نام و نام خانوادگی:

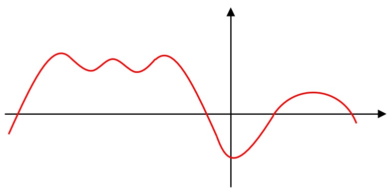
نام آزمون: کاربرد مشتق ۱

فاخران

۱ – تابع f با ضابطه $f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+x$ همواره صعودی است. تغییرات a کدام است؟

① $۰\leq a<۲$ ② $-\sqrt{۳}\leq a<۲$ ③ $|a|<\sqrt{۳}$ ④ $|a|\leq ۲$

۲ – نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت زیر است تابع $y=|f(|x|)|$ شامل چند نقطه‌ی بحرانی است؟



① ۵ ② ۶ ③ ۷ ④ ۸

۳ – مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x^{۲}-۱۵x$، در بازه‌ی $[-۴,۳]$ ، کدام است؟

① -۱۸ و ۲۴ ② -۴۵ و ۲۷ ③ -۳۶ و ۲۷ ④ -۲۷ و ۳۶

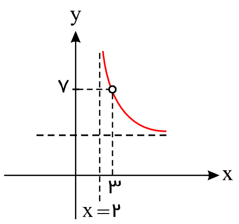
۴ – نقطه‌ی بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(x^{۳}-۳x^{۲}+۴)^{\frac{۱}{۳}}$ روی بازه‌ی $(-۱,۲)$ چگونه است؟

① مینیمم ② ماکسیمم ③ عادی ④ مشتق‌ناپذیر

۵ – نقاط بحرانی تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^{\frac{۴}{۳}}-x^{\frac{۲}{۳}}$ در بازه‌ی $(-۱,۱)$ کدام است؟

① $\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$ ② $\frac{\sqrt{۲}}{۴},\frac{-\sqrt{۲}}{۴}$ ③ $\frac{\sqrt{۲}}{۴},۰,\frac{-\sqrt{۲}}{۴}$ ④ $\frac{\sqrt{۲}}{۲},۰,\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$

۶ – اگر قسمتی از نمودار تابع $y=\frac{۲x^{۲}+ax+b}{x^{۲}+cx+d}$ مطابق شکل زیر باشد، حاصل $ab+cd$ کدام است؟



① -۱۵ ② ۱۵ ③ ۳۰ ④ -۳۰

۷ – نمودار $y=(x-۱)^{۳}(x+۱)$ در کدام فاصله نزولی است؟

① $x<۱$ ② $x<-\frac{۱}{۲}$ ③ $x>۱$ ④ $x>-\frac{۱}{۲}$

۸ – طول نقطه‌ی عطف منحنی به معادله‌ی $y=\frac{x}{۱+|x|}$ کدام است؟

① -۱ ② ۰ ③ ۱ ④ فاقد نقطه‌ی عطف

۹ – اگر در تابع $f(x)=\begin{cases}x^{۳}-bx & ,x<۳\\ ax+c & ,x\geq ۳\end{cases}$ فقط نقاط $x=\pm\sqrt{۳}$ بحرانی باشند، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

① -۲۷ ② ۲۷ ③ -۱۹ ④ ۱۹

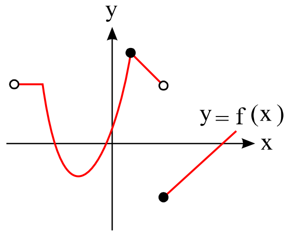
۱۰ – مستطیل محاط در دایره به قطر ۶ واحد را حول یک ضلع خود دوران می‌دهیم تا استوانه‌های قائم ایجاد شود. وقتی حجم این استوانه‌ها بیشترین مقدار را دارد، ارتفاع آن کدام است؟

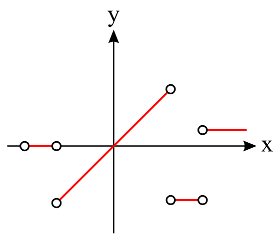
① ۴ ② $۲\sqrt{۳}$ ③ $۲\sqrt{۶}$ ④ $۳\sqrt{۲}$

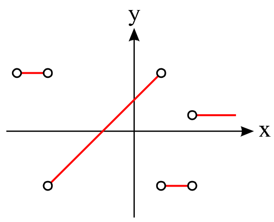
۱۱ - طول اکسترمم تابع $f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$ در فاصله $(0,\pi)$ کدام است؟

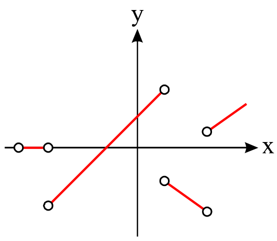
① $\dfrac{2\pi}{3}$ ② $\dfrac{\pi}{3}$ ③ $\dfrac{\pi}{2}$ ④ $\dfrac{\pi}{4}$

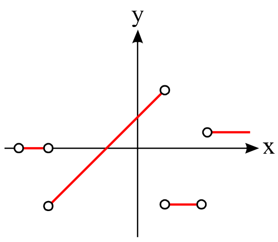
۱۲ - با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$، کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع f' باشد؟



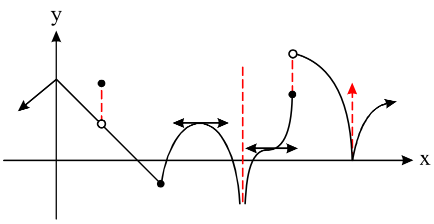
① 

② 

③ 

④ 

۱۳ - شکل زیر نمودار تابع $y=f(x+2)$ است. تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)$ کدام است؟



① ۶ ② ۷
③ ۸ ④ ۱۰

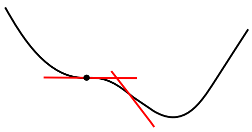
۱۴ - تابع $y=[\sqrt{x}]-x$ در بازهٔ $(0,9)$ به ترتیب از راست به چپ چند ماکسیمم نسبی و چند مینیمم نسبی دارد؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① ۲، صفر ② ۱، ۱ ③ صفر، ۲ ④ ۲، ۱

۱۵ - تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{x^2+x+3}$ در بازهٔ $(a,+\infty)$ صعودی اکید است. حداقل مقدار a کدام است؟

① $-\dfrac{3}{5}$ ② $\dfrac{3}{5}$ ③ -3 ④ 3

۱۶ - شکل مقابل نمودار تابع f است، مقادیر اکسترمم موضعی تابع مشتق f از راست به چپ چگونه است؟



① مینیمم مثبت - ماکزیمم مثبت ② مینیمم منفی - ماکزیمم منفی
③ مینیمم صفر - ماکزیمم مثبت ④ مینیمم منفی - ماکزیمم صفر

۱۷ - خط به معادله‌ی $y=x+4$ محور تقارن منحنی تابع $y=\dfrac{(2a-1)x+3}{2x+a}$ است. عرض از مبداء محور تقارن دیگر آن، کدام است؟

① -۲ ② ۱ ③ -۱ ④ ۲

۱۸ - مجموعه طول نقاط عطف نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x^3-3x^2 & ;\ x\geq -1 \\ -13-\dfrac{9}{x} & ;\ x<-1 \end{cases}$، کدام است؟

① $\varnothing$ ② $\{1\}$ ③ $\{-1,1\}$ ④ $\{-1\}$

۱۹ - وضعیت تابع $y=-\cos x+\tan x$ چگونه است؟

① همواره صعودی ② همواره نزولی ③ دارای یک اکسترمم ④ غیر یکنوا

۲۰ - کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح نیست؟

① $f(x)=x$ روی $\mathbb{R}$ صعودی است.
② $g(x)=x^2$ روی $(-\infty,0]$ نزولی است.
③ $h(x)=[x]$ روی دامنه اش صعودی است.
④ $k(x)=\frac{1}{x}$ در دامنه اش یکنوا است.

۲۱ - تابع $y=\frac{\sin x}{2+\cos x}$ در کدام بازه نزولی اکید است؟

① $(0,\frac{\pi}{2})$
② $(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3})$
③ $(\frac{-\pi}{3},\frac{\pi}{3})$
④ $(\pi,\frac{3\pi}{2})$

۲۲ - اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-3 & ; \quad x<1 \\ a & ; \quad x=1 \\ 3-2x & ; \quad x>1 \end{cases}$ در $x=1$ ماکسیمم یا می‌نیمم نسبی داشته باشد، a چند مقدار صحیح را نمی‌تواند بپذیرد؟

① ۲
② ۳
③ ۴
④ بی‌شمار

۲۳ - جهت تقعر تابع $y=(x^2+\frac{5}{3})x^{\frac{1}{4}}$ در چند نقطه تغییر می‌کند؟

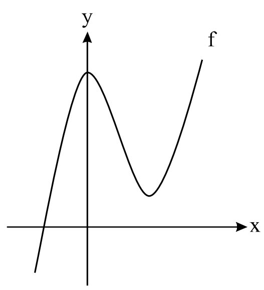
① صفر
② ۱
③ ۲
④ ۳

۲۴ - تقعر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^2+\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$ در بازه‌ی $(0,2\pi)$:

① ابتدا رو به پایین و سپس رو به بالاست.
② ابتدا رو به بالا و سپس رو به پایین است.
③ همواره رو به بالا است.
④ همواره رو به پایین است.

۲۵ - اگر $f(x)=x^3-3x^2+5$ باشد، به‌ازای چند مقدار صحیح k، معادلهٔ $f(x)=k$ دارای سه ریشهٔ حقیقی متمایز است؟

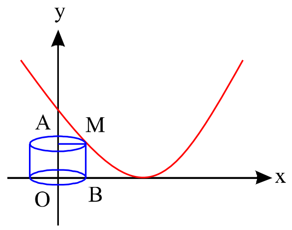
① ۱
② ۲
③ ۳
④ ۴



۲۶ - به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $f(x)=(m+1)x^3+(2m-1)x^2$ همواره نزولی است؟

① ۲
② ۱-
③ $\frac{1}{2}$
④ هیچ مقدار m

۲۷ - باتوجه به شکل زیر، روی منحنی $f(x)=(x-4)^2$ نقطه‌ی M را مشخص می‌کنیم. مستطیل $OAMB$ را حول محور y دوران می‌دهیم. حجم بزرگ‌ترین استوانه‌ی ایجاد شده کدام است؟



① 8π
② 16π
③ 32π
④ 64π

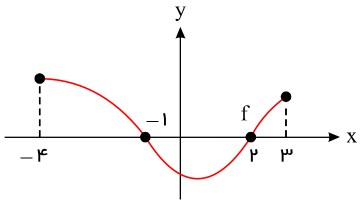
۲۸ - اگر f تابعی اکیداً صعودی و پیوسته بادامنه‌ی $\mathbb{R}$ و $g(x)=f(x)-f^2(x)+f^3(x)$ باشد، آن‌گاه تابع g:

① صعودی است.
② نزولی است.
③ ابتدا نزولی و سپس صعودی است.
④ ابتدا صعودی و سپس نزولی است.

۲۹ - اگر $h(x)=f(x)-(f(x))^2+(f(x))^3$ برای هر عدد حقیقی x برقرار باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟ ($f(x)$ تابعی غیرثابت است.)

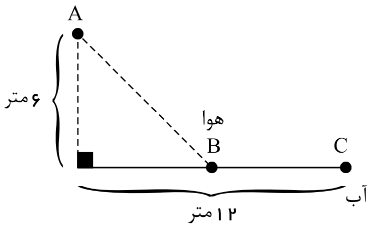
① تابع h صعودی است هرگاه تابع f صعودی باشد.
② تابع h نزولی است هرگاه تابع f صعودی باشد.
③ تابع h صعودی است هرگاه تابع f نزولی باشد.
④ ارتباطی بین صعودی یا نزولی بودن توابع f و h وجود ندارد.

۳۰- اگر نمودار تابع f به‌صورت زیر باشد، تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ الزاماً در کدام بازه اکیداً صعودی است؟



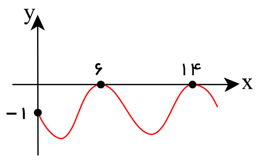
① $(-۴,-۱)$
② $(-۱,۰)$
③ $(۲,۳)$
④ در هیچ بازه‌ای اکیداً صعودی نیست.

۳۱- مرغ دریایی در نقطهٔ A قرار گرفته و قصد دارد به نقطهٔ C برود. برای این کار، قسمتی از مسیر را در هوا و بخشی را روی سطح آب، مطابق شکل زیر طی می‌کند. اگر این پرنده روی آب ۱۰ کالری‌برمتر و در هوا $۱۰\sqrt{۵}$ کالری‌برمتر انرژی مصرف کند، فاصلهٔ نقطهٔ B از C چند متر باشد تا مرغ دریایی کم‌ترین انرژی ممکن را مصرف کند؟



① ۳
② ۹
③ ۴
④ ۶

۳۲- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y=a+\sin(b\pi x)$ است. مقدار تابع در $x=\frac{۲۶}{۳}$ کدام است؟



① $\frac{-۱}{۲}$ ② $\frac{-۳}{۲}$ ③ $\frac{۱}{۲}$ ④ $\frac{۳}{۲}$

۳۳- طول نقطه عطف منحنی $y=|x|(x^۲+۲)$ کدام است؟

① $-\sqrt{۲}$ ② صفر ③ $\sqrt{۲}$ ④ فاقد عطف

۳۴- نمودار تابع $y=\frac{۲ax+۱}{x+a}$ به ازای مقادیری از a یک خط راست است. فاصله مبدأ مختصات از این خط کدام است؟

① ۲ ② $\sqrt{۲}$ ③ ۱ ④ $\sqrt{۵}$

۳۵- نمودار تابع $\frac{x^۲-۴x+۸}{x-۲}$ در کدام بازه نزولی و تقعر آن رو به بالا است؟

① $(۰,۲)$ ② $(۲,۴)$ ③ $(۴,+\infty)$ ④ $(-\infty,۰)$

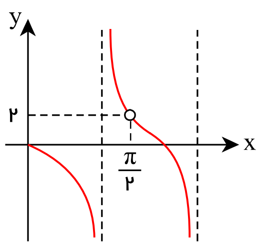
۳۶- تعداد نقاط بحرانی تابع $y=x\sqrt{x^۲-۴}$ بر روی دامنه خود کدام است؟

① ۱ ② ۴ ③ ۳ ④ ۰

۳۷- اگر نمودار تابع $y=x^۳-ax^۲+(a-۱)x$ فقط از ناحیه دوم دستگاه مختصات عبور نکند، محدوده a کدام است؟

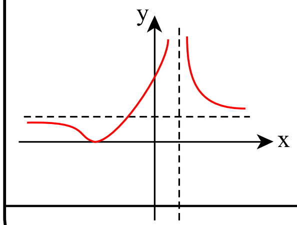
① $[۱,+\infty)$ ② $[۱,+\infty)-\{۲\}$ ③ $(۱,+\infty)$ ④ $(۱,+\infty)-\{۲\}$

۳۸- شکل زیر مربوط به تابع $f(x)=\frac{a\tan x}{\tan x+b}$ در بازه $\left[۰,\frac{۵\pi}{۴}\right)$ است، $a+b$ کدام است؟



① صفر
② ۱
③ ۲
④ ۳

۳۹- اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲+ax+۴}{x^۲+bx+۱}$ مطابق شکل زیر باشد، $a+b$ کدام است؟



① ۲
② -۲
③ ۶
④ -۶

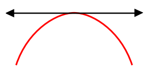
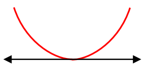
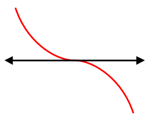
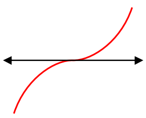
۴۰- اگر خط $y = k$ نمودار تابع $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$ را در چهار نقطه قطع کند، حدود k کدام است؟

① $-1 < k < 0$ ② $0 < k < 1$ ③ $1 < k < 2$ ④ $2 < k < 3$

۴۱- دامنه‌ی تابع معکوس $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{9 - x}$ کدام است؟

① $[-2, 2]$ ② $[0, 3]$ ③ $[-3, 3]$ ④ $[0, 2]$

۴۲- نمودار تابع $f(x) = \sin^2 x \sin 2x$ در همسایگی $x = \frac{\pi}{3}$ چگونه است؟

①  ②  ③  ④ 

۴۳- قدرمطلق تفاضل ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع $y = x\sqrt{4 - x^2}$ کدام است؟

① 2 ② $2 - \sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4

۴۴- حاصل ضرب عرض‌های نقاط بحرانی تابع $f(x) = 2x - |x^2 - 4|$ کدام است؟

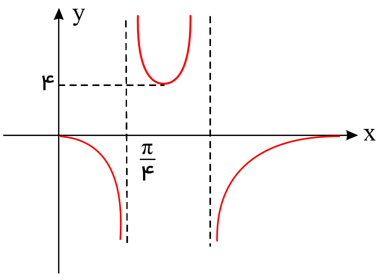
① ۱۶- ② ۲۰ ③ ۲۰- ④ ۸۰

۴۵- به ازای چند مقدار صحیح m، مینیمم نسبی تابع $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + mx$ در بازه‌ی $(0, 1)$ قرار دارد؟

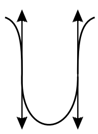
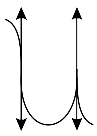
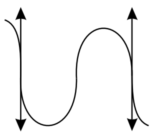
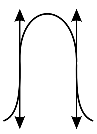
① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۴۶- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{a\tan^2 x + b}{c\tan x + 1}$ در یک دوره تناوب به صورت زیر است. $a + c$ کدام است؟

① -4
② -1
③ -2
④ -3

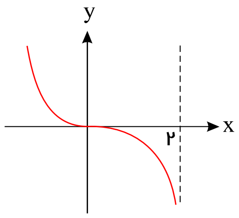


۴۷- نمودار $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$ در اطراف $x = 0$ و $x = 2$ چگونه است؟

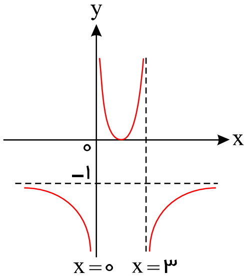
①  ②  ③  ④ 

۴۸- قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{x^n}{x^2 - b^2 x + 2b}$ به‌صورت زیر است. ماکزیمم مقدار $n \times b$ کدام است؟ (n عددی طبیعی است.)

