



فاخران

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: بخش هندسه ریاضی ۲

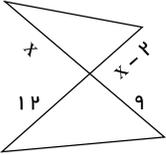
دبیر: آقای حدادی

۱- در دوزنقه‌ای به طول قاعده‌های ۶ و ۹ و ارتفاع ۲ واحد، امتداد دو ساق در نقطه‌ی M متقاطع‌اند. فاصله‌ی M از قاعده‌ی بزرگ‌تر، چه قدر است؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

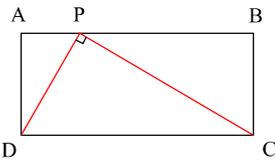
۲- در شکل مقابل دو مثلث متشابه‌اند، نسبت مساحت آن دو مثلث کدام است؟

- ۴/۹ (۱) ۹/۱۶ (۲) ۲/۳ (۳) ۳/۴ (۴)



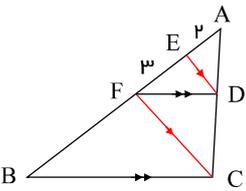
۳- در مستطیل شکل مقابل $\hat{P} = 90^\circ$ ، $AP = BP = 9$ ، طول DP کدام است؟

- ۵ (۱) $3\sqrt{3}$ (۲) $4\sqrt{3}$ (۳) ۶ (۴)



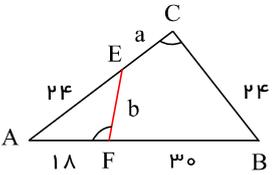
۴- در شکل مقابل $ED \parallel FC$ و $FD \parallel BC$ است. طول FB کدام است؟

- ۴٫۵ (۱) ۴ (۲) ۷٫۵ (۳) ۶ (۴)



۵- در مثلث ABC شکل مقابل ($\angle F = \angle C$) با توجه به اندازه‌های نوشته شده روی پاره‌خط‌ها $\frac{a}{b}$ برابر کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴)



۶- نقاط M و N و P وسط‌های اضلاع مثلث ABC هستند. اگر محیط مثلث MNP برابر ۶ باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟

- ۱۲ (۱) ۹ (۲) ۷٫۵ (۳) ۱۸ (۴)

۷- دو مثلث متشابه‌اند. اگر طول یک میانه مثلث بزرگ‌تر، a و طول میانه نظیر آن در مثلث کوچک‌تر، b باشد، نسبت میانه‌های مثلث کوچک‌تر به میانه‌های مثلث بزرگ‌تر چیست؟

- $\frac{a}{b}$ (۱) $\frac{b}{a}$ (۲) $\frac{b}{a+b}$ (۳) $\frac{a}{a+b}$ (۴)

۸- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($A = 90^\circ$) زاویه‌ی $\angle B$ برابر 30° است. چنانچه H پای ارتفاع AH باشد، نسبت مساحت دو مثلث AHC و ABH کدام است؟

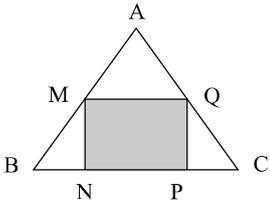
- $\frac{3}{2}$ (۱) ۲ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) ۳ (۴)

۹- در مثلث ABC ، رأس B را به نقطه‌ی O وسط میانه‌ی AM وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا ضلع AC را در N قطع کند. ON چه کسری از BN است؟

- $\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴)



۱۰- در شکل مقابل مستطیل $MNPQ$ در مثلث ABC محاط شده است. اگر $AM = \frac{1}{2}MB$ نسبت مساحت مستطیل به مساحت مثلث ABC برابر کدام است؟

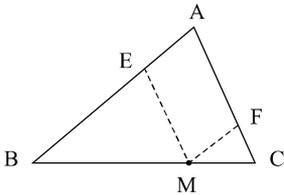


(۱) $\frac{2}{3}$

(۲) $\frac{4}{9}$

(۳) $\frac{1}{3}$

۱۱- در شکل مقابل $AEMF$ متوازی الاضلاع است. $\frac{AE \times AF}{BE \times CF}$ برابر کدام است؟



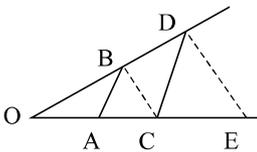
(۱) $\frac{AB}{AC}$

(۲) ۱

(۳) $\frac{MC}{BM}$

(۴) $\frac{CF}{AC}$

۱۲- اگر نسبت تشابه دو لوزی متشابه $ABCD$ و $A'B'C'D'$ برابر $\frac{2}{3}$ باشد و اقطار لوزی $ABCD$ ، مقدار ۶ و ۸ سانتی متر باشند، مساحت لوزی $A'B'C'D'$ چند سانتی متر مربع است؟



(۱) ۹۰

(۲) ۵۴

(۳) ۹۶

(۴) ۱۰۲

۱۳- در شکل زیر $AB \parallel CD$ و $BC \parallel DE$ و $OA = 4$ و $AC = 6$ است. اندازه ی CE کدام است؟

(۱) ۱۲

(۲) ۱۵

(۳) ۱۶

۱۴- اگر $3a = 7b$ باشد، آن گاه کدام رابطه درست است؟ ($a, b \neq 0$)

(۱) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{3}{7}$

(۲) $\frac{a+b}{b} = \frac{3}{10}$

(۳) $\frac{a}{b-a} = \frac{-4}{7}$

(۴) $\frac{3a-b}{b} = 6$

۱۵- اگر $a_1 = \frac{a_2}{2} = \frac{a_3}{3} = \dots = \frac{a_n}{n}$ ، آنگاه حاصل $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ چند برابر a_1 است؟

(۱) n

(۲) $n(n+1)$

(۳) $\frac{n(n+1)}{2}$

(۴) $2n(n+1)$

۱۶- میانگین هندسی دو عدد a و b ($a > b$)، سه برابر عدد کوچکتر است. حاصل $\frac{a^2}{b^2}$ کدام است؟

(۱) ۹

(۲) ۸۱

(۳) $\frac{1}{9}$

(۴) $\frac{1}{81}$

۱۷- مثلث ABC که اندازه ی اضلاع آن ۸، ۱۲ و ۱۶ می باشد، با کدام یک از مثلث های زیر متشابه است؟

(۱) ۹، ۱۲، ۶

(۲) ۶، ۱۶، ۹

(۳) ۹، ۸، ۱۲

(۴) ۱۰، ۶، ۱۲

۱۸- در مثلث ABC به چه فاصله ای از رأس A خط موازی با BC رسم کنیم تا مساحت مثلث نصف شود؟ (h ارتفاع وارد بر BC است.)

