطی } \widehat{A'MB'} = \frac{\widehat{A'B'}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{AMB} + \widehat{A'MB'} = \frac{\widehat{AA'} + \widehat{A'B} + \widehat{BB'} + \widehat{A'B'}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

۲۸ - گزینه ۴



۲۹ - گزینه ۴

$AB \parallel OC, AB = OC \Rightarrow ABCO$ متوازی الاضلاع $\Rightarrow AO = BC$

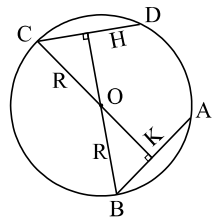
$$\left. \begin{aligned} \triangle AOB: AO = OB = AB \Rightarrow \widehat{AB} = 60^\circ \\ \triangle BOC: OB = OC = BC \Rightarrow \widehat{BC} = 60^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{AC} = 360^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 240^\circ$$

۳۰ - گزینه ۱

$$S = \pi R^2 \Rightarrow 2S = \pi(R+n)^2 \Rightarrow 2\pi R^2 = \pi(R^2 + 2Rn + n^2) \Rightarrow R = n(1 + \sqrt{2})$$

۳۱ - گزینه ۴ از آنجا که $AB = 3$ و $CD = 2\sqrt{6}$ است و $AB < CD$. پس مطابق شکل فاصله CD از مرکز بیشتر از AB است. داریم:

$$OH = 3, \quad Ok = 2\sqrt{6}, \quad 3AB = 2CD \Rightarrow AB = \frac{2}{3}CD \quad (1)$$



در مثلث‌های OCH و OBK داریم:

$$\triangle OCH: R^2 = OH^2 + CH^2 = 9 + \frac{CD^2}{4}$$

$$\triangle OBK: R^2 = OK^2 + BK^2 = 24 + \frac{AB^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{CD^2}{4} + 9 = \frac{AB^2}{4} + 24, \quad (1) \Rightarrow \frac{CD^2}{4} + 9 = \frac{1}{4} \times \frac{4}{9} CD^2 + 24$$

$$\frac{CD^2}{4} - \frac{1}{9} CD^2 = 15 \Rightarrow \frac{5CD^2}{36} = 15 \Rightarrow CD^2 = 3 \times 36 \Rightarrow CD = 6\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow R^2 = 9 + \frac{1}{4} \times (6\sqrt{3})^2 = 9 + \frac{1}{4} \times 36 \times 3 = 36 \Rightarrow R = 6$$

۳۲ - گزینه ۲ می‌دانیم که کمان‌های بین دو وتر موازی مساویند. داریم:

$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{BDC}}{2}, \quad \widehat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{\widehat{BD}}{2} \Rightarrow \widehat{A} - \widehat{B} = \frac{\widehat{BDC} - \widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{CD}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

۳۳ - گزینه ۲

$\widehat{A} = x, BE = AB \Rightarrow \widehat{E} = \widehat{A} = x \Rightarrow \widehat{CBE} = \widehat{A} + \widehat{E} = 2x$

$$\begin{cases} \widehat{E} = \frac{\widehat{BD}}{2} \Rightarrow \widehat{BD} = 2\widehat{E} = 2x \\ \widehat{CBE} = \frac{\widehat{CE}}{2} \Rightarrow \widehat{CE} = 2\widehat{CBE} = 4x \end{cases} \Rightarrow \frac{\widehat{CE}}{\widehat{BD}} = \frac{4x}{2x} = 2$$



۳۴ - گزینه ۴

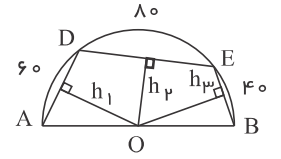
$$OF = OA \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{OFA} = \alpha, \quad OE = OF \Rightarrow \widehat{FOE} = \widehat{OFE} = \alpha$$

$$\widehat{E}_1 = \widehat{EFO} + \widehat{EOF} = 2\alpha \Rightarrow \widehat{AOE} : \alpha + 2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ, \quad E_1 = 60^\circ$$

۳۵ - گزینه ۴

$$\widehat{AD} + \widehat{DE} + \widehat{EB} = 180^\circ \Rightarrow 60 + 80 + \widehat{BE} = 180^\circ$$

$$\widehat{BE} = 40^\circ$$



$$\widehat{DE} > \widehat{AD} > \widehat{BE} \Rightarrow DE > AD > BE$$

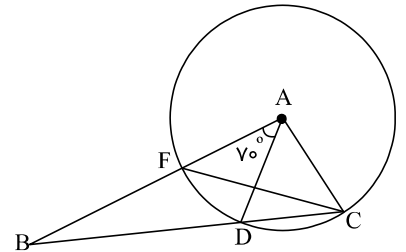
می‌دانیم اگر کمانی بزرگ‌تر باشد، وتر آن هم بزرگ‌تر است؛ همچنین وتر بزرگ‌تر از مرکز دایره دورتر است پس:

$$h_3 > h_1 > h_2$$

۳۶ - گزینه ۳ از آنجا که $AF = AD = AC$ می‌باشد، پس دایره‌ای به مرکز A و شعاع AF از F و D و C می‌گذرد. در این صورت داریم:

$$\widehat{FAD} = 70^\circ \Rightarrow \widehat{DF} = 70^\circ$$

$$\widehat{FCD} = \frac{\widehat{DF}}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$$