① -3 ② -1
③ 3 ④ 5



۴۹ - نمودار تابع $f(x)=\dfrac{ax^{۲}+bx-۴}{x^{۲}+cx}$ به‌صورت شکل زیر است. $a+b+c$ کدام است؟



① صفر ② ۱ ③ $\dfrac{۳}{۲}$ ④ ۲

۵۰ - در کدام بازه تابع $y=x^{۴}-۶x^{۲}+۸x+۱$ صعودی و تقعر آن رو به پایین است؟

① $(-۳,۱)$ ② $(۰,۱)$ ③ $(-۲,۱)$ ④ $(۱,+\infty)$

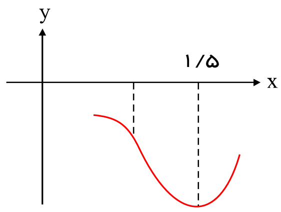
۵۱ - اگر تابع $y=\dfrac{x^{۳}}{۶}-mx^{۲}+x$ دارای اکسترمم نسبی نباشد، حداقل طول نقطه‌ی عطف آن کدام است؟

① $-\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$ ② $-\sqrt{۲}$ ③ -۲ ④ -۱

۵۲ - حدود k کدام باشد تا تابع $f(x)=\begin{cases} ۲\left|x\right|-x^{۲} & ; x\neq ۰ \\ k & ; x=۰ \end{cases}$ در $x=۰$ ماکزیمم نسبی داشته باشد، ولی ماکزیمم مطلق نداشته باشد؟

① $۰\leq k\leq ۱$ ② $k\leq ۰$ ③ $۰<k<۱$ ④ $k<۰$

۵۳ - شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=ax^{۴}+bx^{۳}+c$ است. دو تایی مرتب (a,b) کدام می‌تواند باشد؟



① $(۱,۲)$
② $(۱,-۲)$
③ $(-۱,۲)$
④ $(-۱,-۲)$

۵۴ - طول نقطه‌ی عطف تابع $x>۰$ و $y=(۵-\sqrt[۳]{x^{۲}})x^{۲}$ کدام است؟

① $\dfrac{۲۷}{۴}$ ② $\dfrac{۲۷}{۸}$ ③ ۷ ④ ۶

۵۵ - در ساخت یک لیوان فلزی (بدون درب) به شکل استوانهٔ قائم با حجم π، با کدام ارتفاع کم‌ترین مقدار فلز مصرف می‌شود؟

① ۱ ② $\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$ ③ $\dfrac{۱}{۲}$ ④ $\sqrt[۳]{۲}$

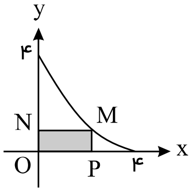
۵۶ - مجموعهٔ طول نقاط بحرانی تابع $f(x)=\dfrac{۱}{۲}x(۲[x]+x-۱)$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① $\mathbb{Z}$ ② $\mathbb{Z}-\{۰\}$ ③ $\mathbb{Z}\cup\left\{\dfrac{۱}{۲}\right\}$ ④ $\mathbb{Z}\cup\left\{\dfrac{۳}{۲}\right\}$

۵۷ - بیش‌ترین مقدار تابع $y=\sqrt{x-\sqrt{۲-x}}$ کدام است؟

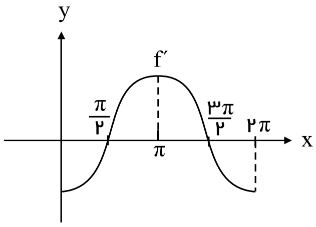
① $\sqrt{۲}$ ② $۲\sqrt{۲}$ ③ $\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$ ④ ۱

۵۸- شکل زیر مربوط به تابع $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ است. اگر نقطهٔ M همواره روی این تابع قرار داشته باشد، طول نقطهٔ P چقدر باشد تا مساحت مستطیل $ONMP$ ماکسیمم شود؟



۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۵۹- اگر نمودار مشتق تابع f به صورت زیر باشد، تقعر نمودار f در تمام نقاط کدام بازه رو به پایین است؟



۱) $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ ۲) $(\pi,2\pi)$
۳) $(0,\frac{\pi}{2})$ ۴) $(\frac{\pi}{2},\pi)$

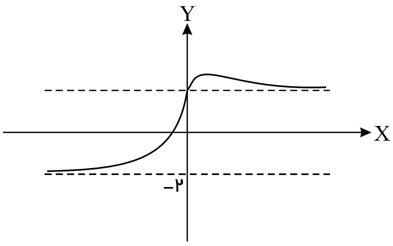
۶۰- تابع $f(x)=x^4+(k-1)x^3+(k+3)x$ فاقد نقطهٔ عطف است. عرض می‌نیمم تابع کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۳ ۴) -3

۶۱- نمودار تابع $f(x)=|x|\,(x-2)$ در بازهٔ $(-1,2)$ از نظر اکسترمم چگونه است؟

۱) فقط یک مینیمم نسبی دارد. ۲) فقط یک ماکزیمم نسبی دارد و فاقد مینیمم نسبی است.
۳) یک ماکزیمم و یک مینیمم نسبی دارد. ۴) اکسترمم نسبی ندارد.

۶۲- اگر نمودار تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{\sqrt{x^2+1}}$ به‌صورت مقابل باشد، ماکزیمم مطلق آن کدام است؟



۱) ۴ ۲) ۳
۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

۶۳- معادلهٔ خطی که نقاط اکسترمم تابع $y=\dfrac{ax}{x^2+1}$ را به هم وصل می‌کند، $y=4x+b$ است. b کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -2 ۴) ۳

۶۴- به ازای کدام مجموعهٔ مقادیر a تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x+a}$ دارای اکسترمم نسبی است؟

۱) $(-3,0)$ ۲) $(0,3)$ ۳) $\mathbb{R}-[-3,0]$ ۴) $\mathbb{R}-[0,3]$

۶۵- اگر شیب خط گذرنده از نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\dfrac{x}{x^2+a^2}$ برابر ۶ باشد، a کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟ $(a\neq 0)$

۱) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ ۲) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ ۳) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ۴) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

۶۶- تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2+kx-k}$ فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد. k چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

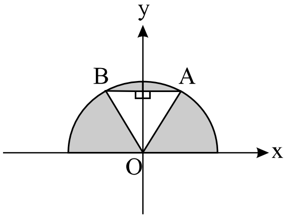
۶۷- به‌ازای کدام مقدار k ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x)=x^3-3x^2+k$ در بازهٔ $[1,3]$ قرینهٔ یکدیگرند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۸- می‌خواهیم با یک قطعه سیم به طول ۴۸ واحد، یک مکعب‌مستطیل بسازیم. بیش‌ترین حجم این مکعب‌مستطیل، در صورتی که یکی از بعدها ۳برابر بعد دیگر باشد، کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۸ ۳) ۶۰ ۴) ۶۴

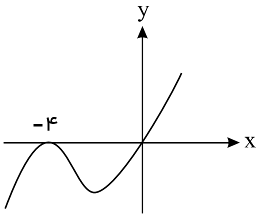
۶۹- مثلث OAB مطابق شکل، زیر نمودار $y=\sqrt{۲-x^۲}$ محاط شده است، به‌گونه‌ای که یک رأس آن روی مبدأ مختصات و ۲ رأس دیگر آن روی نمودار قرار دارند. اگر مساحت قسمت هاشورخورده در شکل کمترین مقدار ممکن باشد، اندازهٔ میانهٔ وارد بر ضلع AB کدام است؟



① ۱ ② $\sqrt{۲}$

③ $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ④ $\frac{۱}{۲}$

۷۰- نمودار تابع $y=xf(x-۱)=ax^۳+bx^۲+۸x$ مطابق شکل زیر است. بزرگ‌ترین بازه‌ای که در آن تابع $y=xf(x)$ نزولی باشد، کدام است؟



① $[-۲,-۱]$ ② $[-۵,-\frac{۵}{۳}]$

③ $[\frac{۵}{۳},۵]$ ④ $[۱,۲]$

۷۱- معادلهٔ $x^۳-۶x^۲-k+۱=۰$ سه جواب حقیقی متمایز دارد. کم‌ترین مقدار صحیح k کدام است؟

① -۳۰ ② -۳۱ ③ -۳۲ ④ -۳۳

۷۲- مجموع مقادیر ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f به معادلهٔ $f(x)=۱+x^۲+\sqrt{۱-x^۲}$ روی دامنه‌اش کدام است؟

① ۲٫۲۵ ② ۳٫۲۵ ③ ۴٫۲۵ ④ ۵٫۲۵

۷۳- اگر $f(x)=\begin{cases}(x-۱)^۲ & ; x\neq ۱\\ k & ; x=۱\end{cases}$، $g(x)=\sqrt{x}$ و ماکزیمم نسبی تابع gof برابر ۲ باشد، مقدار k کدام است؟

① ۲ ② $\frac{۳}{۲}$ ③ ۴ ④ $\frac{۱}{۲}$

۷۴- روی کدام بازه نمودار تابع $f(x)=x^۲|x-۱|$ صعودی است و تقعر رو به پایین دارد؟

① $\left[\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳}\right]$ ② $\left[۰,\frac{۱}{۳}\right]$ ③ $(۱,+\infty)$ ④ $\left[\frac{۲}{۳},۱\right]$

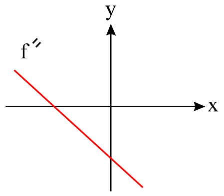
۷۵- مجانب‌های نمودار تابع هموگرافیک $f(x)=ax+\frac{x^۲+۱}{x-۲}$، محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کنند. فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط شامل نقاط A و B کدام است؟

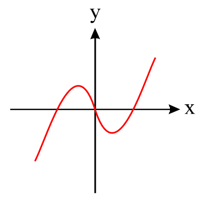
① $\sqrt{۲}$ ② $\sqrt{۳}$ ③ $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ④ $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

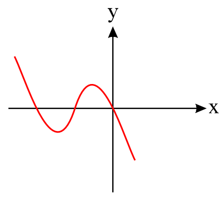
۷۶- می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای‌شکل با ضخامت معین و درباز بسازیم که گنجایش آن ۳۰۰۰ واحد مکعب باشد. ارتفاع قوطی کدام باشد تا مقدار فلز به‌کاررفته برای تولید آن مینیمم شود؟ $(\pi\simeq ۳)$

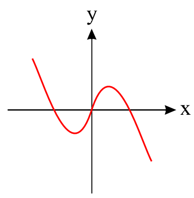
① ۱۰ ② ۲۰ ③ ۱۵ ④ ۸

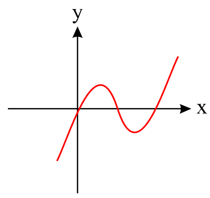
۷۷ – اگر نمودار تابع f'' به‌صورت زیر باشد، نمودار تابع f به کدام صورت می‌تواند باشد؟



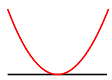
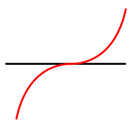
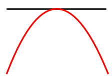
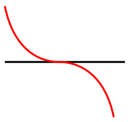
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۷۸ – نمودار تابع $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}$ در همسایگی نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۴}$ به کدام صورت است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۷۹ – نمودار تابع $y=x+\sin x$ با دامنهٔ $[۰,a)$، ۴ نقطهٔ عطف دارد. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) ۳π
۲) ۶π
۳) ۴π
۴) ۵π

۸۰ – به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر m، خط $y=m$ نمودار تابع $y=-x^۳+۳x+۲$ را در ۳ نقطه قطع می‌کند؟

۱) $m\in(-۱,۱)$
۲) $m\in(-۱,۴)$
۳) $m\in(۰,۵)$
۴) $m\in(۰,۴)$

۸۱ – طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع $f(x)=۲x^۳-۹ax^۲+۱۲a^۲x+۱$، مربع طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی آن است. مقدار a کدام است؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) $\frac{۱}{۲}$

۸۲ – در کدام تابع زیر $x=۱$ مینیمم نسبی نیست؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) $y=\cos\pi[x]$
۲) $y=(x-۱)^۲[x]$
۳) $y=\sqrt{x-[x]}$
۴) $y=x[-x]$

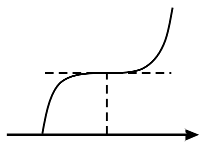
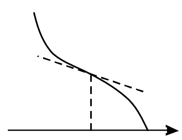
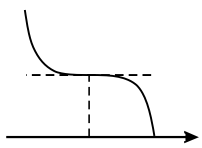
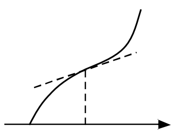
۸۳ – اگر نقطهٔ $A(-۱,\frac{۱}{۲})$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^۲+۳}$ باشد، طول و نوع نقطهٔ اکسترمم نسبی دیگر تابع f کدام است؟

۱) ۱، ماکزیمم
۲) ۱، مینیمم
۳) ۳، ماکزیمم
۴) ۳، مینیمم

۸۴ – اگر تابع $f(x)=\begin{cases}(x-۱)^۲+۲ & ;\ x>۱\\ m & ;\ x=۱\\ x-۴ & ;\ x<۱\end{cases}$ اکسترمم نسبی نداشته باشد، مجموعهٔ مقادیر m کدام است؟

۱) $-۳\le m\le ۲$
۲) $-۴<m<۲$
۳) $m\ge ۲$ یا $m\le -۳$
۴) $m>۲$ یا $m<-۳$

۸۵ – نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{۴}x^۲+۱۶\sqrt{x}$ در اطراف نقطهٔ عطفش، شبیه کدام نمودار است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۸۶ – تابع $f(x)=\begin{cases}a\sqrt{x} & ;\ x\ge ۱\\ x^۲+۲x+b & ;\ x<۱\end{cases}$ فقط یک نقطهٔ بحرانی به‌طول $x=c$ دارد. حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۱
۴) ۱۲

۸۷- تابع $f(x)=|x|\,(x^2-x)$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) اکسترمم نسبی ندارد.

۸۸- طول نقطهٔ ماکسیمم تابع $y=(\frac{3}{4}x-\frac{1}{7}x^2)\sqrt[3]{x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

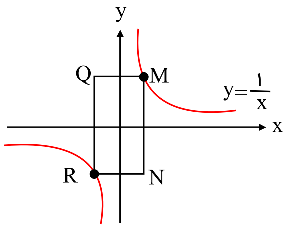
۸۹- اگر $(1,4)$ مختصات نقطهٔ مینیمم نسبی تابع $y=\dfrac{ax^2+b}{x}$ باشد، مختصات نقطهٔ ماکسیمم نسبی آن کدام است؟

۱) $(-1,-2)$ ۲) $(-1,4)$ ۳) $(-1,-4)$ ۴) $(-2,-1)$

۹۰- به ازای کدام مقادیر a، تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{a}{x}-x^2$، دارای مینیمم نسبی است؟

۱) $|a|<2$ ۲) $a<0$ ۳) $a>0$ ۴) هیچ مقدار a

۹۱- مطابق شکل زیر، دو رأس مقابل مستطیل $MNRQ$ روی دو شاخه‌ی منحنی $y=\dfrac{1}{x}$ واقع‌اند و اضلاع مستطیل با محورهای مختصات موازی است. کم‌ترین مقدار محیط مستطیل کدام است؟ (نقطه‌های R و M نسبت به مبدأ مختصات قرینه‌اند.)



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۸

۹۲- طول نقاط عطف تابع $f(x)=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$ در بازه‌ی $(0,2\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) عطف ندارد. ۳) π ۴) $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

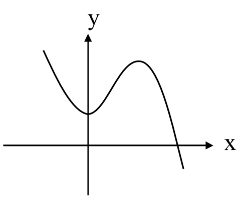
۹۳- به ازای چند مقدار صحیح k، تابع $f(x)=x^4-kx^3+6x^2$، نقطه‌ی عطف ندارد؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۹۴- در کدام حالت تابع $y=\dfrac{x}{x^2+ax+b}$ فاقد اکسترمم است؟

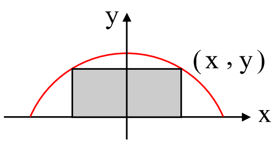
۱) $a>0$ ۲) $a<0$ ۳) $b>0$ ۴) $b<0$

۹۵- اگر f تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر باشد و نمودار f' شبیه به نمودار مقابل باشد، کدام گزینه صحیح است؟



۱) f فاقد اکسترمم – f' دو اکسترمم منفی دارد.
۲) f یک ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ عطف دارد.
۳) f دو اکسترمم و f' دو اکسترمم دارد.
۴) f دو نقطهٔ عطف دارد و f' فاقد اکسترمم است.

۹۶- نیم دایره‌ی شکل زیر به شعاع $\sqrt{5}$ می‌باشد که در آن مستطیلی محاط کرده‌ایم. اگر محیط مستطیل ماکزیمم باشد، مساحت آن کدام است؟



۱) ۲ ۲) ۸
۳) ۵ ۴) ۴

۹۷- مجموعه‌ی نقاط عطف نمودار تابع $y=x^{\frac{5}{3}}-5x^{\frac{2}{3}}$ کدام است؟

۱) $\{-1\}$ ۲) $\{0,-1\}$ ۳) $\{0\}$ ۴) $\varnothing$

۹۸- اگر معادله‌ی $x^3-3x^2+m=0$ دارای سه جواب متمایز باشد، حدود m کدام است؟

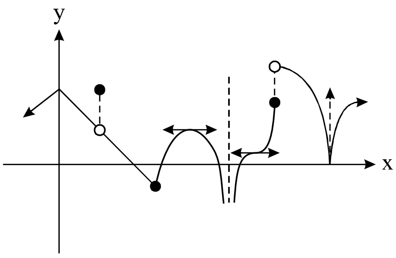
۱) $0<m<4$ ۲) $m>4$ ۳) $m<0$ ۴) $-2<m<2$

۹۹- در تابع $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{۸-x}$ نسبت ماکسیمم مطلق تابع به مینیمم مطلق آن کدام است؟

(۱) $\sqrt{۲}$ (۲) $۲\sqrt{۲}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۰۰- شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x+۲)$ را نمایش می‌دهد. تعداد نقاط بحرانی تابع $y=f(x)$ کدام است؟

(۱) ۶
(۲) ۷
(۳) ۸
(۴) ۱۰



پاسخنامه تشریحی

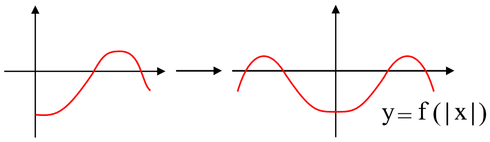
۱ ـ گزینه ۳

برای اینکه تابع صعودی باشد مشتق باید همواره مثبت باشد و شرط آنکه یک عبارت درجه دوم، مثبت باشد آن است که $a > ۰$ و $\Delta < ۰$ باشد.