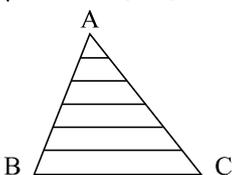
(۱) $\frac{1}{3}h$

(۲) $\frac{2}{3}h$

(۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}h$

(۴) $\frac{1}{2}h$

۱۹- در شکل زیر $BC = 18$ و اضلاع AB و AC توسط ۵ خط موازی با قاعده به ۶ قسمت برابر تقسیم شده اند. مجموع طول این ۵ پاره خط کدام است؟



(۱) ۲۷

(۲) ۳۶

(۳) ۴۵

(۴) ۶۳

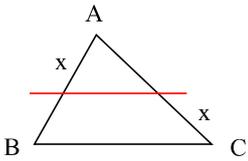
۲۰- اوساط اضلاع یک چهار ضلعی محدب را به هم وصل کرده ایم. چهار ضلعی حاصل الزاماً کدام گزینه است؟

(۱) لوزی

(۲) مستطیل

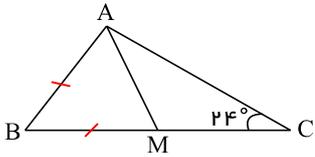
(۳) دوزنقه

(۴) متوازی الاضلاع



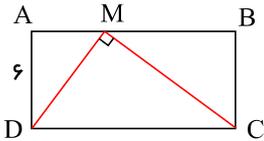
۲۱- در شکل مقابل، پاره خطی موازی BC رسم شده است و $AB = \frac{2}{5}AC$ است. اندازه x چند برابر AB است؟

- ۱) $\frac{2}{5}$
 ۲) $\frac{3}{5}$
 ۳) $\frac{4}{7}$
 ۴) $\frac{5}{7}$



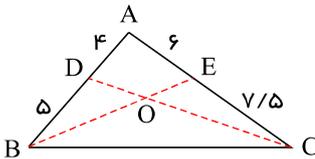
۲۲- در شکل روبه‌رو، $AB = BM$ و مثلث‌های ABC و AMC با هم متشابه‌اند، زاویه AMB چند درجه است؟

- ۱) ۶۵
 ۲) ۶۸
 ۳) ۷۰
 ۴) ۷۲



۲۳- در شکل روبه‌رو، چهارضلعی $ABCD$ مستطیل و مثلث DMC قائم‌الزاویه و $AD = 6$ می‌باشد. حاصل $AM \times MB$ کدام است؟

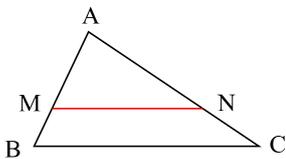
- ۱) ۳۶
 ۲) ۲۴
 ۳) ۲۰
 ۴) ۱۲



۲۴- در شکل مقابل، نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث OCE کدام است؟

- ۱) $\frac{2}{3}$
 ۲) $\frac{4}{5}$
 ۳) $\frac{5}{6}$
 ۴) ۱

۲۵- در شکل زیر، $MN \parallel BC$ و مساحت مثلث AMN با مساحت دوزنقه‌ی $MNCB$ برابر است. نسبت $\frac{AM}{MB}$ برابر است با:

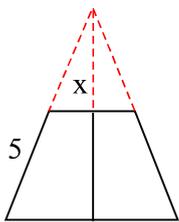


- ۱) $\sqrt{2} + 1$
 ۲) $\frac{\sqrt{2} + 1}{2}$
 ۳) $\sqrt{2}$
 ۴) ۲

۲۶- مثلثی به اضلاع ۶ و ۹ واحد در دایره‌ای به شعاع ۶ واحد محاط شده است. طول ارتفاع ضلع سوم آن کدام است؟

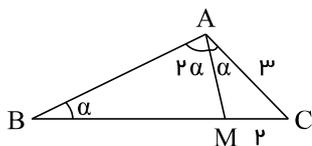
- ۱) ۴
 ۲) ۴٫۵
 ۳) ۵
 ۴) ۶

۲۷- در یک دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، طول قاعده‌ها ۱۵ و ۹ واحد و اندازه‌ی ساق‌ها ۵ واحد است. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو ساق این دوزنقه از قاعده‌ی کوچک‌تر چند واحد است؟



- ۱) ۵
 ۲) ۶
 ۳) ۷
 ۴) ۸

۲۸- در مثلث ABC ، $\hat{A} = 3\hat{B}$ است. نقطه‌ی M به فاصله‌ی ۲ از رأس C روی ضلع BC طوری قرار گرفته است که $\hat{BAM} = 2\hat{CAM}$. اگر $AC = 3$ ، آن‌گاه طول BM کدام است؟

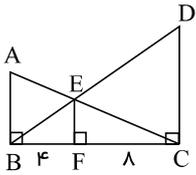


- ۱) ۲٫۵
 ۲) ۳
 ۳) ۴٫۵
 ۴) ۴

۲۹- دو قطر کوچک یک شش‌ضلعی منتظم که متقاطع‌اند، با چه نسبتی هم‌دیگر را قطع می‌کنند؟

- ۱) $\frac{1}{2}$
 ۲) $\frac{1}{3}$
 ۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

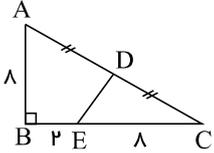
۳۰- در شکل زیر نسبت AB به CD کدام است؟



- (۲) $\frac{1}{4}$
(۴) $\frac{1}{2}$

- (۱) $\frac{3}{4}$
(۳) $\frac{2}{3}$

۳۱- در شکل مقابل طول DE کدام است؟



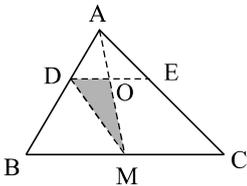
- (۲) $2\sqrt{2}$
(۴) ۵

- (۱) ۳
(۳) $3\sqrt{2}$

۳۲- نقطه‌ی E واقع بر ضلع DC از مستطیل $ABCD$ در فاصله‌ی ۱۲ واحد از B واقع است. اگر $DE = 2EC$ ، نقطه تلاقی AC و BE در چه فاصله‌ای از B واقع است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۳۳- در شکل زیر نقطه‌ی M وسط BC و $\frac{DA}{DB} = \frac{2}{3}$ و $DE \parallel BC$ است. مساحت مثلث ODM چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



- (۲) ۱۵
(۴) ۱۸

- (۱) ۱۲
(۳) ۱۶

۳۴- کدام نقطه درون مثلث از سه رأس مثلث به یک فاصله است؟

- (۱) محل تقاطع نیمسازها (۲) محل برخورد میانه‌ها (۳) محل تقاطع عمود منصف‌ها (۴) محل تقاطع ارتفاع‌ها

۳۵- چند مثلث با اطلاعات $a = 5$ و $c = 7$ و $h_b = 2$ می‌توان رسم نمود؟

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) بی‌شمار

۳۶- دو نقطه‌ی A و B از یکدیگر ۶ واحد فاصله دارند، چند نقطه در صفحه وجود دارد که از A ، ۳ واحد و از B ، ۴ واحد باشد.

