

بسمه تعالی

نام و نام خانوادگی : آزمون حسابان ۲ تاریخ آزمون : مدت آزمون : ۱۲۰ دقیقه  
 شماره صندلی : کلاس : تعداد صفحات: ۳ صفحه دبیرستان سینا

۱) جاهای خالی را با عدد یا عبارات مناسب پر کنید. ( ۱/۲۵ )

الف) باقی مانده تقسیم عبارت  $x^5 - ax^2 + x^2 + 2ax + 1$  بر  $x + 1$  برابر ۴ است در این صورت مقدار  $a$  برابر ..... است.

ب) تابع  $f(x) = \log_7 x$  تابعی اکیدا " ..... است.

پ) با توجه به محورهای سینوس و تانژانت اگر  $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$  باشد مقدار  $\sin \alpha$  از  $\tan \alpha$  ..... است.

ت) تابع  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  در  $x = 0$  مشتق پذیر ..... است.

ث) علامت  $f'$  بر بازه  $I$  مثبت است آنگاه  $f$  بر بازه  $I$  ..... است.

۲) کدام یک از گزاره های زیر درست و کدام یک نادرست است ؟ ( ۱ )

الف) تابع تانژانت در دامنه اش صعودی است .

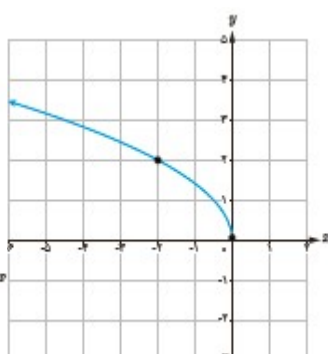
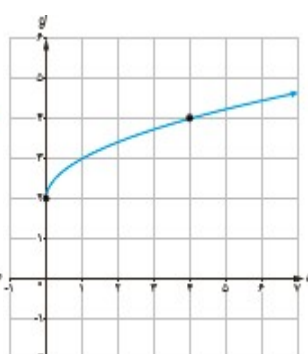
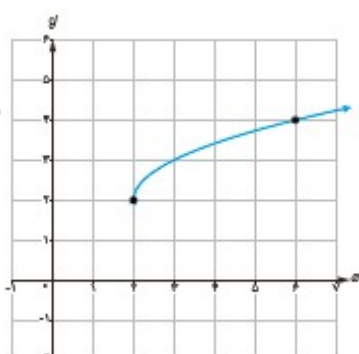
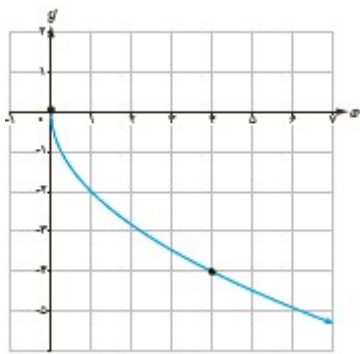
ب) تابعی وجود ندارد که برای آن هم  $f'(a) = 0$  وهم  $f(a) = 0$  باشد.

پ) هر تابع که اکیدا " نزولی باشد در هر نقطه که مشتق پذیر باشد مشتق آن منفی است.

ت) در نقطه عطف علامت  $f''(x)$  تغییر می کند.

۳) هر یک از توابع زیر تبدیل یافته تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  هستند. هر یک از آنها را به نمودارش نظیر کنید. ( ۱ )

الف)  $y = 2 + \sqrt{x-2}$       ب)  $y = \sqrt{-2x}$       پ)  $y = -2\sqrt{x}$       ت)  $y = 2 + \sqrt{x}$



۴) جوابهای معادله زیر را بدست آورید. ( ۱ )