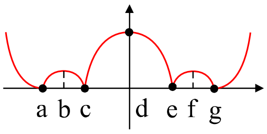
$$y' = ۳x^۲ + ۲ax + ۱ > ۰ \rightarrow \begin{cases} a > ۰ \rightarrow ۳ > ۰ \\ \Delta < ۰ \rightarrow ۴a^۲ - ۱۲ < ۰ \rightarrow a^۲ < ۳ \rightarrow -\sqrt{۳} < a < \sqrt{۳} \rightarrow |a| < \sqrt{۳} \end{cases}$$

۲ ـ گزینه ۳ نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آنها مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد.

برای رسم نمودار $y = f(|x|)$ ابتدا آن قسمت از نمودار تابع که در سمت چپ محور yها است را حذف کرده و سپس قرینه‌ی شکل باقی‌مانده را نسبت به محور عرض‌ها رسم می‌کنیم.



حال برای رسم $y = |f(|x|)|$ هر آن‌چه از شکل زیر محور xها است آیینه‌وار به بالا منتقل می‌کنیم.



در نقاطی به طول‌های f , d , b مشتق برابر صفر است و درنقاطی به طولهای a , c , e , g مشتق وجود ندارد (نقاط گوشه) بنابراین بحرانی هستند.

۳ ـ گزینه ۲

$$f(x) = \frac{۱}{۳}x^۳ - x^۲ - ۱۵x \rightarrow f'(x) = x^۲ - ۲x - ۱۵ = (x-۵)(x+۳) = ۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = ۵ \rightarrow \text{غ ق ق (در بازه قرار ندارد)} \\ x = -۳ \end{cases}$$

اکنون باید مقدار تابع را به ازای طول نقطه‌ی بحرانی و ابتدا و انتهای بازه، بدست آوریم.

$$f(-۴) = -\frac{۶۴}{۳} - ۱۶ + ۶۰ = \frac{۶۸}{۳} \sim ۲۲/۶$$

$$f(۳) = ۹ - ۹ - ۴۵ = -۴۵ \rightarrow \text{مطلق } Min$$

$$f(-۳) = -۹ - ۹ + ۴۵ = ۲۷ \rightarrow \text{مطلق } Max$$

۴ ـ گزینه ۲ نقاط بحرانی نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آن نقاط، مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد.

$$f(x) = (x^۳ - ۳x^۲ + ۴)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{x^۳ - ۳x^۲ + ۴} \rightarrow f'(x) = \frac{۳x^۲ - ۶x}{۳\sqrt[۳]{(x^۳ - ۳x^۲ + ۴)^۲}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{صورت} = ۰ \rightarrow ۳x(x-۲) = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۰ \quad \text{ق ق} \\ x = ۲ \quad \text{(در بازه قرار ندارد)} \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \\ \text{مخرج} = ۰ \rightarrow x^۳ - ۳x^۲ + ۴ = ۰ \rightarrow (x+۱)(x-۲)^۲ = ۰ \\ \rightarrow \begin{cases} x = -۱ \quad \text{(در بازه قرار ندارد)} \quad \text{غ ق ق} \\ x = ۲ \quad \text{(در بازه قرار ندارد)} \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \end{cases}$$

کافی است مشتق را در اطراف $x = ۰$ (ریشه‌ی ساده‌ی مشتق) تعیین علامت کنیم.

x	-۱	۰	۲
y'	$+$	۰	$-$
y	$\nearrow$	Max	$\searrow$

$\rightarrow$ طول نقطه‌ی Max است $x = ۰$

برای تجزیه‌ی عبارت درجه‌ی سوم $x^۳ - ۳x^۲ + ۴$ توجه کنید که چون $x = ۲$ عبارت را صفر می‌کند پس این عبارت بر $x - ۲$ بخش‌پذیر است. با تقسیم عبارت درجه‌ی سوم بر $x - ۲$ چندجمله‌ای تجزیه می‌شود.

۵ ـ گزینه ۳

نقاط بحرانی، نقاطی از دامنه‌ی تعریف هستند که در آنها مشتق صفر است یا مشتق وجود ندارد.

$$f(x) = x^{\frac{۴}{۳}} - x^{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow f'(x) = \frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}} - \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}} = \frac{۲}{۳}(۲x^{\frac{۱}{۳}} - x^{-\frac{۱}{۳}}) = \frac{۲}{۳}(۲\sqrt[۳]{x} - \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}) = \frac{۲}{۳}(\frac{۲\sqrt[۳]{x^۲} - ۱}{\sqrt[۳]{x}})$$

$$\text{صورت} = ۰ \Rightarrow ۲\sqrt[۳]{x^۲} - ۱ = ۰ \Rightarrow \sqrt[۳]{x^۲} = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{توان ۳}} x^۲ = \frac{۱}{۸} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۴} \in (-۱, ۱)$$

$$\text{مخرج} = ۰ \Rightarrow \sqrt[۳]{x} = ۰ \Rightarrow x = ۰ \in (-۱, ۱)$$

پس $\pm\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ و ۰ طول نقاط بحرانی تابع هستند.

۶ ـ گزینه ۱ تابع در $x = 2$ نامتناهی می‌شود بنابراین $x = 2$ ریشهٔ مخرج است.

$$x = 2 \xrightarrow{\text{صدق در مخرج}} 4 + 2c + d = 0 \to 2c + d = -4$$

تابع در $x = 3$ توخالی است بنابراین $x = 3$ ریشهٔ مخرج است.

$$x = 3 \xrightarrow{\text{صدق در مخرج}} 9 + 3c + d = 0 \to 3c + d = -9$$

از حل دو معادله به جواب $c = -5$ و $d = 6$ می‌رسیم پس مخرج $x^2 - 5x + 6$ یا همان $(x-2)(x-3)$ است.

با توجه به شکل، تابع در $x = 3$ حدی برابر ۷ دارد.

$$x = 3 \to \frac{18 + 3a + b}{0} \xrightarrow[\text{جوابش ۷ شده است.}]{\text{این کسر حتماً } \frac{0}{0} \text{ بوده که پس از رفع ابهام}} 18 + 3a + b = 0$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2 + ax + b}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(2x + a + 6)}{(x-2)(x-3)} = \frac{12 + a}{1} = 7 \to a = -5, b = -3$$

پس $ab + cd = 15 - 30 = -15$ است.

برای آنکه متوجه شوید چگونه $2x^2 + ax + b$ را به‌صورت $(x-3)(2x + a + 6)$ نوشتیم باید توجه کنید که $2x^2 + ax + b$ را بر $x - 3$ تقسیم کردیم.

$$\begin{array}{l|l} 2x^2 + ax + b & x - 3 \\ \cline{2-2} & 2x + a + 6 \\ \underline{-2x^2 + 6x} & \\ (a+6)x + b & \\ \underline{-(a+6)x + 3a + 18} & \\ \underbrace{3a + 18 + b}_{\text{صفر است}} & \end{array} \qquad \to 2x^2 + ax + b = (x-3)(2x + a + 6)$$

و توجه کنید برای رفع ابهام از $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x^2 + ax + b}{x^2 - 5x + 6}$ می‌توان از روش هوپیتال نیز استفاده کرد.

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2 + ax + b}{x^2 - 5x + 6} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to 3} \frac{4x + a}{2x - 5} = \frac{12 + a}{1} = 7 \to a = -5$$

۷ ـ گزینه ۲

از تابع، مشتق گرفته و کوچکتر از صفر قرار می‌دهیم.

$$y' = 3(x-1)^2(x+1) + (x-1)^3 = (x-1)^2(3(x+1) + x - 1) = \underbrace{(x-1)^2}_{+}(4x + 2) < 0$$

$$\to 4x + 2 < 0 \to 4x < -2 \to x < -\frac{1}{2}$$

۸ ـ گزینه ۲

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & x \ge 0 \\ \dfrac{x}{1-x} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2} & x > 0 \\ \dfrac{1}{(1-x)^2} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-2}{(x+1)^3} & x > 0 \\ \dfrac{2}{(x+1)^3} & x < 0 \end{cases}$$

چون $f''_-(0) = 2, f''_+(0) = -2$ پس f'' در $x = 0$ تغییر علامت می‌دهد در نتیجه $x = 0$ طول نقطه‌ی عطف f خواهد بود ضمناً خط مماس نیز در صفر وجود دارد. چون $f'_+(0) = f'_-(0) = 1$ در ضمن تابع در $x = 0$ پیوسته هم است

$(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0)$.

۹ ـ گزینه ۱ نقاط بحرانی نقاطی از درون دامنهٔ تعریف هستند که در آن نقاط، مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد.

چون قرار است $x = \pm\sqrt{3}$ تنها نقاط بحرانی باشند، پس:

$$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{ضابطهٔ اول}} 3x^2 - b = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{b}{3} \xrightarrow{x = \pm\sqrt{3}} 3 = \frac{b}{3} \Rightarrow b = 9$$

درضمن نقطهٔ مرزی یعنی $x = 3$ نباید بحرانی باشد، پس باید تابع در این نقطه پیوسته و مشتق‌پذیر و مشتق آن غیرصفر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 9x & , x < 3 \\ ax + c & , x \ge 3 \end{cases}$$

شرط پیوستگی (حد راست = حد چپ = مقدار تابع):

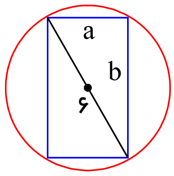
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3) \Rightarrow 0 = 3a + c \ (*)$$

تساوی مشتق‌های راست و چپ:

$$f'_-(3) = f'_+(3) \Rightarrow 3(3^2) - 9 = a \Rightarrow a = 18 \xrightarrow{(*)} c = -54 \Rightarrow a + b + c = 18 + 9 - 54 = -27$$

۱۰ ـ گزینه ۲ مطابق شکل، مستطیل محاط در دایره را حول ضلع به طول b دوران می دهیم تا استوانه‌ای با ارتفاع b و شعاع قاعده‌ی a حاصل شود. بنابراین می‌خواهیم $V = \pi a^2 b$ ماکسیمم شود.

از آنجا که $a^۲ + b^۲ = ۳۶$ در نتیجه داریم:

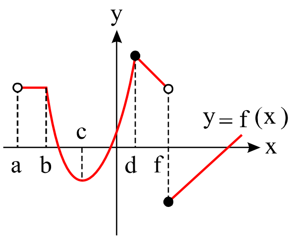


$$a^۲ = ۳۶ - b^۲ \Rightarrow V = \pi a^۲ b = \pi(۳۶ - b^۲)b = \pi(۳۶b - b^۳)$$
$$\Rightarrow V'(b) = \pi(۳۶ - ۳b^۲) = ۰ \Rightarrow b^۲ = ۱۲ \Rightarrow b = ۲\sqrt{۳}$$

۱۱ - گزینه ۱ کافی است ریشه‌ی $f'(x)$ را بدست آوریم. در نتیجه خواهیم داشت:

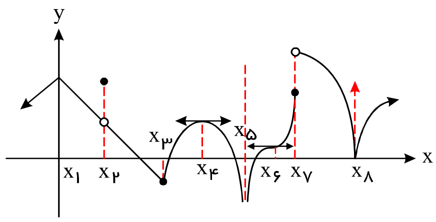
$$f(x) = \frac{\sin x}{۲ + \cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x(۲ + \cos x) - (-\sin x)(\sin x)}{(۲ + \cos x)^۲}$$
$$= \frac{۲\cos x + \cos^۲ x + \sin^۲ x}{(۲ + \cos x)^۲} = \frac{۲\cos x + ۱}{(۲ + \cos x)^۲} \Rightarrow f'(x) = ۰ \Rightarrow \cos x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \frac{۲\pi}{۳}$$

۱۲ - گزینه ۴ در نقاط $\{b, d, f\}$ مشتق نداریم. در نقطهٔ $\{c\}$ مشتق باید صفر باشد، طول نقطهٔ c منفی است در بازهٔ a تا b مشتق صفر است، چون شیب صفر است. در بازهٔ b تا c تابع نزولی و $f' < ۰$، در بازهٔ c تا d تابع صعودی و $f' > ۰$، در بازهٔ d تا f تابع نزولی و $f' < ۰$ و در بازهٔ $(f, +\infty)$ تابع صعودی و $f' > ۰$ است. در بازه‌های d تا f و f تا $+\infty$ تابع خطی است لذا f' ثابت است.



۱۳ - گزینه ۲ می دانیم نقاط بحرانی یک تابع، یعنی نقاطی از دامنهٔ تابع که مشتق تابع در آن‌ها صفر است یا موجود نیست. بنابراین:

درست است که در اینجا با تابع $f(x + ۲)$ مواجه‌ایم، اما دقت کنید که اعمال قوانین انتقال از جنس جمع و تفریق بر روی x، صرفاً نمودار آن را در جهت افقی حرکت می‌دهد و تأثیری برروی تعداد نقاط بحرانی مورد بررسی ما ندارد، پس کافی است نقاط بحرانی همین نمودار داده شده را بیابیم:



$x_۱, x_۳ \rightarrow$ نقطهٔ گوشه $\Rightarrow$ مشتق‌ناپذیر

$x_۲, x_۷ \rightarrow$ ناپیوسته $\Rightarrow$ مشتق‌ناپذیر

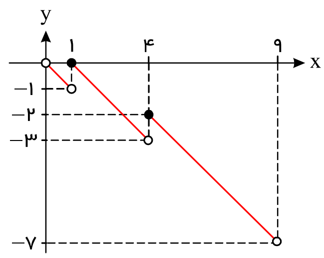
$x_۴, x_۶ \rightarrow$ دارای خط مماس افقی $\Rightarrow$ f' در آن‌ها برابر صفر است.

$x_۸ \rightarrow$ دارای خط مماس قائم $\Rightarrow$ مشتق‌ناپذیر

ضمناً دقت کنید که $x_۵$ متعلق به دامنه نیست و بحرانی نمی‌باشد. پس تعداد نقاط بحرانی همان ۷ نقطه است:

$x_۸, x_۷, x_۶, x_۴, x_۳, x_۲, x_۱$

۱۴ - گزینه ۱ تابع داده‌شده را رسم می‌کنیم و باید آن را به تابع چند ضابطه‌ای تبدیل کنیم.



$$۰ < x < ۱ \rightarrow ۰ < \sqrt{x} < ۱ \xrightarrow{[\sqrt{x}]=۰} y = -x$$
$$۱ \leq x < ۴ \rightarrow ۱ \leq \sqrt{x} < ۲ \xrightarrow{[\sqrt{x}]=۱} y = ۱ - x$$
$$۴ \leq x < ۹ \rightarrow ۲ \leq \sqrt{x} < ۳ \xrightarrow{[\sqrt{x}]=۲} y = ۲ - x$$

نمودار دارای ۲ ماکسیمم نسبی در $x = ۴$ و $x = ۱$ بوده و فاقد مینیمم نسبی است.

۱۵ - گزینه ۲ از تابع مشتق می‌گیریم و توجه کنید که مخرج ریشهٔ حقیقی ندارد.

$$f(x) = \frac{۲x^۲ - ۳x}{x^۲ + x + ۳} \rightarrow f'(x) = \frac{(۴x - ۳)(x^۲ + x + ۳) - (۲x + ۱)(۲x^۲ - ۳x)}{(x^۲ + x + ۳)^۲}$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{۴x^۳ + ۴x^۲ + ۱۲x - ۳x^۲ - ۳x - ۹ - ۴x^۳ + ۶x^۲ - ۲x^۲ + ۳x}{(x^۲ + x + ۳)^۲}$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{۵x^۲ + ۱۲x - ۹}{\underbrace{(x^۲ + x + ۳)^۲}_{+}} > ۰ \rightarrow ۵x^۲ + ۱۲x - ۹ > ۰$$

$\rightarrow ۵x^۲ + ۱۲x - ۹ = ۰ \rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = ۱۴۴ + ۱۸۰ = ۳۲۴$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-۱۲+۱۸}{۱۰} = \dfrac{۳}{۵} \\ x = \dfrac{-۱۲-۱۸}{۱۰} = -۳ \end{cases} \rightarrow$$

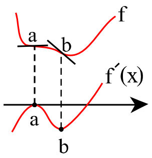
x	$-\infty$		-۳		$\frac{۳}{۵}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

تابع در فواصل $(-\infty, -۳) \cup (\frac{۳}{۵}, +\infty)$ صعودی اکید است که با مقایسهٔ آن با $(a, +\infty)$ حداقل مقدار a برابر $\frac{۳}{۵}$ است.

۱۶ - گزینه ۴ به کمک نمودار تابع $f(x)$، نمودار $f'(x)$ را رسم می‌کنیم. لذا خواهیم داشت:

مشاهده می‌شود نقطه a ماکزیمم نسبی صفر تابع $f'(x)$ و همچنین نقطه b مینیمم نسبی منحنی تابع $f'(x)$ می‌باشد.

توجه: در هر فاصله‌ای که تقعر تابع $f(x)$ رو به بالا باشد، منحنی f' در آن بازه صعودی رسم می‌شود و در هر فاصله‌ای که تقعر تابع f نزولی باشد، منحنی f' نزولی رسم می‌شود.