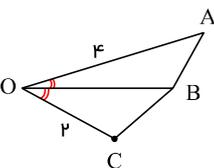
- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه

۳۷- دو خط l و l' غیرموازی می‌باشند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از خط l به اندازه ۴ واحد و از خط l' به اندازه ۳ واحد می‌باشد.

- (۱) صفر (۲) دو (۳) چهار (۴) شش

۳۸- برای مشخص کردن مرکز دایره از کدام یک از ویژگی‌های زیر می‌توان استفاده کرد؟

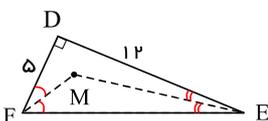
- (۱) هر نقطه روی عمود منصف از دو سر پاره خط به یک فاصله است.
(۲) هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.
(۳) مربع وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر.
(۴) میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است.



۳۹- با توجه به شکل زیر مساحت مثلث OAB برابر ۶ واحد است. مساحت مثلث OBC کدام است؟

- (۲) ۳
(۴) ۶

- (۱) ۲
(۳) ۴



- (۲) ۱۵
(۴) ۱۹

- (۱) ۱۳
(۳) ۱۷

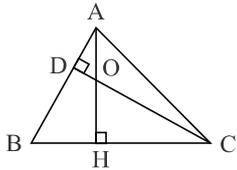


۴۱- در مربع $ABCD$ ضلع CD را از طرف C به اندازه ضلع مربع تا نقطه E امتداد می‌دهیم، به طوری که AE ضلع BC را در F قطع کند. مساحت چهار ضلعی $AFCD$ چند برابر مساحت مربع است؟

- ① $\frac{4}{5}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{7}$

۴۲- نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه برابر $\frac{2}{5}$ و محیط مثلث بزرگ‌تر ۱۵ واحد بیشتر از محیط مثلث کوچک‌تر است. مجموع محیط‌های دو مثلث چند واحد است؟

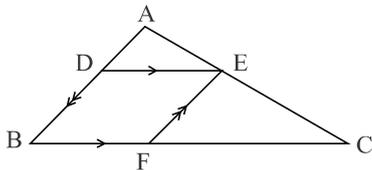
- ① ۲۰ ② ۲۵ ③ ۲۷ ④ ۳۵



۴۳- در شکل مقابل $OA = OH = \sqrt{33}$ و $CD = 14$ می‌باشد. اندازه ضلع AC کدام است؟

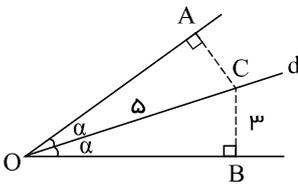
- ① $2\sqrt{55}$ ② $2\sqrt{57}$ ③ $3\sqrt{51}$ ④ $2\sqrt{53}$

۴۴- در مثلث ABC در شکل زیر، $DE \parallel BC$ و $EF \parallel AB$ می‌باشد. اگر داشته باشیم $BC = 2AB = \frac{4}{3}AC = 4DE = 12$ ، نسبت مساحت متوازی‌الاضلاع $BDEF$ به مساحت مثلث ABC کدام است؟



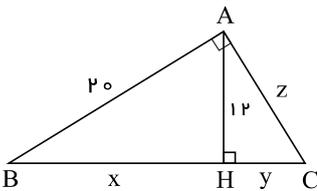
- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{8}$

۴۵- مطابق شکل زیر، اگر محل برخورد دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA با خط d را D بنامیم، طول پاره خط CD کدام است؟



- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۴۶- در شکل زیر، $\hat{A} = 90^\circ$ و ارتفاع $AH = 12$ است. در این صورت $x + y + z$ کدام است؟



- ① ۴۰ ② ۳۰ ③ ۴۵ ④ ۵۰

۴۷- دو دایره به مراکز O و O' با شعاع‌های متفاوت در نقاط A و B متقاطع‌اند. در این صورت چه تعداد از موارد زیر همواره صحیح است؟
الف) OO' از وسط AB می‌گذرد.

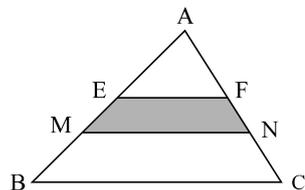
ب) نقطه O از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است.

پ) دو مثلث OAO' و OBO' هم‌نهشتند.

ت) AB عمود منصف OO' است.

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۴۸- در شکل زیر، اگر $\frac{AE}{BE} = \frac{BM}{AM} = \frac{CN}{AN} = \frac{AF}{CF} = \frac{1}{3}$ باشد، مساحت چهارضلعی هاشور خورده چند برابر مساحت مثلث ABC است؟



- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{3}$



۴۹- اندازه دو قاعده یک دوزنقه ۸ و ۱۲ واحد و ارتفاع دوزنقه ۱۵ واحد است. فاصله محل تلاقی قطرهای آن از قاعده بزرگ دوزنقه کدام است؟

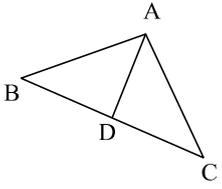
۱۰ (۴)

۶ (۳)

۱۲ (۲)

۹ (۱)

۵۰- در شکل زیر AD نیم‌ساز زاویه A است. نسبت $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}}$ کدام است؟



$\frac{AC}{BC}$ (۴)

$\frac{AC}{AC+AB}$ (۳)

$\frac{DB}{BC}$ (۲)

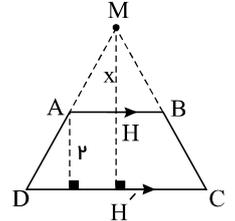
$\frac{DC}{BD}$ (۱)



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ در مثلث MCD با توجه به این مطلب که AB و CD موازی هستند، طبق قضیه ی تالس داریم:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{MH}{MH'} \rightarrow \frac{6}{9} = \frac{x}{x+2} \rightarrow 9x = 6x + 12 \rightarrow 3x = 12 \rightarrow x = 4$$



بنابراین فاصله ی M از قاعده ی بزرگ تر برابر 6 و $MH' = 4 + 2 = 6$ است.