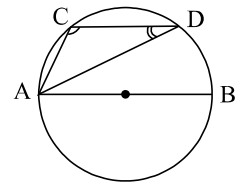


۳۷ - گزینه ۲

$$\widehat{ACD} = \frac{\widehat{ABD}}{2} = \frac{180^\circ + \widehat{BD}}{2} = 90^\circ + \frac{\widehat{BD}}{2}$$

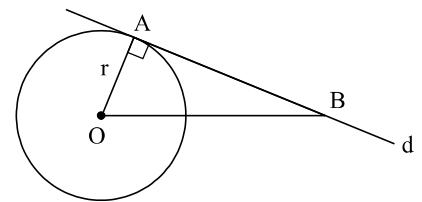
$$\widehat{ADC} = \frac{\widehat{AC}}{2}, \quad \widehat{BD} = \widehat{AC} \Rightarrow \widehat{ADC} = \frac{\widehat{BD}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{ACD} - \widehat{ADC} = 90^\circ + \frac{\widehat{BD}}{2} - \frac{\widehat{BD}}{2} = 90^\circ$$



۳۸ - گزینه ۲ چون خط d در نقطه A بر شعاع OA عمود است، پس در A بر دایره مماس می‌باشد. داریم:

$$\triangle OAB : OB > OA$$



۳۹ - گزینه ۴ از O به A و B' وصل می‌کنیم. داریم:

$$\begin{cases} OA = OB' = r \text{ (شعاع دایره)} \\ AB = BB' \\ OB \text{ مشترک} \end{cases} \Rightarrow \triangle OAB \cong \triangle OB'B \Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OB'B} \quad (1)$$

از O به A و C' وصل می‌کنیم. داریم:

$$\begin{cases} OA = OC' = r \text{ (شعاع دایره)} \\ AC = CC' \\ OC \text{ مشترک} \end{cases} \Rightarrow \triangle OAC \cong \triangle OCC' \Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{OC'C} \quad (2)$$

$$\triangle B'OC' : OC' = OB' \Rightarrow \widehat{OB'B} = \widehat{OC'C}, \quad (1), (2)$$

$$\Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{OAB} \Rightarrow \widehat{BAC}$$

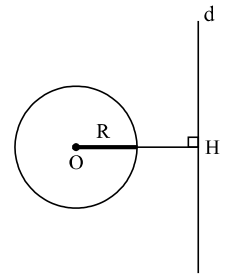
از آنجا که مثلث $B'AC'$ متساوی‌الساقین نیست (الزاماً)، پس OA همواره عمود منصف $B'C'$ نمی‌باشد. (الزاماً)

۴۰ - گزینه ۱ طبق فرض مسئله خط و دایره متخارجند؛ بنابراین داریم:



$$\begin{cases} OH > R \\ R = \sqrt{x-5} \end{cases} \Rightarrow x^2 + 1 > \sqrt{x-5}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^2 - \sqrt{x} + 6 > 0 &\Rightarrow (x-1)(x-6) > 0 \\ \Rightarrow x &= (-\infty, 1) \cup (6, +\infty) \end{aligned}$$



در نتیجه بی شمار مقدار طبیعی بزرگتر از ۶ وجود دارد.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۷ - ۴	۱۳ - ۲	۱۹ - ۴	۲۵ - ۲	۳۱ - ۴	۳۷ - ۲
۲ - ۲	۸ - ۱	۱۴ - ۳	۲۰ - ۴	۲۶ - ۱	۳۲ - ۲	۳۸ - ۲
۳ - ۳	۹ - ۱	۱۵ - ۱	۲۱ - ۳	۲۷ - ۲	۳۳ - ۲	۳۹ - ۴
۴ - ۴	۱۰ - ۳	۱۶ - ۳	۲۲ - ۴	۲۸ - ۴	۳۴ - ۴	۴۰ - ۱
۵ - ۱	۱۱ - ۲	۱۷ - ۱	۲۳ - ۱	۲۹ - ۴	۳۵ - ۴	
۶ - ۲	۱۲ - ۴	۱۸ - ۳	۲۴ - ۳	۳۰ - ۱	۳۶ - ۳	