۱۷ - گزینه ۲

همانگونه که می‌دانیم در توابع هموگرافیک به فرم $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ مرکز تقارن، محل برخورد مجانب های قائم و افقی می‌باشد. در نتیجه داریم:

$$f(x) = \frac{(۲a-۱)x+۳}{۲x+a} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{۲a-۱}{۲} & \text{مجانب افقی} \\ x = -\frac{a}{۲} & \text{مجانب قائم} \end{cases}$$

مختصات مرکز تقارن را داخل خط محور تقارن قرار می‌دهیم.

$$\Rightarrow \text{مرکز تقارن } O(-\frac{a}{۲}, \frac{۲a-۱}{۲}) \xrightarrow{y=x+۴} \frac{۲a-۱}{۲} = \frac{-a}{۲} + ۴ \Rightarrow \frac{۲a-۱}{۲} = \frac{-a+۸}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲a - ۱ = -a + ۸ \Rightarrow ۳a = ۹ \Rightarrow a = ۳ \Rightarrow O(-\frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۲})$$

از آنجا که دو محور تقارن توابع هموگرافیک بر یکدیگر عمودند لذا شیب دیگری (-۱) می‌باشد. لذا داریم:

$$y - \frac{۵}{۲} = -۱(x + \frac{۳}{۲}) \Rightarrow y = -x + ۱ \Rightarrow \text{عرض از مبداء } (x = ۰) \Rightarrow y = ۱$$

۱۸ - گزینه ۳ $f''(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم. لذا داریم:

$$f(x) = \begin{cases} x^۳ - ۳x^۲ & x \geq -۱ \\ -۱۳ - \frac{۹}{x} & x < -۱ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۳x^۲ - ۶x & x \geq -۱ \\ \frac{۹}{x^۲} & x < -۱ \end{cases} \qquad f'_{+}(-۱) = f'_{-}(-۱) = ۹$$

$$f''(x) = \begin{cases} ۶x - ۶ & x > -۱ \\ \frac{-۱۸}{x^۳} & x < -۱ \end{cases} \rightarrow f''(x) = ۰ \rightarrow ۶x - ۶ = ۰ \rightarrow x = ۱$$

x		-۱		۱	
f´´(x)	$+$	‖	$-$	•	$+$
f(x)	$\cup$		$\cap$		$\cup$

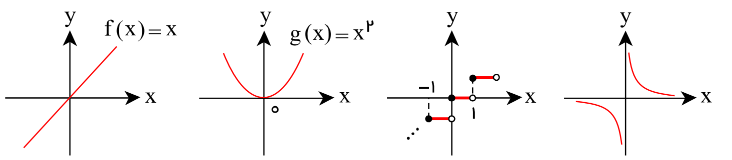
از طرفی در $x = -۱$، مشتق دوم وجود ندارد زیرا:

$f''_{+}(-۱) \neq f''_{-}(-۱)$

حال با استفاده از جدول تعیین علامت $f''(x)$ مشاهده می شود تقعر تابع $f(x)$ در نقاط $x = -۱$ و $x = ۱$ تغییر می کند و در هر نقطه خط مماس واحد وجود دارد، لذا دو نقطه عطف دارد.

۱۹ - گزینه ۴ تابع $y = -\cos x + \tan x$ به خاطر $\tan x$ یک عبارت کسری می‌باشد دارای مجانب قائم است بنابراین این منحنی غیر یکنوا محسوب می‌شود.

۲۰ - گزینه ۴ به نمودارهای زیر توجه کنید:



توجه: اگر تابعی در درون دامنه‌ی خودش مجانب قائم داشته باشد غیر یکنوا محسوب می‌شود.

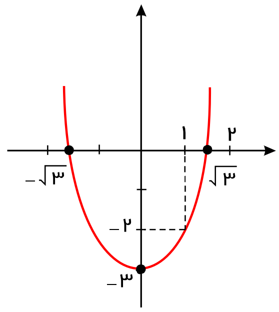
۲۱ - گزینه ۲ چون تابع همواره پیوسته است بنابراین در هر بازه‌ای که $f' \leq ۰$ باشد اکیداً نزولی است.

$$y' = \frac{\cos x(۲ + \cos x) - (-\sin x)(\sin x)}{(۲ + \cos x)^۲} = \frac{۲\cos x + \cos^۲ x + \sin^۲ x}{(۲ + \cos x)^۲} = \frac{۲\cos x + ۱}{(۲\cos x + ۱)^۲}$$

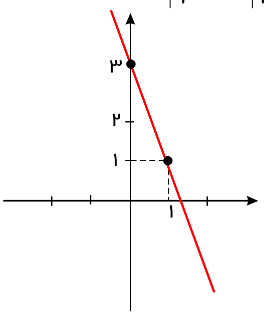
y نزولی اکید $\Rightarrow y' \le ۰ \Rightarrow ۲\cos x + ۱ \le ۰ \Rightarrow \cos x \le \frac{-۱}{۲} \Rightarrow \pi - \frac{\pi}{۳} \le x \le \pi + \frac{\pi}{۳}$

۲۲ – گزینه ۲ برای حل این تست از رسم شکل کمک می‌گیریم.

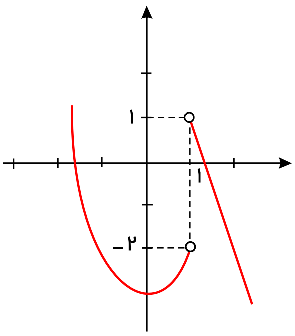
$y = x^۲ - ۳$



$y = ۳ - ۲x \to A\left|\begin{matrix} ۱ \\ ۱ \end{matrix}\right. \ , \ B\left|\begin{matrix} ۰ \\ ۳ \end{matrix}\right.$



از ترکیب این دو شکل، شکل زیر حاصل می‌گردد.



دقت کنید اگر $a \ge ۱$ باشد در این صورت $x = ۱$ طول Max نسبی است و اگر $a < -۲$ باشد در این صورت $x = ۱$ طول Min نسبی است بنابراین a نمی‌تواند سه مقدار صحیح ۲− و ۱− و ۰ را قبول کند.

۲۳ – گزینه ۲ در ابتدا دامنه‌ی تعریف تابع داده شده را بدست می‌آوریم و سپس مشتق دوم را تعیین علامت می‌کنیم.

$$y = (x^۲ + \frac{۵}{۳})x^{\frac{۱}{۴}} = (x^۲ + \frac{۵}{۳})\sqrt[۴]{x} \to D_f = [۰, +\infty)$$

$$y = (x^۲ + \frac{۵}{۳})x^{\frac{۱}{۴}} = x^{\frac{۹}{۴}} + \frac{۵}{۳}x^{\frac{۱}{۴}}$$

$$\to y' = \frac{۹}{۴}x^{\frac{۵}{۴}} + \frac{۵}{۱۲}x^{-\frac{۳}{۴}} \to y'' = \frac{۴۵}{۱۶}x^{\frac{۱}{۴}} - \frac{۱۵}{۴۸}x^{-\frac{۷}{۴}} = \frac{۴۵}{۱۶}x^{\frac{۱}{۴}} - \frac{۵}{۱۶}x^{-\frac{۷}{۴}}$$

$$\to y'' = \frac{۵}{۱۶}(۹x^{\frac{۱}{۴}} - x^{-\frac{۷}{۴}}) = \frac{۵}{۱۶}(۹\sqrt[۴]{x} - \frac{۱}{\underbrace{\sqrt[۴]{x^۷}}_{x^۴ \cdot x^۳}}) = \frac{۵}{۱۶}(۹\sqrt[۴]{x} - \frac{۱}{x\sqrt[۴]{x^۳}})$$

$$y'' = \frac{۵}{۱۶}(\frac{۹x^۲ - ۱}{x\sqrt[۴]{x^۳}}) \to \begin{cases} \text{صورت} = ۰ \to \begin{cases} x = \frac{۱}{۳} \\ x = -\frac{۱}{۳} \quad \text{غ ق ق (در دامنه قرار ندارد)} \end{cases} \\ \text{مخرج} = ۰ \to x = ۰ \end{cases}$$

$\to$

x	۰		$\frac{۱}{۳}$		$+\infty$
y″	▨	$-$	۰	$+$	
y	▨	$\cap$		$\cup$	

$\to$ جهت تقعر تابع در یک نقطه تغییر می کند

۲۴ – گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\sin x + \cos x = \sqrt{۲}\sin(x + \frac{\pi}{۴})}$

از تابع داده شده دو بار مشتق گرفته و علامت آن را مشخص می‌کنیم:

$f(x) = x^۲ + \sqrt{۲}(\sin x + \cos x) \to f'(x) = ۲x + \sqrt{۲}(\cos x - \sin x)$

$\to f''(x) = ۲ + \sqrt{۲}(-\sin x - \cos x) = ۲ - \sqrt{۲}(\sin x + \cos x)$

$\to f''(x) = ۲ - \sqrt{۲}(\sqrt{۲}\sin(x + \frac{\pi}{۴})) = ۲ - ۲\sin(x + \frac{\pi}{۴})$

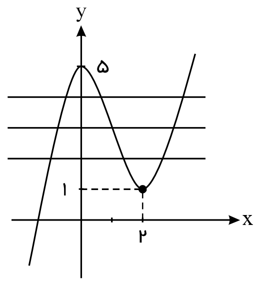
$\to f''(x) = ۲(\underbrace{۱ - \sin(x + \frac{\pi}{۴})}_{\text{نامنفی}}) \to f''(x) \geq ۰$

بنابراین جهت تقعر تابع همواره رو به بالا است.

۲۵ - گزینه ۳ خط $y = k$ باید در محدودهٔ بین ماکسیمم و مینیمم نسبی قرار گیرد. پس لازم است عرض نقاط اکسترمم $f(x)$ را هم به‌دست بیاوریم. $f(x)$ مشتق‌پذیر است. مشتق تابع $f(x)$ را به‌دست آورده و مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$f'(x) = ۳x^۲ - ۶x = ۰ \Rightarrow ۳x(x - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۲ \end{cases}$

حال عرض نقاط اکسترمم را با جایگذاری در معادلهٔ اصلی $f(x)$ به‌دست می‌آوریم:

$f(۰) = ۵, f(۲) = ۱ \xrightarrow{\text{نمودار}}$ 

همانطور که می‌بینیم به‌ازای سه مقدار صحیح $(k = ۲, ۳, ۴)$، معادلهٔ $f(x) = k$ دارای سه ریشهٔ حقیقی متمایز است.

۲۶ - گزینه ۴ تابع مشتق ریشه $x = ۰$ دارد زیرا: $y' = ۳(m + ۱)x^۲ + ۲(۲m - ۱)x$

این تابع وقتی یکنوا است که دارای ریشه مضاعف $x = ۰$ باشد یعنی $۲m - ۱ = ۰$ ولی در حالت $m = \frac{۱}{۲}$ علامت مشتق همواره مثبت است و تابع صعودی است پس به ازای هیچ مقدار m.

۲۷ - گزینه ۲ نقطه‌ی M به مختصات $M(x, (x - ۴)^۲)$ را در نظر می‌گیریم. پس باتوجه به شکل، شعاع قاعده‌ی x و ارتفاع $(x - ۴)^۲$ است.

حجم استوانه $V = \pi r^۲ h \Rightarrow V(x) = \pi x^۲ (۴ - x)^۲$

$V(x) = \pi(۴x - x^۲)^۲ \Rightarrow V'(x) = ۲\pi(۴x - x^۲)(۴ - ۲x) = ۰$

جواب‌های $V'(x) = ۰$ برابر ۰ و ۴ و ۲ است که ۰ و ۴ قابل قبول نیست. (در این حالت حجم صفر می‌شود)

$V(x) = \pi x^۲(۴ - x)^۲ \xrightarrow{x=۲} V(۲) = ۱۶\pi$

۲۸ - گزینه ۱ چون f صعودی است، پس $f'(x) \geq ۰$.

همچنین:

$g'(x) = f'(x) - ۲f'(x)f(x) + ۳f^۲(x)f'(x)$

$g'(x) = f'(x)(۱ - ۲f(x) + ۳f^۲(x))$

با توجه به این‌که عبارت $۱ - ۲f(x) + ۳f^۲(x)$ همواره مثبت است. پس $g'(x) \geq ۰$ بنابراین تابع g صعودی است.

توجه: در تابع درجه دوم $y = ax^۲ + bx + c$ اگر $\Delta < ۰$ و $a > ۰$ آنگاه تابع y همواره مثبت است.

۲۹ - گزینه ۱ از دو طرف تساوی داده‌شده مشتق می‌گیریم.

$$h'(x) = f'(x) - ۲f(x)\cdot f'(x) + ۳f^{۲}(x)\cdot f'(x)$$
$$= f'(x)\Big(۱ - ۲f(x) + ۳f^{۲}(x)\Big)$$
$$= f'(x)\Big(۱ + ۳(f^{۲}(x) - \frac{۲}{۳}f(x))\Big)$$
$$= f'(x)\Big(۱ + ۳\Big((f(x) - \frac{۱}{۳})^{۲} - \frac{۱}{۹}\Big)\Big)$$
$$= f'(x)\Big(۱ + ۳\Big(f(x) - \frac{۱}{۳}\Big)^{۲} - \frac{۱}{۳}\Big)$$
$$= f'(x)\Big(\underbrace{۳(f(x) - \frac{۱}{۳})^{۲} + \frac{۲}{۳}}_{+}\Big)$$

بنابراین $f'(x)$ و $h'(x)$ همواره هم‌علامت هستند پس اگر f صعودی باشد $h(x)$ نیز صعودی است.

۳۰ – گزینه ۳ ابتدا دامنهٔ تعریف تابع داده‌شده را به‌دست می‌آوریم.

$$xf(x) \geq ۰ \xrightarrow[\text{را انتخاب می‌کنیم.}]{\text{جاهایی که } x \text{ و } y \text{ هم‌علامتند}} [-۱,۰] \cup [۲,۳]$$

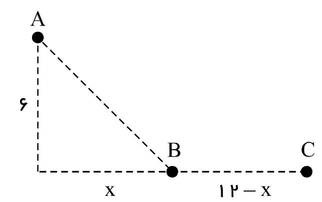
اکنون از تابع داده‌شده مشتق گرفته و بزرگ‌تر از صفر قرار می‌دهیم.

$$y' = \frac{f(x) + xf'(x)}{\underbrace{۲\sqrt{xf(x)}}_{+}} > ۰$$

در بازهٔ $(۲,۳)$، $f(x)$ مثبت، x مثبت، $f'(x)$ مثبت و درنتیجه $f(x) + xf'(x) > ۰$ است.

در بازهٔ $(-۱,۰)$، $f(x)$ منفی، x منفی، $f'(x)$ منفی و درنتیجه علامت $f(x) + xf'(x)$ مشخص نیست.

۳۱ – گزینه ۲ ابتدا معادلهٔ انرژی مصرفی را نوشته و سپس نقطهٔ مینیمم نسبی آن را به‌دست می‌آوریم:



$$\text{انرژی صرف‌شده در مسیر } ABC : f(x) = \sqrt{۳۶ + x^{۲}} \times ۱۰\sqrt{۵} + (۱۲ - x) \times ۱۰$$

$$f'(x) = \frac{۲x}{۲\sqrt{۳۶ + x^{۲}}} \times ۱۰\sqrt{۵} + (-۱۰) = ۰$$

$$\to \frac{\sqrt{۵}x}{\sqrt{۳۶ + x^{۲}}} = ۱ \Rightarrow ۳۶ + x^{۲} = ۵x^{۲} \Rightarrow ۴x^{۲} = ۳۶ \Rightarrow x = \pm ۳$$

درنتیجه:

$$\Rightarrow x \in [۰,۱۲] \Rightarrow x = ۳$$

$$\text{پس} : BC = ۱۲ - ۳ = ۹$$

۳۲ – گزینه ۲ منحنی از $A\Big|\begin{matrix}۰\\-۱\end{matrix}$ عبور می‌کند پس:

$$A\Big|\begin{matrix}۰\\-۱\end{matrix} \xrightarrow{\text{تابع}} -۱ = a + ۰ \Rightarrow a = -۱$$

$۸ = \frac{۲\pi}{|b\pi|} \Rightarrow |b\pi| = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۴} \Rightarrow b = \pm\frac{۱}{۴}$ باتوجه به شکل دوره تناوب عدد ۸ است.

اگر $b = \frac{۱}{۴}$ باشد تابع از نقطهٔ $(۶,۰)$ نمی‌گذرد ولی اگر $b = \frac{-۱}{۴}$ باشد از این نقطه می‌گذرد.

$$b = \frac{-۱}{۴} \Rightarrow y = -۱ + \sin(\frac{-\pi x}{۴}) \xrightarrow{x=۶} y = -۱ + \sin(-\frac{۳\pi}{۲}) = -۱ - \sin\frac{۳\pi}{۲} = -۱ - (-۱) = ۰$$

حالا که مطمئن شدیم $b = \frac{-۱}{۴}$ است مقدار تابع را در $x = \frac{۲۶}{۳}$ به دست می‌آوریم:

$$-۱ + \sin(\frac{-۲۶\pi}{۱۲}) = -۱ + \sin(\frac{-۲۴\pi}{۱۲} - \frac{۲\pi}{۱۲}) = -۱ - \sin(\frac{\pi}{۶}) = -۱ - \frac{۱}{۲} = -\frac{۳}{۲}$$

۳۳ – گزینه ۴ تابع را به صورت دو ضابطه‌ای نوشته مشتق دوم را تعیین می‌کنیم.

$$y=\begin{cases}x^3+2x & x>0\\ -x^3-2x & x\le 0\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}3x^2+2 & x>0\\ -3x^2-2 & x\le 0\end{cases}\Rightarrow y''=\begin{cases}6x & x>0\\ -6x & x\le 0\end{cases}$$

x		0	
y''	$+$	0	$+$

مشتق دوم در نقطه‌ی $x=0$ برابر صفر شده ولی تغییر علامت نمی‌دهد پس فاقد نقطه عطف است.

۳۴ – گزینه ۲ توجه: در تابع هموگرافیک اگر نسبت ضرایب برابر باشند منحنی به یک خط افقی تبدیل می‌شود که معادله‌ی آن $y=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ است.

اگر نمودار تابع هموگرافیک تبدیل به خط شود آنگاه $\frac{1}{a}=\frac{2a}{1}$ در نتیجه $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ می‌باشد و $y=\dfrac{\sqrt{2}x+1}{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}$ معادله‌ی منحنی است که تبدیل به خط افقی $y=\sqrt{2}$ می‌باشد و فاصله‌ی این خط تا مبدأ برابر $\sqrt{2}$ است.

۳۵ – گزینه ۲ مشتق مرتبه اول تابع منفی ولی مشتق مرتبه دوم آن مثبت است.

$$y=\frac{(x-2)^2+4}{x-2}=x-2+\frac{4}{x-2}\Rightarrow y'=1-\frac{4}{(x-2)^2}<0\rightarrow\frac{4}{(x-2)^2}>1$$

$$\Rightarrow\frac{2}{|x-2|}>1\rightarrow|x-2|<2\rightarrow 0<x<4$$

$$\rightarrow y''=\frac{8}{(x-2)^3}>0\Rightarrow(x-2)^3>0\Rightarrow x>2$$

جواب مشترک $x>2\ ,\ 0<x<4$ به‌صورت بازه $(2,4)$ است.

۳۶ – گزینه ۴ در نقاط بحرانی مشتق تابع صفر است یا مشتق وجود ندارد به شرط آن‌که این نقاط در دامنه‌ی تابع باشند.