۲ - گزینه ۱

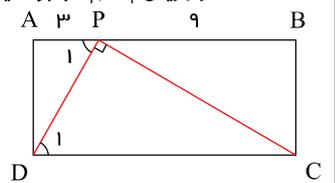
در دو مثلث متشابه اضلاع متناسب اند و نسبت مساحت ها برابر با توان دوم نسبت متشابه.

$$\frac{9}{x-2} = \frac{12}{x} \Rightarrow 9x = 12x - 24 \Rightarrow x = 8$$

$$\frac{6}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{نسبت مساحت ها} = \frac{4}{9}$$

۳ - گزینه ۴ دو زاویه ی \hat{P}_1, \hat{D}_1 بنابر قضیه ی خطوط موازی و مورب مساوی اند. پس دو مثلث قائم الزاویه ADP ، PDC متشابه اند.

$$\triangle APD \sim \triangle DPC \Rightarrow \frac{DP}{DC} = \frac{AP}{DP} \Rightarrow DP^2 = AP \cdot DC = 12 \times 3 = 36 \Rightarrow PD = 6$$



روش دوم: بنابر استدلال روش قبل در مثلث قائم الزاویه DPC می توان گفت مربع یک ضلع برابر است با حاصل ضرب وتر در تصویر همان ضلع بر وتر.

اندازه ی AP با اندازه ی تصویر PD بر وتر برابر است، بنابراین:

$$PD^2 = AP \times DC = 12 \times 3 = 36 \rightarrow PD = 6$$

۴ - گزینه ۳

کافیست دو بار از قضیه ی تالس استفاده کنیم.

$$\begin{aligned} ED \parallel FC &\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{AD}{DC} \\ FD \parallel BC &\Rightarrow \frac{5}{FB} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{5}{FB} \Rightarrow FB = 7,5 \end{aligned}$$

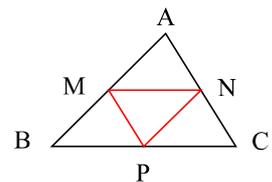
۵ - گزینه ۱

$$\begin{cases} \angle A = \angle A \\ \angle F = \angle C \end{cases} \Rightarrow \triangle AFE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{18}{a+24} = \frac{b}{24} = \frac{24}{48}$$

$$\frac{a}{b} = 1 \text{ یعنی } a = 12 \text{ و } b = 12$$

۶ - گزینه ۱ تذکر: اگر اوساط اضلاع ABC را به هم وصل کنیم ۴ مثلث همنهشت پدید می آید که محیط هر یک از آن ها $\frac{1}{2}$ محیط مثلث ABC است و مساحت هر کدام از آن ها $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث اولیه است.

$$(\text{محیط } MNP) = \frac{1}{2} (\text{محیط } ABC) \Rightarrow \text{محیط } ABC = 2 \times 6 = 12$$

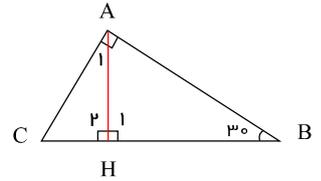


۷ - گزینه ۲ وقتی دو مثلث متشابه اند نسبت تشابه (نسبت اضلاع نظیر) همان نسبت میانه های نظیر دو مثلث است، پس نسبت میانه های کوچک تر به میانه های نظیرش در مثلث بزرگ تر $\frac{b}{a}$ است.



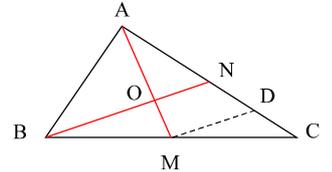
۸ - گزینه ۴

$$\left. \begin{array}{l} \angle A_1 = \angle B = 30^\circ \\ H_1 = H_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta AHC \sim \Delta ABH \Rightarrow \frac{S_{AHC}}{S_{ABH}} = \left(\frac{AH}{HB}\right)^2 = (\tan 30^\circ)^2 = \frac{1}{3}$$



۹ - گزینه ۳ از M پای میانه موازی ON رسم کرده تا AC را در نقطه D قطع کند. از قضیه ی تالس نتیجه می گیریم:

$$MD \parallel BN \Rightarrow \frac{MC}{MB} = \frac{CD}{ND} \xrightarrow{MC=MB} CD = ND$$



$$MD \parallel ON \Rightarrow ON = \frac{1}{2}MD \text{ در مثلت } AMD \text{ چون } O \text{ وسط ضلع } AM \text{ است:}$$

بنابراین:

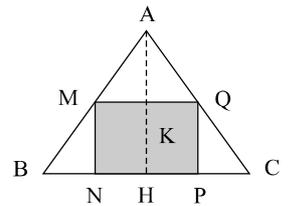
$$ON = \frac{1}{2}MD = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}BN\right) = \frac{1}{4}BN$$

۱۰ - گزینه ۲

از فرض $AM = \frac{1}{2}MB$ نتیجه می گیریم $AM = \frac{1}{3}AB$.

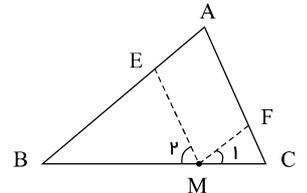
$$MQ \parallel BC \Rightarrow \Delta AMQ \sim \Delta ABC \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{AM}{AB} = \frac{AK}{AH} = \frac{MQ}{BC} \Rightarrow \begin{cases} MQ = \frac{1}{3}BC \\ HK = \frac{2}{3}AH \end{cases}$$

$$\frac{\text{مساحت مستطیل}}{\text{مساحت مثلث } ABC} = \frac{MQ \times HK}{BC \times AH} = \frac{\frac{1}{3}BC \times \frac{2}{3}AH}{BC \times AH} = \frac{2}{9}$$



۱۱ - گزینه ۲

$$\left. \begin{array}{l} MF \parallel AB \Rightarrow \angle M_1 = \angle B \\ ME \parallel AC \Rightarrow \angle M_2 = \angle C \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta BEM \sim \Delta MFC$$



پس $\frac{BE}{MF} = \frac{ME}{CF}$ یا $BE \times CF = ME \times MF$ چون $ME = AF$ و $MF = AE$ پس:

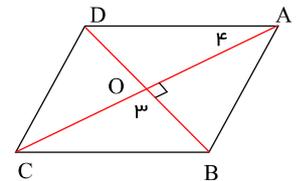
$$BE \times FC = AE \times AF$$

بنابراین نسبت خواسته شده یک است.