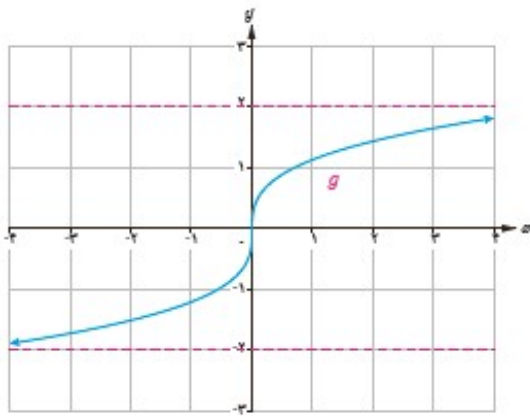
$$\sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

۵) حاصل حدهای زیر را بدست آورید. ( ۱ )

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x] - 2}{x - 2}$$

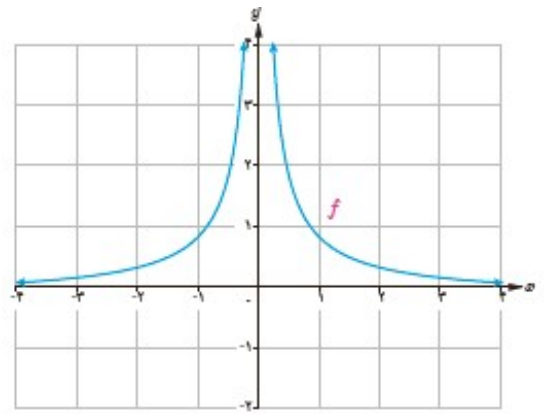
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^2 + x - 1}{6x^2 - 2x + 1}$$

۶) با استفاده از نمودارهای  $f$  و  $g$  حدهای زیر را بدست آورید. (۱)



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$$



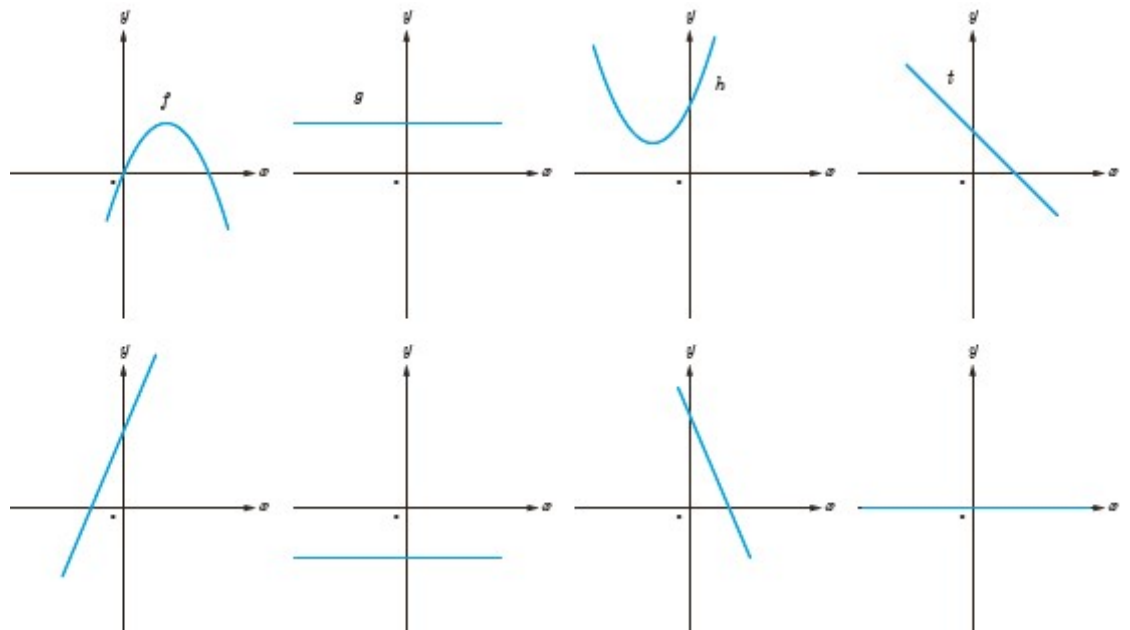
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