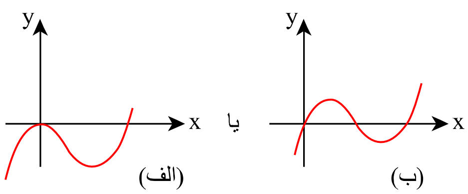
$$D_f=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$$

$$y'=\sqrt{x^2-4}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}\Rightarrow y'=\frac{2x^2-4}{\sqrt{x^2-4}}\Rightarrow\begin{cases}2x^2-4=0\rightarrow x=\pm\sqrt{2}\\ x^2-4=0\rightarrow x=\pm 2\end{cases}$$

ولی با‌توجه به دامنه نقاط $x=-2,2$ نقاط داخلی دامنه نبوده و نقطه بحرانی نیستند و $x=\pm\sqrt{2}$ در دامنه قرار ندارد بنابراین این تابع فاقد نقطه‌ی بحرانی است.

۳۷ – گزینه ۲ چون ضریب x^3 مثبت است، پس نمودار قطعاً از نواحی اول و سوم دستگاه مختصات عبور می‌کند.

$x=0$ یکی از ریشه‌های تابع است. برای اینکه نمودار فقط از ناحیه دوم عبور نکند، شکل آن باید به مانند یکی از حالت‌های زیر باشد:



$$y=0\Rightarrow x(\underbrace{x^2-ax+(a-1)}_{y_1})=0$$

در حالت (الف) $x=0$ باید ریشه مضاعف تابع باشد، یعنی باید $x=0$ ریشه y_1 نیز باشد. پس:

$$a-1=0\Rightarrow a=1\quad(1)$$

$$y=x(x^2-x)\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=1\end{cases}$$

در حالت (ب)، y_1 دو ریشه مثبت دارد. پس:

$$\begin{cases}\Delta>0\Rightarrow a^2-4(a-1)>0\Rightarrow a^2-4a+4>0\Rightarrow(a-2)^2>0\\ \Rightarrow a\neq 2\\ \text{ضرب ریشه‌ها}:\ \frac{c}{a}=a-1>0\Rightarrow a>1\quad(3)\\ \text{مجموع ریشه‌ها}:\ -\frac{b}{2a}=a>0\Rightarrow a>0\quad(4)\end{cases}$$

اجتماع (۳)،(۲)،(۱) و (۴) نتیجه می‌شود. $[1,+\infty)-\{2\}$

۳۸ – گزینه ۲ باتوجه به شکل، انتهای بازه مجانب قائم است یعنی $x=\frac{5\pi}{4}$ ریشه مخرج کسر می‌باشد بنابراین:

$$x=\frac{5\pi}{4}\xrightarrow{\text{مخرج}}\tan\frac{5\pi}{4}+b=0\rightarrow 1+b=0\rightarrow b=-1$$

$$f(x)=\frac{a\cdot\tan x}{\tan x-1}$$

و باز هم باتوجه به شکل نقطه $(\frac{\pi}{2},2)$ روی منحنی یک حفره است یعنی هرگاه x به $\frac{\pi}{2}$ میل کند جواب حد ۲ می‌شود.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{a\cdot\tan x}{\tan x-1}=\frac{\infty}{\infty}\ \text{مبهم}\xrightarrow{\text{پرتوان}}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{a\cdot\cancel{\tan x}}{\cancel{\tan x}}=a\Rightarrow a=2$$

$$a+b=2+(-1)=1$$

۳۹ - گزینه ۱ چون شکل تابع اطراف مجانب قائم هر دو به $+\infty$ میل می‌کند، پس باید مخرج ریشه مضاعف داشته باشد.

$$\Delta_{\text{مخرج}} = ۰ \Rightarrow b^۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow b = \pm ۲$$

از طرفی طول مجانب مثبت است، پس $b = +۲$ نمی‌تواند باشد و $b = -۲$ باید باشد. چون مخرج باید $(x-۱)^۲$ باشد.

از طرفی باتوجه به نمودار و مماس بودن نمودار بر محور xها صورت ریشه مضاعف دارد.

$$\Delta_{\text{صورت}} = ۰ \Rightarrow a^۲ - ۱۶ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۴$$

چون ریشه صورت منفی است. پس $a = ۴$ قابل قبول است. چون صورت باید $(x+۲)^۲$ باشد.

پس: $a + b = ۴ - ۲ = ۲$

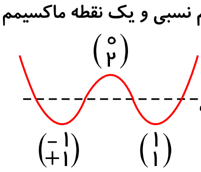
۴۰ - گزینه ۳ ابتدا، شکل تقریبی نمودار $f(x) = x^۴ - ۲x^۲ + ۲$ را ترسیم می‌کنیم.

$$f'(x) = ۴x^۳ - ۴x = ۰ \to ۴x(x^۲ - ۱) = ۰ \to \begin{matrix} x = ۰ \\ x = \pm ۱ \end{matrix}$$

x		-۱		۰		$+۱$	
$۴x$	$-$		$-$	۰	$+$		$+$
$x^۲-۱$	$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$
f'	$-$		$+$		$-$		$+$
f	$\searrow$	۱	$\nearrow$	۲	$\searrow$	۱	$\nearrow$
		Min		Max		Min	

تابع f، دو نقطه مینیمم نسبی و یک نقطه ماکسیمم نسبی دارد و باتوجه به اینکه وقتی $y \to +\infty,\ x \to \pm\infty$

پس شکل تابع بصورت



شرط اینکه خط $y = k$ نمودار $f(x)$ را در ۴ نقطه قطع کند آنست که $f(\pm۱) < k < f(۰)$

پس $۱ < k < ۲$

۴۱ - گزینه ۳ می‌دانیم که دامنه تابع معکوس با برد تابع اصلی برابر است $\left(D_{f^{-۱}} = R_f\right)$ برای محاسبه برد تابع اصلی، ضمن محاسبه نقاط بحرانی در دامنه تابع، مقادیر اکسترمم مطلق تابع را می‌یابیم.

$$f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{۹ - x} \to D_f = \left.\begin{matrix} x \geq ۰ \\ ۹ - x \geq ۰ \quad \to x \leq ۹ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = [۰, ۹]$$

$$f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} - \frac{-۱}{۲\sqrt{۹ - x}} = \frac{\sqrt{۹ - x} + \sqrt{x}}{۲\sqrt{x}\ \sqrt{۹ - x}}$$

صورت کسر ریشه ندارد در نتیجه نقاط بحرانی همان $x = ۰\ ,\ x = ۹$ است

$$f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{۹ - x} \to \begin{cases} f(۰) = -۳ \\ f(۹) = ۳ \end{cases} \to R_f = [-۳, ۳] = D_{f^{-۱}}$$

۴۲ - گزینه ۱ ابتدا باید عبارت را ساده کنیم.

$$f(x) = \sin^۲ x(۲\sin x \cos x) \Rightarrow f(x) = ۲\sin^۳ x \cos x$$
$$f'(x) = ۶\sin^۲ x\cos^۲ x - ۲\sin^۴ x = ۲\sin^۲ x(۳\cos^۲ x - \sin^۲ x)$$
$$= ۲\sin^۲ x(۳\cos^۲ x - (۱ - \cos^۲ x))$$
$$\Rightarrow f'(x) = ۲\sin^۲ x(۴\cos^۲ x - ۱) \Rightarrow f'(\frac{\pi}{۳}) = ۰$$

دقت کنید چون $\cos^۲ x$ در ناحیه‌ی اول نزولی است، پس علامت $۴\cos^۲ x - ۱$ و در نتیجه علامت f' در $x = \frac{\pi}{۳}$ از مثبت به منفی تغییر می‌کند، پس $x = \frac{\pi}{۳}$ ماکزیمم است.

x	$\frac{\pi}{۳}^-$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۳}^+$
$۴\cos^۲ x - ۱$	$+$	۰	$-$
f'	$+$	۰	$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$

۴۳ - گزینه ۴ برای محاسبه‌ی ماکزیمم و مینیمم مطلق یک تابع باید بازه وجود داشته باشد اگر بازه نداشته باشیم باید از دامنه تابع استفاده کنیم.

عرض‌های نقاط بحرانی را محاسبه می‌کنیم و سپس با مقادیر تابع در ابتدا و انتهای دامنه مقایسه می‌کنیم:

$$۴ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \leq ۴ \Rightarrow -۲ \leq x \leq ۲ \Rightarrow D_y = [-۲, ۲]$$

$$y' = \sqrt{۴ - x^۲} + \frac{-x^۲}{\sqrt{۴ - x^۲}} = ۰ \Rightarrow y' = \frac{۴ - x^۲ + (-x^۲)}{\sqrt{۴ - x^۲}} = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۲}$$

$$\begin{cases} x = ۲ \Rightarrow y = ۰ \\ x = -۲ \Rightarrow y = ۰ \\ x = \sqrt{۲} \Rightarrow y = ۲ \\ x = -\sqrt{۲} \Rightarrow y = -۲ \end{cases}$$

قدرمطلق تفاضل بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار $= |۲ - (-۲)| = ۴$

۴۴ - گزینه ۴ تابع را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\begin{cases}۲x-x^۲+۴\ ;\ x\geq ۲ \text{ یا } x\leq -۲\\ ۲x+x^۲-۴\ ;\ -۲<x<۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۲-۲x\ ;\ x>۲ \text{ یا } x<-۲\\ ۲+۲x\ ;\ -۲<x<۲\end{cases}$$

در نقاط $x=۲$ و $x=-۲$ مشتق چپ و راست تابع برابر نیستند، پس مشتق وجود ندارد و این نقاط بحرانی‌اند. همچنین داریم:

$$f'(x)=\circ\Rightarrow\begin{cases}۲-۲x=\circ\Rightarrow x=۱ \text{ غ.ق.ق}\\ ۲+۲x=\circ\Rightarrow x=-۱\end{cases}$$

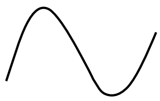
پس نقاط بحرانی تابع به صورت $(۲,۴)$, $(-۲,-۴)$, $(-۱,-۵)$ خواهد بود که حاصل‌ضرب عرض آن‌ها ۸۰ است.

۴۵ - گزینه ۲

$$f(x)=\frac{x^۳}{۳}+x^۲+mx\Rightarrow f'(x)=x^۲+۲x+m$$

برای این که تابع درجه سوم f دارای اکسترمم نسبی باشد، لازم است که f' دو ریشه‌ی متمایز داشته باشد، پس باید دلتای f' مثبت باشد:

$$\Delta_{f'}=۴-۴m>\circ\Rightarrow m<۱\quad(۱)$$

از طرفی چون ضریب $x^۳$ مثبت است پس شکل نمودار به صورت  است و در نتیجه ریشه بزرگ‌تر f' یعنی $-۱+\sqrt{۱-m}$ طول نقطه مینیمم نسبی تابع است. پس:

$$\circ<-۱+\sqrt{۱-m}<۱\Rightarrow ۱<\sqrt{۱-m}<۲\Rightarrow ۱<۱-m<۴$$
$$\Rightarrow\circ<-m<۳\Rightarrow -۳<m<\circ\quad(۲)$$

باتوجه به (۱) و (۲)، به ازای دو مقدار صحیح m، مینیمم نسبی تابع f در بازه‌ی $(\circ,۱)$ قرار می‌گیرد.

۴۶ - گزینه ۳ باتوجه به این که $f(\circ)=\circ$ است. مقدار b برابر صفر به دست می‌آید. از طرفی چون مجانب قائم دارد پس $x=\frac{\pi}{۴}$ ریشه مخرج است، پس:

$$c\tan(\frac{\pi}{۴})+۱=\circ\Rightarrow c=-۱\xrightarrow{\text{بازنویسی تابع}}f(x)=\frac{a\cdot\tan^۲x}{۱-\tan x}$$

هم‌چنین نمودار تابع بر خط $y=۴$ مماس است، یعنی:

$$۴=\frac{a\tan^۲x}{۱-\tan x}\Rightarrow a\tan^۲x+۴\tan x-۴=\circ\rightarrow \text{این معادله باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد}$$
$$\xrightarrow{\Delta=\circ}۱۶+۱۶a=\circ\Rightarrow a=-۱$$

در نتیجه $a+c=-۲$

۴۷ - گزینه ۱ ابتدا نقطه‌ی $x=\circ$ را بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\circ}\frac{\sqrt[۳]{x^۲-۲x}-\circ}{x-\circ}=\lim_{x\to\circ}\frac{\sqrt[۳]{\frac{۱}{x}-\frac{۲}{x^۲}}}{x}=\lim_{x\to\circ}\sqrt[۳]{\frac{x-۲}{x^۲}}=\sqrt[۳]{\frac{-۲}{\circ^+}}=-\infty$$

پس تابع در اطراف $x=\circ$ مماس قائم دارد و نزولی $(y'<\circ)$ است.

در $x=۲$ داریم:

$$\lim_{x\to۲}\frac{\sqrt[۳]{x^۲-۲x}-\circ}{x-۲}=\lim_{x\to۲}\sqrt[۳]{\frac{x(x-۲)}{(x-۲)^۳}}=\lim_{x\to۲}\sqrt[۳]{\frac{x}{(x-۲)^۲}}=\sqrt{\frac{۲}{\circ^+}}=+\infty$$

تابع در اطراف $x=۲$ مماس قائم دارد و صعودی است. پس گزینه‌ی «۱» صحیح است.

۴۸ - گزینه ۱ $x=۲$ ریشه‌ی مخرج کسر است زیرا مطابق شکل مجانب قائم است

$$۴-۲b^۲+۲b=\circ\rightarrow(b-۲)(b+۱)=\circ\rightarrow\begin{cases}b=۲\\ b=-۱\end{cases}$$

تابع در $x=\circ$ عطف افقی دارد. پس $x=\circ$ ریشه‌ی مرتبه‌ی فرد صورت کسر است. پس $n\geq ۳$.

در $x=\circ$ بنابه قانون کم‌توان $f(x)\simeq\frac{x^n}{۲b}$ و چون در $x=\circ$ تابع نزولی است لذا $b<\circ$ پس $b=-۱$

$$\begin{matrix}n\geq ۳\\ b=-۱\end{matrix}\rightarrow nb\leq -۳\ \rightarrow\ \max(nb)=-۳$$

۴۹ - گزینه ۱ طبق شکل داده شده مجانب‌های قائم عبارتند از $x=\circ$ و $x=۳$ بنابراین $x=۳$ ریشه‌ی مخرج تابع داده شده است.

$$(۳)^۲+c(۳)=\circ\Rightarrow c=-۳$$

از طرفی مجانب افقی تابع خط $y=-۱$ است. بنابراین:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^۲}{x^۲}\Rightarrow a=-۱$$

در ضمن نمودار تابع بر محور xها مماس است پس $ax^۲+bx-۴=\circ$ دارای ریشه‌ی مضاعف است، یعنی $\Delta=\circ$ بنابراین:

$b^2 - 4(-1)(-4) = 0 \Rightarrow b = \pm 4$

اگر $b = 4$ باشد، آن‌گاه $-x^2 + 4x - 4 = 0$ در نتیجه $x = 2$ که قابل قبول است. پس:

$a + b + c = (-1) + (4) + (-3) = 0$

۵۰ ـ گزینه ۲ باید مشتق اول مثبت و مشتق دوم آن منفی باشد.

با مشتق‌گیری از تابع $y = x^4 - 6x^2 + 8x + 1$ داریم:

$y' = 4x^3 - 12x + 8 = 0 \Rightarrow 4x^3 - 12x + 8 = 0 \Rightarrow 4(x^3 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$

$x = 1$ در معادله‌ی فوق صدق می‌کند، بنابراین تابع مشتق ریشه‌ای برابر یک دارد. حال با تقسیم عبارت تابع مشتق بر $x - 1$ داریم:

$x^3 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow (x-1)^2(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

توجه: در اطراف ریشه‌ی مضاعف، علامت عوض نمی‌شود.

x		-2		مضاعف ↑ 1	
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	↘		↗		↗

$\rightarrow (-2, +\infty) \rightarrow$ صعودی (I)

$y'' = 12x^2 - 12 = 0 \Rightarrow 12(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

x		-1		1	
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\cup$		$\cap$		$\cup$

$\rightarrow (-1, 1) \rightarrow$ تقعر رو به پائین (II)

$I \cap II \Rightarrow (-1, 1)$

تابع در بازه‌ی $(-1, 1)$ صعودی و تقعر آن رو به پایین است. با توجه به گزینه‌ها بازه‌ی $(0, 1)$ صحیح می‌باشد.

۵۱ ـ گزینه ۲ مشتق این تابع $y' = \frac{x^2}{2} - 2mx + 1$ است و برای اینکه فاقد اکسترمم باشد باید این معادله فاقد ریشه‌ی ساده باشد یعنی $\Delta \le 0$ باشد.

$\Delta = (-2m)^2 - 4(\frac{1}{2}) \le 0 \rightarrow m^2 \le \frac{1}{2} \Rightarrow \quad \frac{-1}{\sqrt{2}} \le m \le \frac{1}{\sqrt{2}}$

توجه: طول نقطه‌ی عطف (ریشه‌ی ساده‌ی مشتق دوم) در تابع $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ برابر $-\frac{b}{3a}$ است.

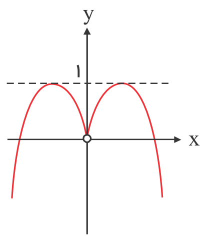
$y = \frac{x^3}{6} - mx^2 + x$

طول عطف: $x = -\frac{b}{3a} = -\frac{-m}{3(\frac{1}{6})} = 2m$

$\frac{-1}{\sqrt{2}} \le m \le \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow -\frac{2}{\sqrt{2}} \le 2m \le \frac{2}{\sqrt{2}} \rightarrow$ کم‌ترین مقدار $= \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

۵۲ ـ گزینه ۳ نمودار تابع $y = 2|x| - x^2$ به شکل زیر است. واضح است که اگر $k = f(0)$ در بازه‌ی $(0, 1)$ باشد، تابع در $x = 0$ دارای ماکزیمم نسبی است ولی ماکزیمم مطلق ندارد.

توجه کنید که اگر $k \ge 1$ باشد، آن‌گاه تابع در $x = 0$ هم ماکزیمم نسبی و هم ماکزیمم مطلق دارد و اگر $k \le 0$ باشد، تابع در $x = 0$ دارای مینیمم نسبی است.