۱۲ - گزینه ۳ چون دو قطر لوزی ۸ و ۶ است، پس:

$$S_{ABCD} = \frac{8 \times 6}{2} = 24$$

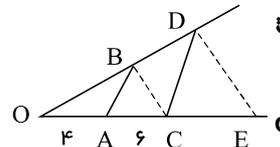
$$\frac{S_{ABCD}}{S_{A'B'C'D'}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{24}{S'} = \frac{4}{9} \Rightarrow S' = 54$$



۱۳ - گزینه ۲

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \\ BC \parallel DE \Rightarrow \frac{OB}{OD} = \frac{OC}{OE} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OC}{OE} \Rightarrow \frac{4}{10} = \frac{10}{OE} \Rightarrow OE = 25$$

$$CE = 25 - OC = 25 - 10 = 15$$



۱۴ - گزینه ۴ به بررسی یک یک گزینه ها می پردازیم:



۱) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{3}{7}$ طرفین وسطین $7a + 7b = 3a - 3b \Rightarrow 4b = -4a$ نادرست

۲) $\frac{a+b}{b} = \frac{3}{10}$ طرفین وسطین $10a + 10b = 3b \Rightarrow 10a = -7b$ نادرست

۳) $\frac{a}{b-a} = \frac{-4}{7}$ طرفین وسطین $7a = 4a - 4b \Rightarrow 3a = -4b$ نادرست

۴) $\frac{3a-b}{b} = 6$ طرفین وسطین $3a - b = 6b \Rightarrow 3a = 7b$ درست

۱۵ - گزینه ۳ از ترکیب در صورت و مخرج استفاده می کنیم:

$$\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{2} = \frac{a_3}{3} = \dots = \frac{a_n}{n} \Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{1 + 2 + \dots + n} = \frac{a_1}{1}$$

حال با توجه به رابطه $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ داریم:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n(n+1)}{2} a_1$$

۱۶ - گزینه ۲ می دانیم میانگین هندسی دو عدد a و b برابر است با: \sqrt{ab} بنابراین داریم:

$$\sqrt{ab} = 3b \Rightarrow ab = 9b^2 \Rightarrow a = 9b \Rightarrow \frac{a}{b} = 9 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 81$$

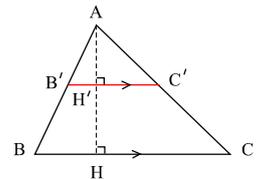
۱۷ - گزینه ۱ در این نوع سوالات باید به ناچار تمامی گزینه‌ها را با اعداد داده شده متناظر کنیم و با یافتن نسبت‌های برابر به گزینه‌ی درست پی ببریم. حال اگر این عمل را انجام دهیم، به این نتیجه می‌رسیم که گزینه‌ی (۱) درست است. زیرا:

$$\frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \frac{16}{12}$$

۱۸ - گزینه ۳ فرض کنید با رسم $B'C'$ مساحت مثلث ABC نصف شده باشد.

دو خط BC و $B'C'$ موازی یکدیگر هستند، بنابراین دو مثلث ABC و $AB'C'$ متشابه خواهند بود و خواهیم داشت:

$$\frac{S_{\triangle AB'C'}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AH'}{AH}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \left(\frac{AH'}{AH}\right)^2 \Rightarrow \frac{A'H'}{h} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AH' = \frac{\sqrt{2}}{2} h$$



۱۹ - گزینه ۳ طول پاره خط‌ها را (از کوچک به بزرگ) x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 در نظر می‌گیریم. با توجه به ترازوی این ۵ پاره خط با قاعده‌ی BC ، طبق قضیه‌ی تالس داریم:

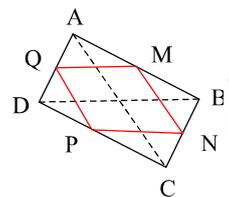
$$\frac{x_1}{BC} = \frac{1}{6}, \frac{x_2}{BC} = \frac{2}{6}, \dots, \frac{x_5}{BC} = \frac{5}{6}$$

حال با جای گذاری $BC = 18$ خواهیم داشت:

$$x_1 = 3, x_2 = 6, \dots, x_5 = 15 \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 3(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 45$$

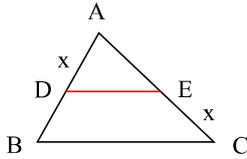
۲۰ - گزینه ۴ قطرهای AC و BD را رسم می‌کنیم. با توجه به اینکه M, P, N, Q اوساط اضلاع چهار ضلعی هستند، طبق قضیه‌ی میان خط می‌توان گفت:

$$MQ \parallel BD \parallel PN, MN \parallel AC \parallel PQ$$



بنابراین چون اضلاع مقابل این چهارضلعی موازی اند، این چهار ضلعی متوازی الاضلاع است.

بخش هفدهم ریاضی ۲



پاره خط DE موازی ضلع BC است و $AC = \frac{5}{2}AB$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{x}{AB} = \frac{\frac{5}{2}AB - x}{\frac{5}{2}AB}$$

پس از خلاصه کردن خواهیم داشت $x = \frac{5}{7}AB$ در نتیجه $x = \frac{5}{2}AB - x$

۲۲ - گزینه ۲ فرض می‌کنیم $\hat{A}MB = \theta$ ، چون $AB = BM$ ، پس $\hat{B}AM = \theta$ و در نتیجه:

$$\hat{B} = 180^\circ - 2\theta$$

طبق فرض، دو مثلث ABC و AMC متشابه‌اند، پس زوایای آن‌ها با هم برابرند و داریم:

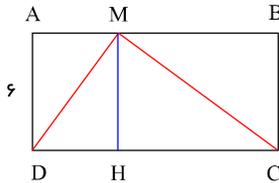
$$\hat{M}AC = \hat{B} = 180^\circ - 2\theta$$

از طرفی $\hat{A}MC = 180^\circ - \theta$ که با نوشتن جمع زوایای داخلی در $\hat{A}MC$ داریم:

$$\hat{M}AC + \hat{A}MC + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 180^\circ - 2\theta + 180^\circ - \theta + 24^\circ = 180^\circ \Rightarrow 3\theta = 204^\circ \Rightarrow \theta = 68^\circ$$

ارتفاع MH در مثلث قائم الزاویه DMC را رسم می‌کنیم. بنابر رابطه‌ی طولی در مثلث قائم الزاویه داریم:

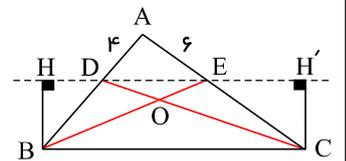
$$MH^2 = DH \times CH \Rightarrow 6^2 = AM \times MB \Rightarrow AM \times MB = 36$$



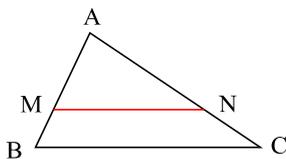
چون $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{4}{5}$ ، پس طبق عکس قضیه‌ی تالس، $DE \parallel BC$. از B و C به ترتیب عمودهای BH و CH' را بر امتدادهای DE وارد می‌کنیم، از آنجا که $DE \parallel BC$ ، پس:

$BH = CH'$ ، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \frac{S(\hat{B}DE)}{S(\hat{C}DE)} &= \frac{\frac{1}{2}BH \times DE}{\frac{1}{2}CH' \times DE} = 1 \Rightarrow S(\hat{B}DE) = S(\hat{C}DE) \\ &\Rightarrow S(\hat{B}DE) - S(\hat{ODE}) = S(\hat{C}DE) - S(\hat{ODE}) \\ &\Rightarrow S(\hat{OBD}) = S(\hat{OCE}) \Rightarrow \frac{S(\hat{OBD})}{S(\hat{OCE})} = 1 \end{aligned}$$

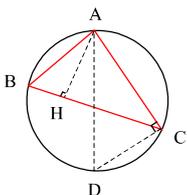


دو مثلث AMN و ABC متشابه‌اند و $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}$ ، در نتیجه:



$$\left(\frac{AM}{AB}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{AM}{AB - AM} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

در شکل مقابل $AB = 6$ ، $AC = 9$ و قطر $AD = 12$ واحد است. دو مثلث ADC ، ABH متشابه‌اند، زیرا دارای دو زاویه مساوی هستند.



$$\frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AD \cdot AH = AB \cdot AC$$

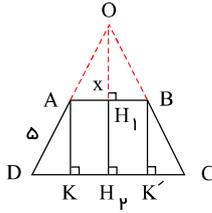
$$12AH = 6 \times 9 \Rightarrow AH = 4.5$$

۲۷ - گزینه ۲ اگر ارتفاع های AK و BK' را رسم کنیم آنگاه دو مثلث قائم الزویه ADK و $BK'C$ همبسته می شوند پس $DK = K'C$ داریم:

$$DK = \frac{CD - AB}{2} = \frac{15 - 9}{2} = 3$$

در مثلث قائم الزویه DAK داریم:

$$\text{فیناغورس: } AK = \sqrt{AD^2 - DK^2} = \sqrt{25 - 9} = 4 \Rightarrow H_1, H_2 = 4$$



از طرفی $AB \parallel DC$ است پس در مثلث تالس می نویسیم:

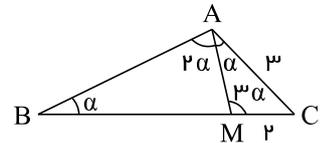
$$\Delta ODH_2 : \frac{OH_1}{OH_2} = \frac{AH_1}{DH_2} \Rightarrow \frac{x}{x+4} = \frac{4}{15} \Rightarrow 15x = 4x + 16 \Rightarrow x = 6$$

۲۸ - گزینه ۱ مطابق شکل، \hat{AMC} زاویه ی خارجی مثلث ABM است و در نتیجه:

$$\hat{AMC} = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$$

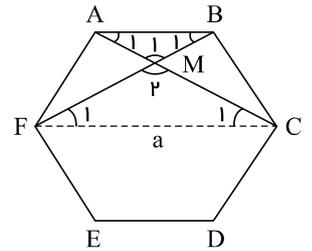
دو مثلث ABC و AMC به حالت تساوی دو زاویه متشابه اند و داریم:

$$\frac{MC}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{3}{BM+2} \Rightarrow BM = 2.5$$



۲۹ - گزینه ۱ مطابق شکل مقابل، فرض می کنیم دو قطر کوچک در نقطه ی M متقاطع اند، قطر بزرگ CF که طول آن دو برابر طول ضلع شش ضلعی منتظم است را رسم می کنیم. داریم:

$$CF \parallel AB \Rightarrow \begin{cases} \hat{C}_1 = \hat{A}_1 \\ \hat{F}_1 = \hat{B}_1 \\ \hat{M}_2 = \hat{M}_1 \end{cases} \Rightarrow \Delta MAB \sim \Delta MCF \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{AB}{CF} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$



۳۰ - گزینه ۴ AB ، EF و DC هر سه بر BC عمودند پس با هم موازیند. حال:

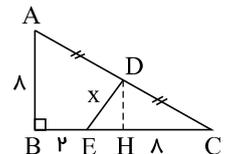
$$\Delta ABC : EF \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{FC}{BC} = \frac{EF}{AB} \Rightarrow \frac{EF}{AB} = \frac{8}{12} \quad (1)$$

$$\Delta BCD : EF \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BF}{BC} = \frac{EF}{DC} \Rightarrow \frac{EF}{DC} = \frac{4}{12} \quad (2)$$

$$\frac{EF}{AB} = \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{DC}{AB} = 2 \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{1}{2} \quad \text{از تقسیم طرفین رابطه ی (۱) و (۲) داریم:}$$

۳۱ - گزینه ۴ از D بر BC عمود می کنیم. داریم:

$$DH \parallel AB \xrightarrow{\text{قضیه ی تالس}} \frac{DC}{AC} = \frac{CH}{CB} = \frac{DH}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{CH}{10} = \frac{DH}{8} \Rightarrow CH = 5, DH = 4$$



$$BH = BC - CH$$

$$= 10 - 5 = 5 \Rightarrow EH = 3$$

$$\Delta DEH : x^2 = DH^2 + EH^2$$

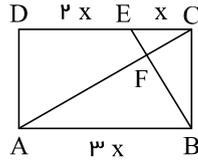
$$\Rightarrow x^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{25} = 5$$



۳۲ - گزینه ۴

با فرض $EC = x$ داریم: $DE = 2x$



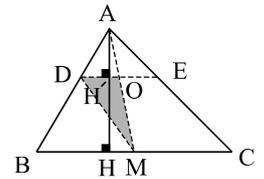
در نتیجه: $AB = DC = 3x$

مثلث‌های $\triangle AFB$ و $\triangle EFC$ به حالت تساوی زاویه‌های متناظرشان با هم متشابه‌اند.

$$\frac{EF}{FB} = \frac{EC}{AB} \Rightarrow \frac{EF}{FB} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در صورت}} \frac{EF + FB}{FB} = \frac{1 + 3}{3} \Rightarrow \frac{EB}{FB} = \frac{4}{3}$$

$$\xrightarrow{EB=12} \frac{12}{FB} = \frac{4}{3} \Rightarrow FB = 9$$

۳۳ - گزینه ۱



$$DO \parallel BM \rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DO}{BM} \rightarrow \frac{DO}{BM} = \frac{2}{5} \rightarrow DO = \frac{2}{5} BM$$

$$DO \parallel BM, AH \perp BM \rightarrow AH' \perp DO$$

$$\rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{HH'}{AH} \rightarrow \frac{HH'}{AH} = \frac{3}{5} \rightarrow HH' = \frac{3}{5} AH$$

$$\rightarrow S_{\triangle ODM} = \frac{1}{2} OD \times HH' = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} BM \times \frac{3}{5} AH = \frac{3}{25} AH \times BM$$

$$BM = \frac{1}{2} BC$$

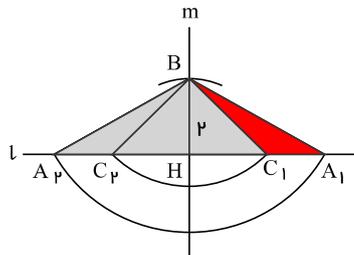
$$\rightarrow S_{\triangle ODM} = \frac{3}{50} AH \times BC$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC$$

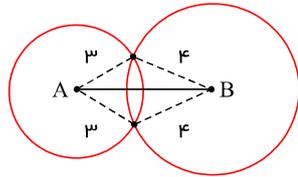
$$\rightarrow \frac{S_{\triangle ODM}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{3}{50} AH \times BC}{\frac{1}{2} AH \times BC} = \frac{6}{50} = \frac{12}{100} = 12\%$$

۳۴ - گزینه ۳ هر نقطه روی عمود منصف از دو سر پاره خط به یک اندازه می‌باشد پس محل برخورد عمود منصف‌ها از سه رأس به یک فاصله قرار دارد.

