نام و نام خانوادگی: زمان برگزاری: ۱۵۶۰ دقیقه

نام آزمون: هندسه۳   دبیرستان: فاخران

تاریخ آزمون: ۱۳۹۸/۰۷/۱۶

---

۱ - فرض کنید d, c, b, a چهار واحد طول باشد. ماتریس زیر یک جدول تبدیل واحد است

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۶ & ۲۴ \\ \frac{۱}{۳} & ۱ & ۲ & ۸ \\ \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۴ \\ \frac{۱}{۲۴} & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۴} & ۱ \end{bmatrix} \end{array}$$

بنابراین، یک واحد از a، شش واحد از c است، یک واحد از b هشت واحد از d است، و یک واحد از c نصف واحد از b است. این جدول را به عنوان یک ماتریس در نظر بگیرید و شرح دهید که چرا $a_{ik}a_{kj} = a_{ij}$. آیا می توانید بدون محاسبه ی مستقیم $A^۲$ را پیدا کنید؟

۲ - فرض کنید بتوان یک ماتریس ۳×۳ مانند A را به صورت حاصلضرب یک ماتریس ۳×۲ در یک ماتریس ۲×۳ نوشت. ثابت کنید $|A| = ۰$.

۳ - نشان دهید $\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ a & b & ۱ \\ c & d & ۱ \end{vmatrix} = ۰$ معادلهٔ خطی است. که از نقاط (a, b) و (c, d) می‌گذرد.

۴ - اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$A^n = \begin{bmatrix} n+۱ & -n \\ n & -n+۱ \end{bmatrix}$$

۵ - اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در این‌صورت اعداد حقیقی a و b و c و d را چنان بیابید که تساوی $|A|^۲ - ۵\,|A| + ۶ = ۰$ برقرار باشد.

۶ - با یک مثال نقص نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد. به عبارت دیگر نشان دهید در حالت کلی از تساوی $AB = AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B = C$.

۷ - دوماتریس ۳×۳ مانند A و B مثال برنید که $A \neq \overline{O}$ و $B \neq \overline{O}$ ولی $AB = \overline{O}$.

۸ - اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $(A+I)^۶ = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ حاصل $a - b$ را به دست آورید.

۹ - ماتریس مربعی A در تساوی $۲A^۲ - A + I = \bar{O}$ صدق می‌کند. نشان دهید A وارون‌پذیر است وارون A را حساب کنید.

۱۰ - قضیهٔ یکتایی وارون: وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود، منحصر به فرد است.

۱۱ - اگر $A^۲ = A$ و m یک عدد حقیقی باشد، ثابت کنید:

$$(I - mA)^{-۱} = I + \frac{m}{۱ - m}A$$

۱۲ - اگر ماتریس A وارون‌پذیر باشد، ثابت کنید.

$$(A^{-۱}BA)^n = A^{-۱}B^nA$$

۱۳ - اگر A و B دو ماتریس مربعی وارون‌پذیر از مرتبهٔ n باشند. ثابت کنید:

$$\left|A^{-۱} + B^{-۱}\right| = \frac{|A + B|}{|AB|}$$

پاسخنامه تشریحی

۱ – می د انیم اگر هر واحد از a مساوی m واحد از b باشد پس $a=mb$ ضمناً اگر هر واحد از b مساوی n واحد از c باشد پس $b=nc$ حال از ترکیب روابط فوق می توان فهمید هر واحد از a مساوی mn واحد از c است

$$\begin{cases} a=mb \\ b=nc \end{cases} \Rightarrow a=(mn)c$$

حال در ماتریس داده شده به طور مثال $a_{۱۲}$ یعنی هر واحد از a مساوی چند واحد از b است. و $a_{۲۴}$ یعنی هر واحد از b چند واحد از d است بنابراین $a_{۱۲}\times a_{۲۴}$ یعنی هر واحد از a چند واحد از d است که این همان مقدار $a_{۱۴}$ می باشد.

پس در حالت کلی می توان گفت $a_{ik}\times a_{kj}=a_{ij}$ حال با توجه به رابطه فوق اگر $A^{۲}=[m_{ij}]_{۴\times ۴}$ باشد

$$m_{ij}=\sum_{k=۱}^{۴} a_{ik}a_{kj}=\sum_{k=۱}^{۴} a_{ij}=۴a_{ij}$$

بنابراین کافی است تک تک درایه های A را در ۴ ضرب کنیم تا درایه های A ایجاد شوند.