۵۳ ـ گزینه ۲

بنا به شکل رسم شده نقطه‌ی $x = 1/5$ طول min نسبی تابع است و قبل از این نقطه منحنی نزولی و بعد از آن منحنی صعودی است و $x = 1/5$ ریشه‌ی مشتق می‌باشد.

$f(x) = ax^4 + bx^3 + c \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2$

$\Rightarrow f'(x) = x^2(4ax + 3b) \xrightarrow[\text{طول min نسبی}]{x = \frac{3}{2}} 4a(\frac{3}{2}) + 3b = 0$

$\Rightarrow b = -2a \rightarrow f(x) = ax^4 - 2ax^3 + c \Rightarrow f'(x) = x^2(4ax - 6a) \Rightarrow f'(x) = 2ax^2(2x - 3)$

$$\begin{cases} f'(\frac{3^-}{2}) < 0 \Rightarrow 2a(\frac{9}{4})(0^-) < 0 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow b < 0 \\ f'(\frac{3^+}{2}) > 0 \end{cases}$$

۵۴ - گزینه ۲

ریشه‌های سادهٔ مشتق دوم ،طول نقطهٔ عطف تابع است.

$$y = (5 - \sqrt[3]{x^2})x^2 = 5x^2 - x^{\frac{8}{3}} \rightarrow y' = 10x - \frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}$$

$$y'' = 10 - \frac{40}{9}x^{\frac{2}{3}} = 0 \Rightarrow x^{\frac{2}{3}} = \frac{9}{4} \xrightarrow{x>0} x = \frac{27}{8}$$

۵۵ - گزینه ۱ حجم استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h برابر است با $\pi r^2 h$. پس:

$$\pi = \pi r^2 h \Rightarrow r^2 h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{r^2}$$

اگر مساحت لیوان کمترین شود مقدار فلز به کار رفته در ساخت آن کم‌ترین می‌شود. چون لیوان استوانه‌ای در باز است، پس مساحت آن برابر است با:

$$S = \underbrace{\pi r^2}_{\text{مساحت قاعده}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{مساحت جانبی}} = \pi r^2 + 2\pi r \frac{1}{r^2} = \pi r^2 + \frac{2\pi}{r}$$

مقدار h برای کمترین مقدار S را به کمک مشتق پیدا می‌کنیم.

$$S' = \pi(2r - \frac{2}{r^2}) = \frac{2\pi(r^3 - 1)}{r^2} = 0 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{1^2} = 1$$

۵۶ - گزینه ۳ نقاط بحرانی نقاطی از دامنهٔ تابع است که مشتق در آن وجود ندارد و در صورت وجود مقدار آن صفر است.

نکته: توابع به فرم $y = (x-a)^n \cdot [f(x)]$ که $f(a) \in \mathbb{Z}$ است به ازای $n = 1$ در $x = a$ پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست امّا به ازای $n \geq 2$ در $x = a$ پیوسته و مشتق‌پذیر است.

این تابع در نقاط صحیح غیرصفر $(\mathbb{Z} - \{0\})$ ناپیوسته است و در نتیجه این نقاط بحرانی هستند. در $x = 0$ پیوسته است اما مشتق‌پذیر نیست. زیرا:

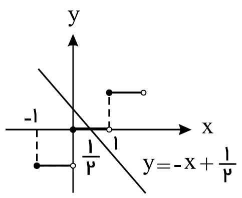
$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}(2[x] + x - 1) \Rightarrow \text{وجود ندارد.}$$

اما در نقاط غیرصحیح پیوسته و مشتق‌پذیر است.

$$f(x) = x[x] + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \xrightarrow{x \notin \mathbb{Z}} f'(x) = [x] + x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow [x] = -x + \frac{1}{2} \quad (1)$$

اگر دو تابع $y = [x]$ و $y = -x + \frac{1}{2}$ را رسم کنیم، نقاط برخورد ریشهٔ معادلهٔ (1) خواهدبود.



ملاحظه می‌کنیم که معادلهٔ $f'(x) = 0$ یک ریشهٔ $x = \frac{1}{2}$ دارد، پس مجموعهٔ طول نقاط بحرانی تابع $\left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \mathbb{Z}$ خواهد بود.

۵۷ - گزینه ۱ در محاسبهٔ ماکزیمم و مینیمم مطلق باید بازه داده شود و در صورتیکه بازه نداشته باشد از دامنهٔ تابع بعنوان بازه استفاده می‌کنیم.

ابتدا دامنهٔ تابع را تعیین می‌کنیم.

$$\begin{cases} 2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \\ x - \sqrt{2-x} \geq 0 \Rightarrow x \geq \sqrt{2-x} \xrightarrow{x \geq 0} x^2 \geq 2 - x \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) \geq 0 \Rightarrow x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow \text{دامنه} = [1, 2]$$

توابع $y = x$ و $y = -\sqrt{2-x}$ روی بازهٔ فوق، پیوسته و صعودی اکیدند. بنابراین مجموع آن‌ها و در نتیجه تابع داده شده، پیوسته و صعودی اکید خواهدبود. پس ماکزیمم مطلق تابع داده شده، به‌ازای $x = 2$ به‌دست می‌آید که برابر $\sqrt{2}$ خواهدبود.

۵۸ - گزینه ۱ در رابطهٔ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ مقدار y را بر حسب x محاسبه می‌کنیم. $y = (2 - \sqrt{x})^2$

نقطهٔ M، مختصاتش به‌صورت $M(x, (2-\sqrt{x})^2)$ خواهدبود. مساحت مستطیل را بر حسب x محاسبه کرده و مشتق آن را به‌دست می‌آوریم.

$$S = x(2 - \sqrt{x})^2 \Rightarrow S' = (2 - \sqrt{x})^2 + x \times 2(2 - \sqrt{x})(-\frac{1}{2\sqrt{x}}) = 0$$

$$\Rightarrow (2 - \sqrt{x})(2 - \sqrt{x} - \sqrt{x}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow S = 1 \\ x = 4 \Rightarrow S = 0 \end{cases} \Rightarrow S_{Max} = 1$$

۵۹ ـ گزینه ۲ هر جا که f' نزولی باشد، مشتق آن یعنی f'' منفی است و لذا تقعر نمودار f به سمت پایین می‌باشد. با توجه به شکل، f' تنها در فاصلهٔ $(\pi, 2\pi)$ نزولی است.

۶۰ ـ گزینه ۴ تابع $f(x)$ در صورتی فاقد عطف است که مشتق دوم فاقد ریشه باشد یا ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

$$f'(x) = 4x^3 + 3(k-1)x^2 + k + 3$$
$$f''(x) = 12x^2 + 6(k-1)x$$

اگر $k = 1$ آن‌گاه $f''(x) = 12x^2$ و تقعر تابع همواره رو به بالاست و تابع فاقد نقطهٔ عطف خواهد بود. در غیر این صورت معادله $f''(x)$ دارای دو ریشهٔ ساده می‌شود که این نقاط طول نقاط عطف تابع خواهند بود.

$$k = 1 \to f(x) = x^4 + 4x \quad , \quad f'(x) = 4x^3 + 4$$

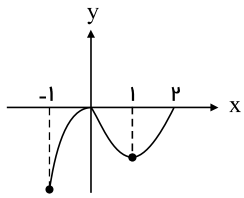
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	

بنابراین طول مینیمم نسبی تابع $x = -1$ و عرض آن $f(-1) = -3$ است.

۶۱ ـ گزینه ۳ ابتدا $f(x)$ را به یک تابع چند ضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & -1 \le x < 0 \\ x^2 - 2x & 0 \le x \le 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -2x + 2 & -1 < x < 0 \\ \text{وجود ندارد} & x = 0 \\ 2x - 2 & 0 < x < 2 \end{cases}$$

به کمک تعیین علامت مشتق و جدول رفتار تابع، نقاط اکسترمم را تعیین می‌کنیم:



x	-1		0		1		2
f'		$+$		$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

تابع در $x = 0$ ماکزیمم نسبی و در $x = 1$ می‌نیمم نسبی دارد. البته به کمک رسم نمودار نیز می‌توانستیم نقاط اکسترمم را به دست آوریم.

۶۲ ـ گزینه ۳ ابتدا به کمک مجانب افقی پارامترهای مجهول را پیدا می‌کنیم.

$y = -2$ مجانب افقی تابع در $-\infty$ است.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{ax + b}{\sqrt{x^2 + 1}} \overset{a \neq 0}{=\!=} \lim_{x \to -\infty} \frac{ax}{|x|} = \frac{ax}{-x} \Rightarrow -a = -2 \Rightarrow a = 2$$

مجانب افقی در $(+\infty)$: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{|x|} = \frac{2x}{x} = 2 \Rightarrow y = 2$

از طرفی باتوجه به شکل، نقطهٔ $(0, 2)$ روی نمودار است.

$$f(0) = 2 \Rightarrow \frac{0 + b}{\sqrt{0 + 1}} = 2 \Rightarrow b = 2$$

$$f(x) = \frac{2(x+1)}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2\left(\sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \times (x+1)\right)}{(x^2+1)} = 0$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{x^2 + 1 - x(x+1)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\right) = 0 \Rightarrow x^2 + 1 - x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین باتوجه به شکل، $x = 1$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی و مطلق تابع است. پس:

$$\text{مقدار ماکزیمم} = f(1) = \frac{2 \times 1 + 2}{\sqrt{1^2 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

۶۳ ـ گزینه ۱

$$y = \frac{ax}{x^2 + 1} \to y' = \frac{a(x^2+1) - 2x(ax)}{(x^2+1)^2} = \frac{ax^2 + a - 2ax^2}{(x^2+1)^2}$$

$$\to y' = \frac{-ax^2 + a}{(x^2+1)^2} \to y' = \frac{a(-x^2+1)}{(x^2+1)^2} = 0 \to \begin{cases} x = 1 \xrightarrow{\text{تابع}} y = \frac{a}{2} \\ x = -1 \xrightarrow{\text{تابع}} y = \frac{-a}{2} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{array}{|c} 1 \\ \dfrac{a}{2} \end{array} \xrightarrow[\text{صدق}]{y=4x+b} \dfrac{a}{2} = 4+b \\ \\ \begin{array}{|c} -1 \\ -\dfrac{a}{2} \end{array} \xrightarrow[\text{صدق}]{y=4x+b} -\dfrac{a}{2} = -4+b \end{array}\right\} \rightarrow a = 8\,,\ b = 0$$

۶۴ ـ **گزینه ۳** از تابع داده‌شده مشتق می‌گیریم.

$$f(x) = \frac{x^2-3x}{x+a} \rightarrow f'(x) = \frac{(2x-3)(x+a)-(x^2-3x)}{(x+a)^2} = \frac{2x^2+2ax-3x-3a-x^2+3x}{(x+a)^2}$$

$$= \frac{x^2+2ax-3a}{\underbrace{(x+a)^2}_{+}} = 0 \rightarrow x^2+2ax-3a = 0$$

اگر $\Delta < 0$ باشد مشتق ریشهٔ حقیقی ندارد درنتیجه اکسترمم هم ندارد اگر $\Delta = 0$ باشد مشتق ریشهٔ مضاعف دارد و درنتیجه اکسترمم هم ندارد ولی اگر $\Delta > 0$ باشد مشتق دارای دو ریشهٔ سادهٔ متمایز است و دو اکسترمم دارد.

$$\Delta > 0 \rightarrow b^2-4ac > 0 \rightarrow 4a^2+12a > 0 \rightarrow 4a(a+3) > 0$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} a & -\infty & & -3 & & 0 & & +\infty \\ \hline \text{عبارت} > 0 & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array} \rightarrow a < -3 \text{ یا } a > 0 \rightarrow a \in \mathbb{R} - [-3, 0]$$

۶۵ ـ **گزینه ۱**

$$f(x) = \frac{x}{x^2+a^2} \quad , \quad D_f = \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2+a^2-2x^2}{(x^2+a^2)^2} = \frac{-x^2+a^2}{(x^2+a^2)^2}$$

علامت مشتق فقط به‌صورت آن بستگی دارد زیرا مخرج عبارتی همواره مثبت است.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2+a^2 = 0 \Rightarrow x = \pm|a|$$

$$\begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & -|a| & & |a| & & +\infty \\ \hline f'(x) = \dfrac{-x^2+a^2}{(x^2+a^2)^2} & & - & 0 & + & 0 & - & \\ \hline f(x) & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \end{array}$$

$$x = -|a| \Rightarrow y = \frac{-|a|}{a^2+a^2} = \frac{-|a|}{2a^2} = -\frac{|a|}{2|a|^2} = -\frac{1}{2|a|} \Rightarrow \min(-|a|, -\frac{1}{2|a|})$$

$$x = |a| \Rightarrow y = \frac{|a|}{a^2+a^2} = \frac{|a|}{2a^2} = \frac{|a|}{2|a|^2} = \frac{1}{2|a|} \Rightarrow \max(|a|, \frac{1}{2|a|})$$

$$\text{شیب} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{\dfrac{1}{2|a|}+\dfrac{1}{2|a|}}{|a|+|a|} = \frac{\dfrac{1}{|a|}}{2|a|} = \frac{1}{2|a|^2} = 6$$

$$\Rightarrow |a|^2 = \frac{1}{12} \Rightarrow a = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

۶۶ ـ **گزینه ۳**

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2+kx-k} \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{2x+k}{3\sqrt[3]{(x^2+kx-k)^2}} = 0 \Rightarrow 2x+k = 0 \Rightarrow x = -\frac{k}{2}$$

برای این‌که $x = -\dfrac{k}{2}$ تنها نقطهٔ بحرانی تابع f باشد، دو حالت می‌تواند اتفاق بیفتد.

حالت اول: مخرج مشتق ریشه نداشته باشد.

$$x^2+kx-k = 0 \Rightarrow \text{ریشه نداشته باشد.} \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow k^2+4k < 0 \Rightarrow -4 < k < 0 \quad (1)$$

حالت دوم: مخرج ریشهٔ مضاعف $x = -\dfrac{k}{2}$ داشته باشد.

$$x^2+kx-k=0 \Rightarrow \Delta=0\ ,\ x=-\frac{b}{2a}=-\frac{k}{2} \Rightarrow \Delta=k^2+4k=0 \Rightarrow k=-4\ ,\ k=0$$

$(1)\cup(2) \Rightarrow -4\leq k\leq 0 \Rightarrow k$ اعداد صحیح $=-4,-3,-2,-1,0 \Rightarrow$ ۵ عدد

۶۷ - گزینه ۲ باید نقاط بحرانی تابع را در بازهٔ $[1,3]$ بیابیم.

$$f(x)=x^3-3x^2+k \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x=0 \Rightarrow 3x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{غ‌ق‌ق} \\ x=2 & \text{جواب} \end{cases}$$

$$x=1 \Rightarrow f(1)=1-3+k=k-2$$

$x=2 \Rightarrow f(2)=8-12+k=k-4 \Rightarrow$ مینیمم مطلق

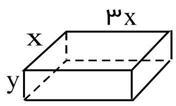
$x=3 \Rightarrow f(3)=27-27+k=k \Rightarrow$ ماکزیمم مطلق

$$k-4+k=0 \Rightarrow 2k=4 \Rightarrow k=2$$

۶۸ - گزینه ۲

قطعه سیم مورد نظر، یال‌های مکعب مستطیل را می‌سازد.

ابعاد مکعب مستطیل را مطابق شکل، x، $3x$ و y درنظر می‌گیریم.



$\Rightarrow$ مجموع طول یال‌ها $=4x+4(3x)+4y=48 \Rightarrow 4x+y=12 \Rightarrow y=12-4x$

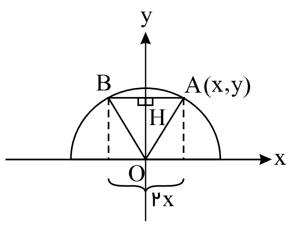
$$\Rightarrow V(x)=(3x)(x)(y)=3x^2y=3x^2(12-4x)=12(3x^2-x^3)$$

$$V'(x)=12(6x-3x^2)=0 \Rightarrow x=2$$

$$V_{\max}=V(2)=12(12-8)=48$$

۶۹ - گزینه ۱ با توجه به ثابت بودن کل مساحت سطح محصور بین نمودار تابع و محور xها، برای آنکه مساحت قسمت هاشورخورده، کم‌ترین مقدار ممکن شود، لازم است که مساحت مثلث OAB بیشترین مقدار باشد.

اگر مختصات رأس A از مثلث را (x,y) در نظر بگیریم، قاعدهٔ مثلث (AB) برابر $2x$ و ارتفاع مثلث (OH) برابر y خواهد بود. پس مساحت این مثلث متساوی‌الساقین برابر است با:



$$S_{\overset{\triangle}{ABO}}=\frac{1}{2}(AB)(OH)=\frac{1}{2}(2x)(y)=xy \Rightarrow S(x)=x\sqrt{2-x^2}$$

$$\to S'(x)=0 \Rightarrow 1\times\sqrt{2-x^2}+\frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}}\times x=0 \Rightarrow \frac{(2-x^2)-x^2}{\sqrt{2-x^2}}=0$$

$$\Rightarrow 2-2x^2=0 \Rightarrow x=\pm1 \xrightarrow{\text{در ربع اول مختصات است.}\ A} x=1$$

$$\to OH=y=\sqrt{2-x^2} \xrightarrow{x=1} y=1$$

حال از آنجاکه در مثلث متساوی‌الساقین، میانه و ارتفاع وارد بر قاعده بر هم منطبق‌اند، مقدار میانه نیز برابر ۱ خواهد بود.