۷) الف) نشان دهید که مشتق تابع  $f(x) = |x^r - 1|$  در  $x = 1$  موجود نیست. (۱)

ب) در صورت امکان معادله نیم مماس های راست و چپ در  $x = 1$  را بنویسید. (۱)

۸) نمودار توابع  $f$  و  $g$  و  $h$  و  $t$  را به نمودار مشتق آنها نظیر کنید. (۱)



۹) مشتق توابع زیر را بیابید. ( ساده کردن مشتق الزامی نیست. ) ( ۲/۲۵ )

$$f(x) = \sin^r x + \cos^r x$$

$$g(x) = \frac{6x-2}{\sqrt{x}}$$

۱۰) یک توده باکتری پس از  $t$  ساعت دارای جرم  $m(t) = \sqrt{t} + 2t^r$  گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی  $3 \leq t \leq 4$  چند گرم افزایش می یابد؟ (۱)

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه  $t = 3$  چقدر است؟ (۱)

(۱۱) مقادیر  $a$  و  $b$  و  $c$  را در تابع  $f(x) = ax^2 + bx^2 + c$  طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند:

$$f(0) = 1 \text{ و } f(1) = 2 \text{ و } x = \frac{1}{4} \text{ طول نقطه عطف نمودار } f \text{ باشد. ( } 1/5 \text{ )}$$

(۱۲) جهت تقعر و نقاط عطف نمودار تابع زیر را مشخص کنید. ( ۱/۵ )

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 15$$

(۱۳) نقاط اکسترمم مطلق تابع زیر را در بازه داده شده در صورت وجود بیابید و نقاط بحرانی این تابع را به دست آورید. (۱/۵)

$$y = x^2 - 2x + 1 \quad [-2, 2]$$

(۱۴) جدول رفتار و نمودار تابع زیر را رسم کنید. ( ۲ )

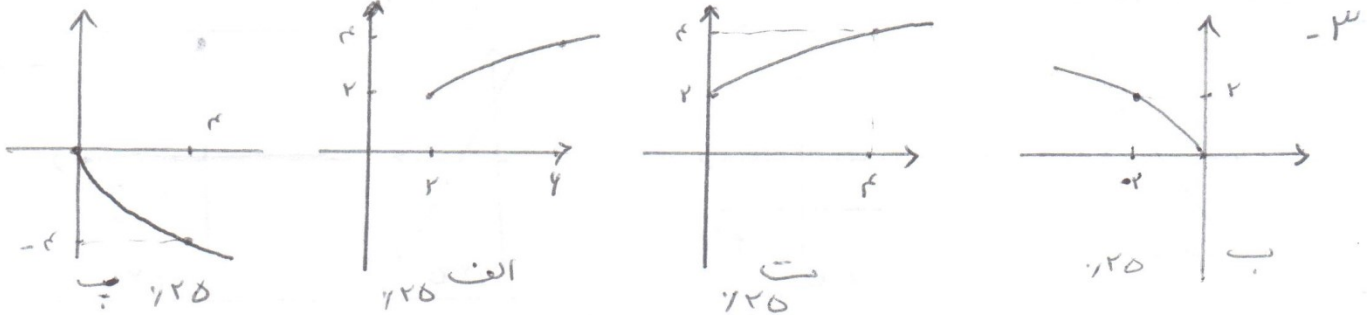
$$f(x) = \frac{2x - 1}{x - 2}$$

موفق باشید.