۳۵ - گزینه ۳ ابتدا یک خط دلخواه مانند l رسم می‌نماییم. از یک نقطه‌ی دلخواه مانند H خطی مانند m را بر l عمود می‌کنیم. از نقطه‌ی H کمانی به اندازه‌ی 2 رسم می‌کنیم تا رأس B مشخص شود. پس از نقطه‌ی B دو کمان به طول‌های 5 و 7 رسم می‌کنیم تا خط l را در نقاط A_1, A_2, C_1, C_2 قطع کند. مثلث‌های $\triangle A_1 C_1 A_2$ و $\triangle A_2 C_2 A_1$ مطلوب مسئله هستند و 2 جواب ناهمنهشت داریم.

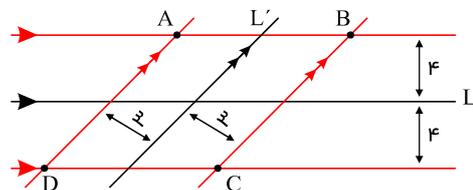


۳۶ - گزینه ۳ می‌توان با رسم دو دایره به مراکز A و B با شعاع‌های 3 و 4 جواب را تعیین نمود.



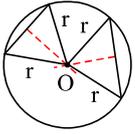
۳۷ - گزینه ۳

برای حل سؤال می‌توان از ویژگی خطوط موازی استفاده کرد. با توجه به تصویر، دو خط به موازات l به فاصله‌ی 4 واحد و دو خط به موازات l' به فاصله‌ی 3 واحد رسم می‌نماییم. محل تقاطع خط رسم شده با یکدیگر یعنی چهار نقطه‌ی D و C و B و A جواب مسئله می‌باشد.



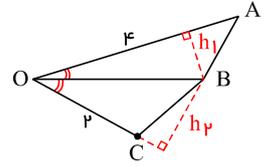
۳۸ - گزینه ۱

برای یافتن وتر کفیسست دو وتر از یک دایره را رسم کرده و عمود منصف آن‌ها را رسم نمائیم. محل برخورد عمود منصف‌ها مرکز دایره است، زیرا هر نقطه روی عمود منصف از دو سر پاره خط به یک فاصله است.



۳۹ - گزینه ۲

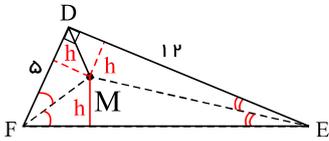
$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} h_1 \times OA = \frac{1}{2} h_1 \times 4 = 6 \rightarrow h_1 = 3$$



نقطه B روی نیمساز زاویه C قرار دارد پس فاصله آن از دو ضلع زاویه به یک اندازه می‌باشد پس $h_1 = h_2 = 3$ داریم:

$$S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} h_2 \times OC = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$$

۴۰ - گزینه ۱



ابتدا با استفاده از قضیه فیثاغورث طول وتر EF را محاسبه می‌نماییم.

$$EF^2 = ED^2 + FD^2 \rightarrow EF^2 = 12^2 + 5^2 = 169 \rightarrow EF = 13$$

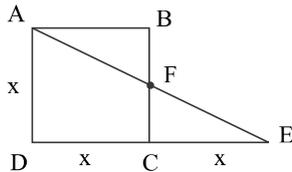
نقطه M روی نیمساز زوایای E و F قرار دارد پس از دو ضلع هر زاویه به یک اندازه است. با توجه به اینکه مثلث DFE از سه مثلث MDE و MDF و MFE تشکیل شد پس می‌توان نوشت:

$$S_{DFE} = S_{MDE} + S_{MDF} + S_{MFE} \rightarrow \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = \frac{1}{2} h \times 12 + \frac{1}{2} h \times 5 + \frac{1}{2} h \times 13$$

$$\rightarrow 15h = 30 \Rightarrow h = 2$$

$$S_{FME} = \frac{1}{2} h \times 13 = \frac{1}{2} \times 2 \times 13 = 13$$

۴۱ - گزینه ۳ ابتدا یک تصویر کلی از مسئله رسم می‌نماییم. با توجه به شکل در مثلث ADE داریم:



$$AD \parallel CF \rightarrow \frac{CF}{AD} = \frac{CE}{DE} \rightarrow \frac{CF}{x} = \frac{x}{2x} \rightarrow CF = \frac{x}{2}$$

حال می‌توان مساحت دوزنقه را به شکل زیر محاسبه نمود:

$$\text{مساحت دوزنقه} = \frac{(\frac{x}{2} + x)x}{2} = \frac{(\frac{3x}{2})x}{2} = \frac{(\frac{3x^2}{2})}{2} = \frac{3x^2}{4}$$

نسبت مساحت دوزنقه به مربع برابر است:

$$\frac{\frac{3x^2}{4}}{x^2} = \frac{3}{4}$$

۴۲ - گزینه ۴ محیط دو مثلث P و P' در نظر بگیریم لذا داریم:

$$\begin{cases} \frac{P}{P'} = \frac{2}{5} \\ P' = P + 15 \end{cases} \rightarrow \frac{P}{P + 15} = \frac{2}{5} \rightarrow 5P = 2P + 30 \rightarrow 3P = 30 \rightarrow P = 10$$

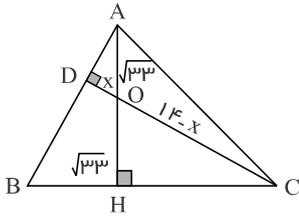
$$P' = P + 15 = 10 + 15 = 25 \rightarrow P + P' = 25 + 10 = 35$$