۷۰ - گزینه ۲ با توجه به شکل، شیب خط مماس بر تابع $y=ax^3+bx^2+8x$ در نقطهٔ $x=-4$ برابر با صفر است.

$$y=ax^3+bx^2+8x \longrightarrow y'=3ax^2+2bx+8$$

$$y'(-4)=48a-8b+8=0 \Rightarrow 6a-b+1=0 \Rightarrow 6a-b=-1$$

نقطهٔ $(-4,0)$ در تابع $y=ax^3+bx^2+8x$ صدق می‌کند و داریم:

$$-64a+16b-32=0 \Rightarrow -4a+b-2=0 \Rightarrow -4a+b=2$$

$$\begin{cases} 6a-b=-1 \\ -4a+b=2 \end{cases} \Rightarrow 2a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2} \Rightarrow b=4$$

$$xf(x-1)=\frac{1}{2}x^3+4x^2+8x \Rightarrow f(x-1)=\frac{1}{2}x^2+4x+8$$

$$\xrightarrow{x\to x+1} f(x)=\frac{1}{2}(x+1)^2+4(x+1)+8 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x^2+5x+\frac{25}{2}$$

$$y=xf(x) \Rightarrow y=\frac{1}{2}x^3+5x^2+\frac{25}{2}x \Rightarrow y'=\frac{3}{2}x^2+10x+\frac{25}{2}$$

حال y' را تعیین علامت می‌کنیم.

$$\frac{3}{2}x^2+10x+\frac{25}{2}=0 \Rightarrow \Delta=100-4\times\frac{3}{2}\times\frac{25}{2}=100-75=25$$

$$x=\frac{-10\pm 5}{3} \to \begin{cases} x=-5 \\ x=-\frac{5}{3} \end{cases}$$

x		-5		$-\frac{5}{3}$	
$y'=\frac{3}{2}x^2+10x+\frac{25}{2}$	+	0	−	0	+
y	↗		↘		↗

تابع در بازهٔ $[-5,-\frac{5}{3}]$ اکیداً نزولی است.

۷۱ - گزینه ۱ معادله را به‌صورت $x^3-6x^2=k-1$ بازنویسی می‌کنیم. برای بررسی جواب‌های این معادله، کافی است نقاط برخورد نمودار تابع $f(x)=x^3-6x^2$ و خط $y=k-1$ را بررسی کنیم.

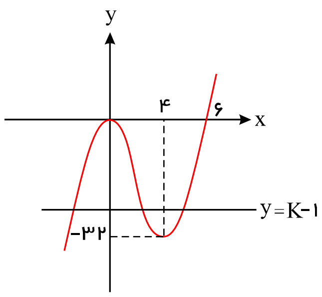
$$f(x)=x^3-6x^2=x^2(x-6)$$

$$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow f(0)=0 \\ x=4 \Rightarrow f(4)=-32 \end{cases}$$

با تعیین علامت f' داریم:

		0		4	
f'	+	0	−	0	+
	↗	max نسبی	↘	min نسبی	↗

بنابراین نمودارهای مورد نظر، مطابق شکل مقابل هستند:



برای اینکه این دو نمودار، سه نقطهٔ برخورد داشته باشند کافی است نامعادلهٔ $-32<k-1<0$ برقرار باشد:

$$\Rightarrow -31<k<1$$

کم‌ترین مقدار صحیح k، -30 است.

۷۲ - گزینه ۳ می‌دانیم دامنهٔ تابع داده‌شده بازهٔ $[-1,1]$ می‌باشد که در این بازه تابع پیوسته است، درنتیجه داریم:

$$f'(x)=2x+\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=x(2-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2 - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow 2 = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 1 - x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

با توجه به این‌که هر سه جواب به‌دست آمده در دامنهٔ تابع قرار دارند، پس هر سه تا نقطهٔ بحرانی تابع هستند، بر این اساس خواهیم داشت:

$$f(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = f(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2{,}25 \quad \text{و} \quad f(0) = 2 \quad \text{و} \quad f(-1) = f(1) = 2$$

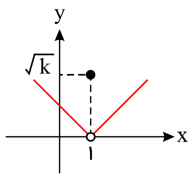
درنتیجه $y = 2{,}25$ و $y = 2$ به ترتیب ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع فوق در بازهٔ $[-1, 1]$ هستند که مجموع آن‌ها برابر با $y_{Max} + y_{Min} = 4{,}25$ است.

۷۳ - گزینه ۳ تابع gof را تشکیل می‌دهیم.

$$x \neq 1 \Rightarrow (gof)(x) = g(f(x)) = g((x-1)^2) = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$$

$$x = 1 \Rightarrow (gof)(1) = g(f(1)) = g(k) = \sqrt{k}$$

حال نمودار gof را رسم می‌کنیم. واضح است که تابع gof در $x = 1$ ماکزیمم نسبی برابر $\sqrt{k}$ دارد، پس داریم:



$$\sqrt{k} = 2 \Rightarrow k = 4$$

۷۴ - گزینه ۱

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + x^2 & ; x < 1 \\ x^3 - x^2 & ; x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 2x & ; x < 1 \\ 3x^2 - 2x & ; x > 1 \end{cases}$$

اگر تابع f صعودی باشد، داریم: $f' \geq 0$.

$$x < 1 : -3x^2 + 2x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \xrightarrow{x<1} x \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$$

$$x > 1 : 3x^2 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \quad \text{یا} \quad x \geq \frac{2}{3} \xrightarrow{x>1} x \in [1, +\infty)$$

تابع f روی بازهٔ $\left[0, \frac{2}{3}\right] \cup [1, +\infty)$ صعودی است.

$$f''(x) = \begin{cases} -6x + 2 & ; x < 1 \\ 6x - 2 & ; x > 1 \end{cases}$$

برای اینکه تقعر تابع f رو به پایین باشد، باید داشته باشیم: $f'' \leq 0$.

$$x < 1 : -6x + 2 \leq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{3} \xrightarrow{x<1} x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$$

$$x > 1 : 6x - 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{3} \quad \text{غیرممکن}$$

بنابراین تابع f در بازهٔ $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] = \left[\frac{1}{3}, 1\right] \cap \left(\left[0, \frac{2}{3}\right] \cup [1, +\infty)\right)$ صعودی و تقعر آن رو به پایین است.

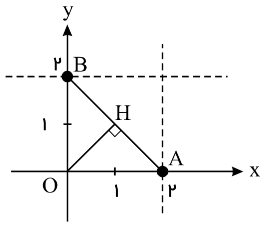
۷۵ - گزینه ۱

$$f(x) = \frac{ax(x-2) + x^2 + 1}{x-2} = \frac{ax^2 - 2ax + x^2 + 1}{x-2} = \frac{(a+1)x^2 - 2ax + 1}{x-2}$$

چون تابع هموگرافیک است، پس داریم:

$$a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{2x+1}{x-2} \quad , \quad x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \text{مجانب قائم}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x+۱}{x-۲}=۲\Rightarrow y=۲\ \text{مجانب افقی}\ \Rightarrow$$



با توجه به شکل بالا باید OH را بیابیم که برابر با نصف قطر مربعی به ضلع ۲ است، پس داریم:

$$\text{قطر مربع}=۲\sqrt{۲}\Rightarrow OH=\frac{۱}{۲}\times ۲\sqrt{۲}=\sqrt{۲}$$

۷۶ ـ گزینه ۱

با توجه به حجم قوطی، رابطهٔ بین ارتفاع و شعاع استوانه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$V=\pi r^۲h\Rightarrow \pi r^۲h=۳۰۰۰\xrightarrow{\pi\simeq ۳} r^۲h=۱۰۰۰\Rightarrow h=\frac{۱۰۰۰}{r^۲}$$

طبق صورت سؤال، باید مساحت کل استوانهٔ مورد نظر کم‌ترین مقدار ممکن گردد.

$$S=\text{مساحت کل استوانه}=\text{مساحت قاعده}+\text{مساحت جانبی}=\pi r^۲+۲\pi rh$$

با جایگذاری ارتفاع برحسب شعاع، داریم:

$$S=\pi r^۲+\pi(\frac{۲۰۰۰}{r})=\pi(r^۲+\frac{۲۰۰۰}{r})$$

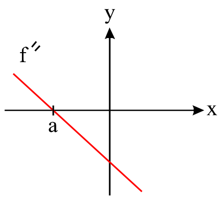
اگر مشتق مساحت برحسب شعاع را برابر با صفر قرار دهیم، شعاع مطلوب به‌دست می‌آید:

$$S'=\pi(۲r-\frac{۲۰۰۰}{r^۲})=۰$$

$$\Rightarrow ۲r=\frac{۲۰۰۰}{r^۲}\Rightarrow r^۳=۱۰۰۰\Rightarrow r=۱۰\Rightarrow h=۱۰$$

۷۷ ـ گزینه ۲

$$x<a\Rightarrow f''>۰\Rightarrow \text{تقعر } f \text{ رو به بالا است.}$$
$$x>a\Rightarrow f''<۰\Rightarrow \text{تقعر } f \text{ رو به پایین است.}$$



x		a	
f''	$+$	۰	$-$
تقعر f	$\smile$		$\frown$

فقط در گزینهٔ «۲» در نقطهٔ منفی $x=a$، تقعر نمودار f از رو به بالا به پایین تغییر می‌کند.

۷۸ ـ گزینه ۳

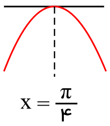
$$y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}\Rightarrow y'=\frac{\cos x}{۲\sqrt{\sin x}}+\frac{-\sin x}{۲\sqrt{\cos x}}=\frac{\cos x\sqrt{\cos x}-\sin x\sqrt{\sin x}}{۲\sqrt{\sin x}\sqrt{\cos x}}$$

$$y'=\frac{\sqrt{\cos^۳ x}-\sqrt{\sin^۳ x}}{۲\sqrt{\sin x}\sqrt{\cos x}}\Rightarrow y'(\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۳}-\sqrt{(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۳}}{۲\sqrt{\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}}=۰$$

$$۰<x<\frac{\pi}{۴}\Rightarrow \sin x<\cos x\Rightarrow \sin^۳ x<\cos^۳ x\Rightarrow \sqrt{\sin^۳ x}<\sqrt{\cos^۳ x}\Rightarrow \sqrt{\cos^۳ x}-\sqrt{\sin^۳ x}>۰\Rightarrow y'>۰$$

$$\frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۲}\Rightarrow \sin x>\cos x\Rightarrow \sin^۳ x>\cos^۳ x\Rightarrow \sqrt{\sin^۳ x}>\sqrt{\cos^۳ x}\Rightarrow \sqrt{\cos^۳ x}-\sqrt{\sin^۳ x}<۰\Rightarrow y'<۰$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$		$\searrow$	

$\Rightarrow$ 

۷۹ ـ گزینه ۴

$$y' = 1 + \cos x \Rightarrow y'' = -\sin x$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}) : x = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \cdots$$

صفرهای درونی بازهٔ دامنهٔ تابع y''، نقاط عطف نمودار تابع y هستند. بنابراین برای اینکه بازهٔ $[0, a)$ شامل ۴ نقطهٔ عطف باشد، حداکثر مقدار a، 5π باید باشد.

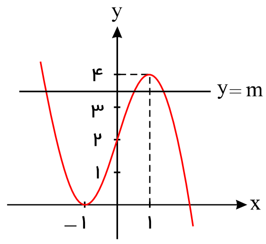
۸۰ ـ گزینه ۴ نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع درجهٔ سوم $y = -x^3 + 3x + 2$ را می‌یابیم.

$$y' = -3x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x = 1 \Rightarrow y = -1 + 3 + 2 = 4 \Rightarrow (1, 4)$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 1 - 3 + 2 = 0 \Rightarrow (-1, 0)$$

x		-1		1	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$



برای این‌که خط $y = m$ نمودار $y = -x^3 + 3x + 2$ را در ۳ نقطه قطع کند، باید $0 < m < 4$ باشد.

۸۱ ـ گزینه ۲

$$f'(x) = 6x^2 - 18ax + 12a^2 = 6(x - a)(x - 2a)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = a, 2a$$

واضح است که a باید مقداری مثبت باشد در غیر این‌صورت شرط گفته‌شده در صورت سؤال برقرار نخواهد شد.

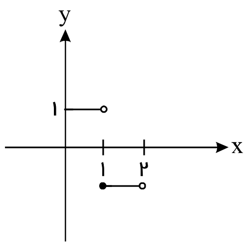
x		a		$2a$	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	max نسبی	$\searrow$	min نسبی	$\nearrow$

$$x_{\min} = x_{\max}^2 \Rightarrow 2a = a^2 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 & \text{غق} \\ a = 2 \end{cases}$$

دقت کنید که اگر $a = 0$ باشد، $f(x) = 2x^3 + 1$ خواهد شد که این تابع اکسترمم نسبی ندارد.

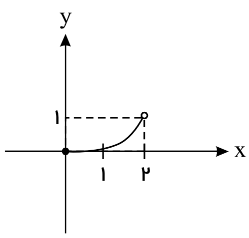
۸۲ ـ گزینه ۴ با رسم نمودار توابع داده‌شده در هر گزینه داریم:

$$y = \cos \pi[x] \Rightarrow \begin{cases} 1 \le x < 2 \Rightarrow y = \cos \pi = -1 \\ 0 \le x < 1 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$



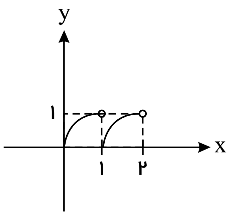
$x = 1$ مینیمم نسبی است.

$$y = (x-1)^2[x] \Rightarrow \begin{cases} 1 \le x < 2 \Rightarrow y = (x-1)^2 \\ 0 \le x < 1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$



$x = 1$ مینیمم نسبی است.

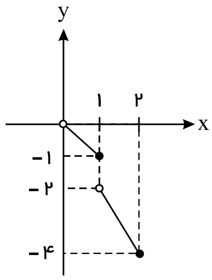
$y=\sqrt{x-[x]} \Rightarrow \begin{cases} ۱ \le x < ۲ \Rightarrow y=\sqrt{x-۱} \\ ۰ \le x < ۱ \Rightarrow y=\sqrt{x} \end{cases}$



$x=۱$ مینیمم نسبی است.

$y=x[-x]$

$\Rightarrow \begin{cases} ۱ < x \le ۲ \Rightarrow -۲ \le -x < -۱ \Rightarrow y=-۲x \\ ۰ < x \le ۱ \Rightarrow -۱ \le -x < ۰ \Rightarrow y=-x \end{cases}$



$x=۱$ مینیمم نسبی تابع نیست.

بنابراین گزینهٔ «۴» صحیح است.

۸۳ - گزینه ۴

$$f(x)=\frac{ax+b}{x^۲+۳}$$

تابع f در کل $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است، بنابراین داریم:

$$A(-۱,\frac{۱}{۲}) \Rightarrow f(-۱)=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{-a+b}{۴}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow -a+b=۲$$

چون نقطهٔ $A(-۱,\frac{۱}{۲})$ اکسترمم نسبی است، پس مشتق به‌ازای طول این نقطه صفر است.

$$f'(x)=\frac{a(x^۲+۳)-۲x(ax+b)}{(x^۲+۳)^۲} \Rightarrow f'(-۱)=\frac{۴a+۲(-a+b)}{۱۶}=۰$$

$$\Rightarrow ۴a-۲a+۲b=۰ \Rightarrow \begin{cases} a+b=۰ \\ -a+b=۲ \end{cases} \Rightarrow b=۱, a=-۱ \Rightarrow f(x)=\frac{-x+۱}{x^۲+۳}$$

$$f'(x)=\frac{-(x^۲+۳)-۲x(-x+۱)}{(x^۲+۳)^۲}=\frac{-x^۲-۳+۲x^۲-۲x}{(x^۲+۳)^۲}=\frac{x^۲-۲x-۳}{(x^۲+۳)^۲}$$

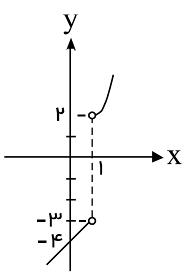
$$x^۲-۲x-۳=۰ \Rightarrow (x-۳)(x+۱)=۰ \Rightarrow x=-۱, x=۳$$

x		-۱		۳	
$f'(x)=\frac{x^۲-۲x-۳}{(x^۲+۳)^۲}$	$+$	۰	$-$	۰	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$x=۳$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع است.

۸۴ - گزینه ۱

نمودار تابع f بدون در نظر گرفتن نقطهٔ $(۱,m)$ به‌صورت مقابل است.



حال اگر نقطهٔ $(۱,m)$ بالاتر از نقطهٔ $(۱,۲)$ باشد، تابع ماکزیمم نسبی و اگر پایین‌تر از نقطهٔ $(۱,-۳)$ باشد، مینیمم نسبی دارد. اما اگر نقطهٔ $(۱,m)$ بین این دو نقطه یا روی یکی از آن‌ها باشد، تابع اکسترمم نسبی ندارد.

$\Rightarrow -۳ \leq m \leq ۲$

۸۵ - گزینه ۴ ابتدا نقطهٔ عطف تابع را می‌یابیم:

$$f(x) = \frac{۱}{۴}x^{۲} + ۱۶\sqrt{x} \quad , \quad D_f = [۰, +\infty)$$

$$f'(x) = \frac{۱}{۲}x + \frac{۱۶}{۲\sqrt{x}} = \frac{۱}{۲}x + \frac{۸}{\sqrt{x}} \Rightarrow f''(x) = \frac{۱}{۲} + \frac{۰ - \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \times ۸}{x} = \frac{۱}{۲} - \frac{۴}{x\sqrt{x}}$$

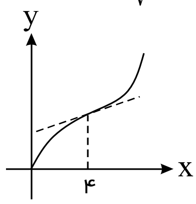
$$f''(x) = \frac{x\sqrt{x} - ۸}{۲x\sqrt{x}} = ۰ \Rightarrow x\sqrt{x} = ۸ \Rightarrow x^{۳} = ۶۴ \Rightarrow x = ۴$$

x	۰		۴		$+\infty$
$f''(x) = \frac{x\sqrt{x} - ۸}{۲x\sqrt{x}}$		$-$	۰	$+$	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$	

$x = ۴$ طول نقطهٔ عطف تابع است، حال شیب خط مماس بر f در نقطهٔ عطف را می‌یابیم.

$$\text{شیب مماس در عطف} = f'(۴) = \frac{۱}{۲} \times ۴ + \frac{۱۶}{۲\sqrt{۴}} = ۲ + ۴ = ۶$$

بنابراین نمودار تابع در اطراف نقطهٔ عطف به‌صورت مقابل است.