۲ – فرض کنیم $B=\begin{bmatrix} x & y \\ p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ در این صورت داریم:

$$A=B\times C\Rightarrow |A|=|BC|=\left|\begin{bmatrix} x & y \\ p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix} x & y & ۰ \\ p & q & ۰ \\ r & s & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\right|$$

$$=\left|\begin{bmatrix} x & y & ۰ \\ p & q & ۰ \\ r & s & ۰ \end{bmatrix}\right|\left|\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\right|=۰\times ۰=۰$$

۳ – معادلهٔ خطی که از نقاط (a,b) و (c,d) می‌گذرد به شکل زیر است:

$$y-b=\frac{b-d}{a-c}(x-a)\rightarrow y=(\frac{b-d}{a-c})x-(\frac{ab-ad}{a-c})+b$$

$$\rightarrow y=(\frac{d-b}{c-a})x+\frac{bc-ad}{c-a}$$

مطابق روش ساروس داریم:

$$\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ a & b & ۱ \\ c & d & ۱ \end{vmatrix}\begin{matrix} x & y \\ a & b \\ c & d \end{matrix}=۰\rightarrow (bx+yc+ad)-(ay+dx+bc)=۰$$

$$(b-d)x+(c-a)y+(ad-bc)=۰$$

$$(c-a)y=(d-b)x+(bc-ad)$$

$$y=(\frac{d-b}{c-a})x+\frac{bc-ad}{c-a}$$

۴ –

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱+۱ & -۱ \\ ۱ & -۱+۱ \end{bmatrix}$$

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲+۱ & -۲ \\ ۲ & -۲+۱ \end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳+۱ & -۳ \\ ۳ & -۳+۱ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{به همین ترتیب}} A^{n}=\begin{bmatrix} n+۱ & -n \\ n & -n+۱ \end{bmatrix}$$

۵ –

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\qquad |A|^{۲}-۵|A|+۶=۰\rightarrow (|A|-۲)(|A|-۳)=۰$$

$$\rightarrow |A|=۲\xrightarrow[c=۱,d=۴]{a=۱,b=۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۴ \end{vmatrix}=۴-۲=۲$$

یا

$$|A|=۳\xrightarrow[c=۳,d=۳]{a=۲,b=۱}\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۳ \end{vmatrix}=۶-۳=۳$$

۶ -

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۵ & ۸ \end{bmatrix}}_{C}$$

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} \ , \ AC = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

همانطور که مشاهده می‌کنید $AB = AC$ اما $B \neq C$ می‌باشد.

۷ -

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & a & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & c & ۰ \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} d & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ c & f & g \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} ۰ & a & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & c & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ c & f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۸ -

$$A + I = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \to a - b = ۲ - ۱ = ۱$$

$$(A + I)^۲ = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} \to a - b = ۵ - ۴ = ۱$$

$$(A + I)^۳ = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۴ & ۱۳ \\ ۱۳ & ۱۴ \end{bmatrix} \to a - b = ۱۴ - ۱۳ = ۱$$

همانطور که می‌بینید در تمام توان‌ها $a - b = ۱$ می‌باشد.

۹ -

$$-۲A^۲ + A = I \to A(-۲A + I) = I \to |A|\,|I - ۲A| = |I|$$

$\to |A|\,|I - ۲A| = ۱ \to |A| \neq ۰ \to$ A وارون‌پذیر است.

$$A(I - ۲A) = I \to A^{-۱} = I - ۲A$$

۱۰ - فرض می‌کنیم ماتریس‌های B و C هر دو وارون A باشند؛ ثابت می‌کنیم: $B = C$.

$AB = BA = I$: طبق فرض

$AC = CA = I$: طبق فرض

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$$

۱۱ - باید ضرب $(I + \frac{m}{۱ - m}A)$ و $(I - mA)$ برابر I شود.

$$(I - mA)(I + \frac{m}{۱ - m}A) = I + \frac{m}{۱ - m}A - mA - \frac{m^۲A^۲}{۱ - m}$$

$$= I + \frac{m - m(۱ - m) - m^۲}{۱ - m}A = I + \frac{۰}{۱ - m}A = I$$

به‌همین ترتیب ثابت می‌شود $(I + \frac{m}{۱ - m}A)(I - mA)$ هم برابر I می‌شود.

۱۲ -

$$(A^{-۱}BA)^۲ = (A^{-۱}BA)(A^{-۱}BA) = A^{-۱}B(\underbrace{AA^{-۱}}_{I})BA = A^{-۱}B^۲A$$

$$(A^{-۱}BA)^۳ = (A^{-۱}B^۲A)(A^{-۱}BA) = A^{-۱}B^۲(\underbrace{AA^{-۱}}_{I})BA = A^{-۱}B^۳A$$

به همین ترتیب داریم: $(A^{-۱}BA)^n = A^{-۱}B^nA$

۱۳ -

$$\frac{|A + B|}{|AB|} = \frac{|A + B|}{|A|\,|B|} = \frac{۱}{|A|}\frac{|A + B|}{|B|}$$

$$= \left|A^{-۱}\right|\,|A + B|\,\left|B^{-۱}\right| = \left|A^{-۱}(A + B)B^{-۱}\right| = \left|(I + A^{-۱}B)B^{-۱}\right| = \left|B^{-۱} + A^{-۱}\right|$$