۴۳ - گزینه ۱

$$\begin{cases} \hat{C}OH = \hat{A}OD \rightarrow \triangle OAD \sim \triangle OCH \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{33}} = \frac{\sqrt{33}}{14-x} \Rightarrow 14x - x^2 = 33 \\ \hat{H} = \hat{D} \end{cases}$$



$$\Rightarrow x^2 - 14x + 33 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 11) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ ق ق} \\ x = 11 \text{ غ ق} \end{cases}$$



توجه کنید چون در مثلث OAD ، وتر است، پس $OD = x$ باید کمتر از $\sqrt{33}$ باشد.

$$\triangle OAD: AD^2 = OA^2 - OD^2 = 33 - 9 = 24$$

$$\triangle ADC: AC^2 = AD^2 + CD^2 = 24 + 196 = 220 \Rightarrow AC = 2\sqrt{55}$$

۴۴ - گزینه ۳ با توجه به موازی بودن DE و BC می توان نتیجه گرفت، دو مثلث $\triangle ADE$ و $\triangle ABC$ متشابه می باشند و می توان نسبت تشابه را به شکل زیر نوشت:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \rightarrow \frac{AD}{6} = \frac{AE}{9} = \frac{3}{12} \Rightarrow \begin{cases} AD = \frac{3}{2} \\ AE = \frac{9}{4} \end{cases}$$

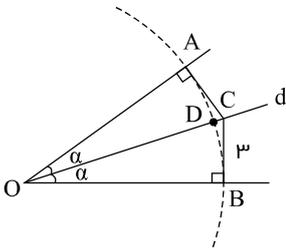
چهارضلعی $DEFB$ متوازی الاضلاع می باشد و $BF = DE$ موازی هستند، بنابراین داریم:

$$FC = BC - BF = 12 - 3 = 9$$

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 = \frac{1}{16}, \quad \frac{S_{FEC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{FC}{BC}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$S_{DEFB} = S_{ABC} - (S_{ADE} + S_{FEC}) = S_{ABC} - \left(\frac{1}{16}S_{ABC} + \frac{9}{16}S_{ABC}\right) = \frac{3}{8}S_{ABC}$$

۴۵ - گزینه ۱ از آنجا که خط d نیم ساز زاویه $\hat{A}OB$ است، بنابراین طول AC و CB برابر است. بنابراین طبق قضیه فیثاغورس $OA = OB = 4$ و شعاع دایره رسم شده نیز برابر ۴ است که در این صورت طول $OD = 4$ و $CD = 1$ است.



۴۶ - گزینه ۱ چون $\hat{A} = 90^\circ$ و AH ارتفاع است، طبق روابط طولی در مثلث قائم الزاویه خواهیم داشت:

$$AH^2 = BH \times CH \Rightarrow 144 = xy (*)$$

$$\triangle ABH \text{ در قضیه فیثاغورس در } : x^2 + 144 = 400 \Rightarrow x^2 = 256 \Rightarrow \boxed{x = 16}$$

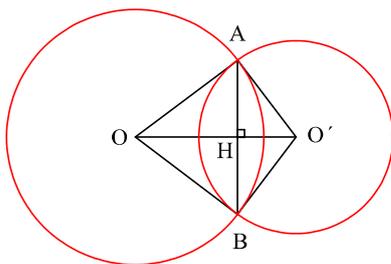
$$144 = xy \xrightarrow{x=16} \boxed{y = 9}$$

$$AC^2 = CH \times BC \Rightarrow z^2 = y(x + y) = xy + y^2$$

$$= 144 + 81 = 225 \Rightarrow \boxed{z = 15} \Rightarrow x + y + z = 16 + 9 + 15 = 40$$

۴۷ - گزینه ۳

OO' عمود منصف AB است پس الف، ب و پ صحیح می باشند و ت نادرست است.





$$\frac{AE}{BE} = \frac{AF}{CF} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{AE}{AE+BE} = \frac{AF}{AF+CF} = \frac{1}{1+3} \rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2 = \frac{1}{16} \quad (1)$$

$$\frac{BM}{AM} = \frac{CN}{AN} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{BM+AM}{AM} = \frac{CN+AN}{AN} = \frac{1+3}{3} \rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{3}{4}$$

$$\rightarrow \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^2 = \frac{9}{16} \quad (2)$$

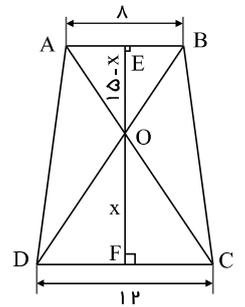
$$(1), (2) \rightarrow \frac{S_{\triangle EFMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} - \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$AB = 8, CD = 12, EF = 15 \rightarrow OF = ?$$

$$\triangle OAB \sim \triangle OCD \rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{OE}{OF} \rightarrow \frac{8}{12} = \frac{15-x}{x}$$

$$\rightarrow \frac{2}{3} = \frac{15-x}{x} \rightarrow 2x = 45 - 3x \rightarrow 5x = 45 \rightarrow x = 9$$

۴۹ - گزینه ۱



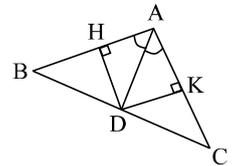
۵۰ - گزینه ۳

AD نیم‌ساز \hat{A} است بنابراین نقطه D از دو ضلع زاویه \hat{A} به یک فاصله است یعنی: $DH = DK$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AC \times DK, S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} AB \times DH$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \times DK + \frac{1}{2} AB \times DH \xrightarrow{DH=DK} \frac{DH(AC+AB)}{2}$$

$$\rightarrow \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} AC \times \cancel{DK}}{\cancel{\frac{1}{2}} DH (AC+AB)} = \frac{AC}{AC+AB}$$



پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۹ - ۳	۱۷ - ۱	۲۵ - ۱	۳۳ - ۱	۴۱ - ۳	۴۹ - ۱
۲ - ۱	۱۰ - ۲	۱۸ - ۳	۲۶ - ۲	۳۴ - ۳	۴۲ - ۴	۵۰ - ۳
۳ - ۴	۱۱ - ۲	۱۹ - ۳	۲۷ - ۲	۳۵ - ۳	۴۳ - ۱	
۴ - ۳	۱۲ - ۳	۲۰ - ۴	۲۸ - ۱	۳۶ - ۳	۴۴ - ۳	
۵ - ۱	۱۳ - ۲	۲۱ - ۴	۲۹ - ۱	۳۷ - ۳	۴۵ - ۱	
۶ - ۱	۱۴ - ۴	۲۲ - ۲	۳۰ - ۴	۳۸ - ۱	۴۶ - ۱	
۷ - ۲	۱۵ - ۳	۲۳ - ۱	۳۱ - ۴	۳۹ - ۲	۴۷ - ۳	
۸ - ۴	۱۶ - ۲	۲۴ - ۴	۳۲ - ۴	۴۰ - ۱	۴۸ - ۲	