۸۶ - گزینه ۴

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} & , x \geq ۱ \\ x^{۲} + ۲x + b & , x < ۱ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{a}{۲\sqrt{x}} & , x \geq ۱ \\ ۲x + ۲ & , x < ۱ \end{cases}$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۲x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۱$$

$x = -۱$ قطعاً نقطهٔ بحرانی تابع است. پس $c = -۱$ می‌باشد. حال تابع f نباید نقطهٔ بحرانی دیگری داشته باشد. بنابراین f در $x = ۱$ باید مشتق مخالف صفر داشته باشد و داریم:

$$x = ۱ \text{ شرط پیوستگی در } \Rightarrow \begin{cases} f(۱) = a \\ \text{حد راست} = \lim\limits_{x \to ۱^{+}} a\sqrt{x} = a \\ \text{حد چپ} = \lim\limits_{x \to ۱^{-}} (x^{۲} + ۲x + b) = ۳ + b \end{cases} \Rightarrow a = ۳ + b \quad (I)$$

$$f'_{+}(۱) = \frac{a}{۲\sqrt{۱}} = \frac{a}{۲} \ , \ f'_{-}(۱) = ۲ \times ۱ + ۲ = ۴ \Rightarrow \frac{a}{۲} = ۴ \Rightarrow a = ۸ \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I)\ ,\ (II)} ۸ = ۳ + b \Rightarrow b = ۵ \ , \ f'(۱) = ۸ \neq ۰$$

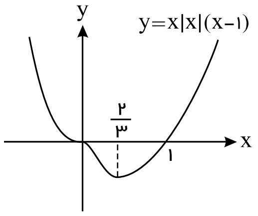
$$a + b + c = ۸ + ۵ - ۱ = ۱۲$$

۸۷ - گزینه ۱ ابتدا $f(x)$ را به یک تابع چند ضابطه‌ای تبدیل نموده و سپس f' را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} x(x^{۲} - x) & ; x \geq ۰ \\ -x(x^{۲} - x) & ; x < ۰ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۳x^{۲} - ۲x & ; x \geq ۰ \\ -۳x^{۲} + ۲x & ; x < ۰ \end{cases}$$

x		۰		$\frac{۲}{۳}$	
$x(۳x - ۲)$		۰	$-$	۰	$+$
$-x(۳x - ۲)$	$-$	۰			
f'	$-$	۰	$-$	۰	$+$
	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

تابع فقط در $x=\frac{۲}{۳}$ یک مینیمم دارد. نمودار تابع به شکل زیر است.



۸۸ - گزینه ۴

$$y=(\frac{۳}{۴}x-\frac{۱}{۷}x^{۲})\sqrt[۳]{x}\to y=(\frac{۳}{۴}x-\frac{۱}{۷}x^{۲})x^{\frac{۱}{۳}}$$

$$\to y=\frac{۳}{۴}x^{\frac{۴}{۳}}-\frac{۱}{۷}x^{\frac{۷}{۳}}\to y'=x^{\frac{۱}{۳}}-\frac{۱}{۳}x^{\frac{۴}{۳}}\to y'=\sqrt[۳]{x}-\frac{۱}{۳}x\sqrt[۳]{x}$$

$$\to y'=\sqrt[۳]{x}(۱-\frac{۱}{۳}x)=۰\to x=۰\,,\,x=۳$$

$$\to\begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & ۰ & & ۳ & & +\infty \\ \hline y' & & - & ۰ & + & ۰ & - & \\ \hline y & & \searrow & Min & \nearrow & Max & \searrow & \end{array}$$

بنابراین طول Max نسبی تابع برابر ۳ است.

۸۹ - گزینه ۳ اکسترمم‌های نسبی پیوسته و مشتق‌پذیر در تابع صدق می‌کنند و طولشان، مشتق را صفر می‌کند.

$$f(۱)=۴\to ۴=\frac{a+b}{۱}\to a+b=۴$$

$$f'(۱)=۰\to f'(x)=\frac{۲ax(x)-۱(ax^{۲}+b)}{x^{۲}}\to ۰=\frac{۲a-(a+b)}{۱}\to a-b=۰$$

$$\begin{cases} a+b=۴ \\ a-b=۰ \end{cases}\to a=۲\,,\,b=۲$$

$$f(x)=\frac{۲x^{۲}+۲}{x}\to f'(x)=\frac{۴x(x)-۱(۲x^{۲}+۲)}{x^{۲}}=\frac{۴x^{۲}-۲x^{۲}-۲}{x^{۲}}=\frac{۲x^{۲}-۲}{x^{۲}}=۰$$

$$\to x^{۲}=۱\to x=\pm ۱\to \begin{array}{c|ccccc||ccccc} x & -\infty & & -۱ & & & ۰ & & ۱ & & +\infty \\ \hline y' & & + & ۰ & - & & & - & ۰ & + & \\ \hline y & & \nearrow & \underset{Max}{-۴} & \searrow & & & \searrow & \underset{Min}{۴} & \nearrow & \end{array}$$

۹۰ - گزینه ۴ می‌دانیم در این تابع، مشتق تابع در نقطهٔ مینیمم نسبی برابر با صفر است. پس داریم:

$$f'(x)=-\frac{a}{x^{۲}}-۲x=\frac{-(a+۲x^{۳})}{x^{۲}}$$

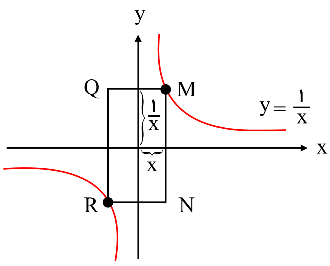
$$f'(x)=۰\Rightarrow x_{۰}=\sqrt[۳]{-\frac{a}{۲}}\Rightarrow$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & & \sqrt[۳]{\frac{-a}{۲}} & \\ \hline f' & + & ۰ & - \\ \hline f & \nearrow & \underset{\text{نسبی}}{\max} & \searrow \end{array}$$

حال از آنجایی که در همسایگی این نقطه به ازای همهٔ مقادیر a (جز صفر) علامت f' از مثبت به منفی تغییر می‌کند، بنابراین همواره $x=x_{۰}$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی است و تابع هیچ‌گاه مینیمم نسبی ندارد.

۹۱ - گزینه ۴

باتوجه به شکل، محیط مستطیل برابر است با:



$$\text{محیط مستطیل}: P = ۲\,(\text{طول} + \text{عرض}) = ۲(۲x + \frac{۲}{x})$$

$$P(x) = ۴x + ۴(\frac{۱}{x}) = ۴x + \frac{۴}{x}$$

در نتیجه:

$$P'(x) = ۴ + \frac{-۴}{x^۲} = ۰ \Rightarrow \frac{۴x^۲ - ۴}{x^۲} = ۰ \xrightarrow{x>۰} x = ۱$$

بنابراین، کمترین مقدار محیط برابر است با:

$$P(۱) = ۴ + \frac{۴}{۱} = ۸$$

۹۲ - گزینه ۳ برای محاسبه‌ی نقطه‌ی عطف، مشتق دوم تابع را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{\sin x}{۱ - \cos x} \to f'(x) = \frac{\cos x \cdot (۱ - \cos x) - \sin x \cdot (\sin x)}{(۱ - \cos x)^۲}$$

$$f'(x) = \frac{-(۱ - \cos x)}{(۱ - \cos x)^۲} = \frac{-۱}{۱ - \cos x}$$

$$f''(x) = \frac{\sin x}{(۱ - \cos x)^۲} = ۰ \Rightarrow \sin x = ۰ \to x = \pi$$ ریشه‌ی ساده‌ی مشتق دوم طول نقطه‌ی عطف است

۹۳ - گزینه ۳ در تابع پیوسته‌ی ریشه‌های ساده‌ی مشتق دوم طول نقطه‌ی عطف است.

مشتق دوم تابع را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = ۴x^۳ - ۳kx^۲ + ۱۲x$$

$$f''(x) = ۱۲x^۲ - ۶kx + ۱۲ = ۶(۲x^۲ - kx + ۲)$$

برای این که این تابع عطف نداشته باشد، کافی است مشتق دوم تغییر علامت ندهد، پس باید در معادله‌ی $۲x^۲ - kx + ۲ = ۰$ داشته باشیم $\Delta \leq ۰$ یعنی:

$$k^۲ - ۱۶ \leq ۰ \Rightarrow ۴ \leq k \leq ۴$$

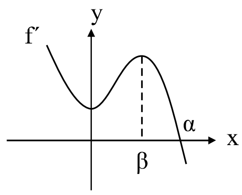
بنابراین به ازای ۹ مقدار صحیح k، تابع نقطه‌ی عطف ندارد.

۹۴ - گزینه ۴ ریشه‌ی ساده‌ی مشتق طول اکسترمم نسبی است پس مشتق تابع را حساب کرده و آن را ساده می‌کنیم:

$$y' = \frac{b - x^۲}{(x^۲ + ax + b)^۲}$$

برای این که تابع داده شده فاقد اکسترمم باشد، لازم است مشتق فاقد ریشه باشد و برای این کار باید $b < ۰$ باشد. دقت کنید که در حالت‌های دیگری نیز ممکن است تابع فاقد اکسترمم باشد ولی باتوجه به گزینه‌ها $b < ۰$ جواب است.

۹۵ - گزینه ۲ اگر نقطهٔ برخورد f' با محور xها، α باشد.



x		α	
f'	$+$	۰	$-$

پس $x = \alpha$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی $f(x)$ است.

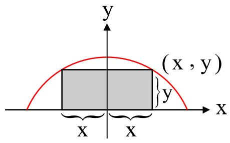
f' در فاصلهٔ $(-\infty, ۰)$ نزولی اکید و در فاصلهٔ $(۰, \beta)$ صعودی اکید و مجدداً در فاصلهٔ $(\beta, +\infty)$ نزولی اکید است. پس می‌توان جدول زیر را در نظر گرفت.

x	$-\infty$		۰		β		$+\infty$
f''		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

در نتیجه f دارای دو نقطهٔ عطف به طول‌های ۰ و β می‌باشد.

۹۶ - گزینه ۴ ابتدا باید یک رابطه بین x و y بنویسیم و برای اینکار از معادله‌ی نیم دایره استفاده می‌کنیم.

معادله‌ی دایره به شعاع $\sqrt{۵}$ و به مرکز $(۰, ۰)$ برابر $x^۲ + y^۲ = ۵$ است.



$$x^۲+y^۲=۵\Rightarrow y=\pm\sqrt{۵-x^۲}$$

معادله نیم دایره بالا: $y=\sqrt{۵-x^۲}$

محیط مستطیل : $P=۲(۲x+y)=۲(۲x+\sqrt{۵-x^۲})$

$$P'(x)=۲(۲+\frac{(-۲x)}{۲\sqrt{۵-x^۲}})=۲(۲-\frac{x}{\sqrt{۵-x^۲}})=۰$$

$$۲\sqrt{۵-x^۲}=x\Rightarrow ۲۰-۴x^۲=x^۲\Rightarrow ۵x^۲=۲۰$$

$$\overset{x>۰}{\Rightarrow} x=۲\Rightarrow y=۱$$

مساحت مستطیل : $S=(۲x)(y)\xlongequal{x=۲,y=۱}۴$

۹۷ - گزینه ۱ یادآوری: برای محاسبه‌ی نقطه‌ی عطف نمودار تابع $y=f(x)$ از روی ضابطه، مشتق دوم آن‌را (f'') محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم. در هر نقطه که در همسایگی آن f'' تغییر علامت دهد به شرطی که مماس واحد در آن نقطه موجود باشد، نمودار تابع $y=f(x)$ در آن نقطه‌ی دارای عطف می‌باشد.

$$y'=\frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}}-\frac{۱۰}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}$$

$$y''=\frac{۱۰}{۹}x^{-\frac{۱}{۳}}+\frac{۱۰}{۹}x^{-\frac{۴}{۳}}=\frac{۱۰}{۹}x^{-\frac{۴}{۳}}(x+۱)=\frac{۱۰(x+۱)}{۹x^{\frac{۴}{۳}}}$$

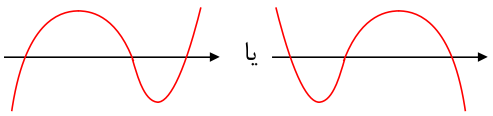
$$y''=\frac{۱۰(x+۱)}{۹\sqrt[۳]{x^۴}}\Rightarrow\begin{cases}\text{ریشه‌ی مخرج: } x=۰\\ \text{ریشه‌ی صورت: } x=-۱\end{cases}$$

x		-۱		۰	
y''	$-$	۰	$+$	۰	$+$
y	$\cap$		$\cup$		$\cup$

$\Rightarrow$ طول نقطه‌ی عطف تابع $x=-۱$

۹۸ - گزینه ۱

برای اینکه معادله‌ی درجه‌ی ۳، سه جواب متمایز داشته باشد، باید نمودار متناظرش ماکزیمم و می‌نیمم داشته باشد و به یکی از دو صورت زیر باشد.



بنابراین نتیجه می‌شود که عرض نقاط اکسترمم باید مختلف‌العلامت باشند.

برای محاسبه عرض نقاط اکسترمم، ابتدا طول نقاط اکسترمم را یافته (ریشه‌های مشتق $y'=۰$) سپس با جاگذاری در تابع اصلی (و نه تابع مشتق) عرض نقاط اکسترمم را می‌یابیم.

$$y=x^۳-۳x^۲+m\rightarrow y'=۳x^۲-۶x=۰\rightarrow ۳x(x-۲)=۰ \begin{cases}x=۰\\x=۲\end{cases}$$

$$f(x)=x^۳-۳x^۲+m \begin{cases}f(۰)=m\\ f(۲)=۸-۳(۴)+m=m-۴\end{cases}$$

$$f(۰)\times f(۲)<۰\rightarrow m(m-۴)<۰\rightarrow$$

m		۰		۴	
$m(m-۴)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$
			ج		

$\rightarrow ۰<m<۴$

۹۹ - گزینه ۱ نقاط بحرانی، نقاطی از دامنه‌ی تابع است که مقدار مشتق در آن نقاط صفر است و یا تابع در آن نقاط مشتق‌پذیر نیست. برای محاسبه‌ی ماکسیمم و مینیمم مطلق یک تابع، نقاط بحرانی و ابتدا و انتهای دامنه را در تابع قرار می‌دهیم و بیش ترین مقدار به‌دست آمده ماکسیمم مطلق و کوچک‌ترین مقدار به‌دست آمده مینیمم مطلق است.

ابتدا دامنه تابع را مشخص می‌کنیم.

$$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{۸-x}$$

$$D:\begin{cases}x\geq ۰\\ ۸-x\geq ۰\rightarrow x\leq ۸\end{cases}\quad D=[۰,۸]$$

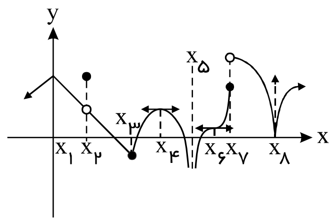
حال نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم.

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}+\frac{-۱}{۲\sqrt{۸-x}}=\frac{\sqrt{۸-x}-\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}\sqrt{۸-x}}=۰\rightarrow\sqrt{۸-x}=\sqrt{x}\rightarrow ۸-x=x\rightarrow x=۴$$

$$\begin{cases}f(۴)=۲+۲=۴\\ f(۰)=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}\\ f(۸)=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\max(f)=۴\\ \min(f)=۲\sqrt{۲}\end{cases}$$

$$\frac{\max(f)}{\min(f)}=\frac{۴}{۲\sqrt{۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}$$

۱۰۰ - گزینه ۲ **می‌دانیم نقاط بحرانی یک تابع، نقاطی از دامنهٔ تابع هستند که مشتق تابع در آن‌ها یا صفر است یا موجود نیست. از طرفی انتقال افقی تأثیری بر روی تعداد نقاط بحرانی تابع ندارد. پس کافی است نقاط بحرانی همین نمودار داده‌شده را بیابیم.**



مشتق‌ناپذیر $\Rightarrow$ نقطهٔ گوشه‌ای : $x_۱, x_۳$

مشتق‌ناپذیر $\Rightarrow$ ناپیوسته : $x_۲, x_۷$

f' در آن‌ها برابر صفر است. $\Rightarrow$ دارای خط مماس افقی : $x_۴, x_۶$

مشتق‌ناپذیر $\Rightarrow$ دارای خط مماس قائم : $x_۸$

ضمناً دقت کنید که $x_۵$ متعلق به دامنه نبوده و بحرانی نیست. پس تعداد نقاط بحرانی ۷ است: $x_۸, x_۷, x_۶, x_۴, x_۳, x_۲, x_۱$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۱۶ - ۴	۳۱ - ۲	۴۶ - ۳	۶۱ - ۳	۷۶ - ۱	۹۱ - ۴
۲ - ۳	۱۷ - ۲	۳۲ - ۲	۴۷ - ۱	۶۲ - ۳	۷۷ - ۲	۹۲ - ۳
۳ - ۲	۱۸ - ۳	۳۳ - ۴	۴۸ - ۱	۶۳ - ۱	۷۸ - ۳	۹۳ - ۳
۴ - ۲	۱۹ - ۴	۳۴ - ۲	۴۹ - ۱	۶۴ - ۳	۷۹ - ۴	۹۴ - ۴
۵ - ۳	۲۰ - ۴	۳۵ - ۲	۵۰ - ۲	۶۵ - ۱	۸۰ - ۴	۹۵ - ۲
۶ - ۱	۲۱ - ۲	۳۶ - ۴	۵۱ - ۲	۶۶ - ۳	۸۱ - ۲	۹۶ - ۴
۷ - ۲	۲۲ - ۲	۳۷ - ۲	۵۲ - ۳	۶۷ - ۲	۸۲ - ۴	۹۷ - ۱
۸ - ۲	۲۳ - ۲	۳۸ - ۲	۵۳ - ۲	۶۸ - ۲	۸۳ - ۴	۹۸ - ۱
۹ - ۱	۲۴ - ۳	۳۹ - ۱	۵۴ - ۲	۶۹ - ۱	۸۴ - ۱	۹۹ - ۱
۱۰ - ۲	۲۵ - ۳	۴۰ - ۳	۵۵ - ۱	۷۰ - ۲	۸۵ - ۴	۱۰۰ - ۲
۱۱ - ۱	۲۶ - ۴	۴۱ - ۳	۵۶ - ۳	۷۱ - ۱	۸۶ - ۴	
۱۲ - ۴	۲۷ - ۲	۴۲ - ۱	۵۷ - ۱	۷۲ - ۳	۸۷ - ۱	
۱۳ - ۲	۲۸ - ۱	۴۳ - ۴	۵۸ - ۱	۷۳ - ۳	۸۸ - ۴	
۱۴ - ۱	۲۹ - ۱	۴۴ - ۴	۵۹ - ۲	۷۴ - ۱	۸۹ - ۳	
۱۵ - ۲	۳۰ - ۳	۴۵ - ۲	۶۰ - ۴	۷۵ - ۱	۹۰ - ۴	