کلیه سوالات حسابان ۲

الف ۱- ۱/۲۵      ب (صعودی) ۱/۲۵      ب (کمتر) ۱/۲۵      ت (نسبت) ۱/۲۵      ث (صعودی) ۱/۲۵

الف ۲- ۱/۲۵      ب (ب) ۱/۲۵      ب (ب) ۱/۲۵      ت (ب) ۱/۲۵



$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{r} \Rightarrow r \sin \alpha \cdot \cos \alpha = r \frac{\sqrt{3}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{r}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{r} = \sin \frac{\pi}{r} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{r} \Rightarrow \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2r} & k \in \mathbb{Z} \\ 2\alpha = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{r} \Rightarrow \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2r} - \frac{\pi}{4} & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow r^-} \frac{[x] - r}{x - r} = \frac{[r^-] - r}{r - r} = \frac{1 - r}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-rx^r + x - 1}{4x^r - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-rx^r}{4x^r} = \frac{-r}{4} = -\frac{1}{r}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = r$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -r$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^r - 1| - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^r - 1}{x - 1} = \text{الف-۷}$$

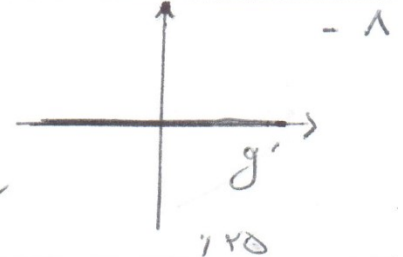
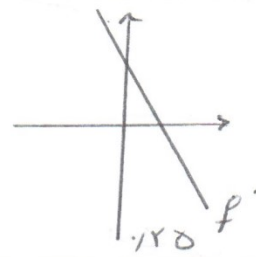
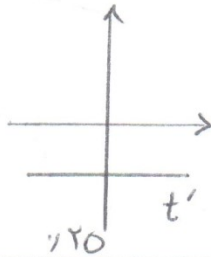
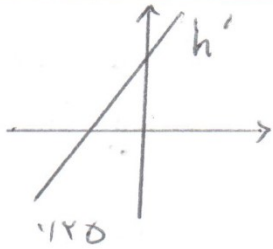
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2-1)}{x-1} = -2 \quad \text{۱۲۵}$$

چون مشتق چپ با راست برابر نیست مشتق موجود نیست. ۱۲۵

$$y-0 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x-2 \quad x \geq 1 \quad \text{۱۲۵} \quad \text{نیم‌مماس راست}$$

$$y-0 = -2(x-1) \Rightarrow y = -2x+2 \quad x \leq 1 \quad \text{۱۲۵} \quad \text{نیم‌مماس چپ}$$



$$f'(x) = 2 \cos x \sin^2 x - 2 \sin x \cos^2 x \quad \text{۱۲۵} \quad \text{۹}$$

$$g'(x) = \frac{9\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x-2)}{(\sqrt{x})^2} \quad \text{۱۲۵}$$

$$\frac{m(r) - m(r)}{r-r} = \frac{120 - \sqrt{r} - ar}{1} = \sqrt{r}, r, gr \quad \text{۱۲۵} \quad \text{۱۰ - الف}$$

$$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 4t^3 \quad m'(r) = 2r^2, r, gr \quad \text{۱۲۵} \quad \text{ب}$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow c = 1 \quad \text{۱۲۵} \quad \text{۱۱}$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow a + b + 1 = 2 \Rightarrow a + b = 1 \quad \text{۱۲۵}$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx \Rightarrow f'(x) = 4ax + 2b \quad \text{۱۲۵}$$

$$f''\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \Rightarrow 4a\left(\frac{1}{r}\right) + 2b = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3a + 2b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$a = -2 \quad \text{۱۲۵}$$

$$b = 3 \quad \text{۱۲۵}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x \Rightarrow f''(x) = 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3 \quad -12$$

$x$	$2$	
$f''$	$-$	$+U$
$f$	$-1$	

نقطه عطف  $(2, -1)$

$$y' = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \quad \text{نقاط بحرانی} \quad -13$$

نقاط بحرانی  $\left\{ \begin{array}{l} (1, -1) \rightarrow \text{مینیمم مطلق} \\ (-1, 3) \rightarrow \text{ماکزیمم مطلق} \end{array} \right.$

$$f(-2) = -1 \Rightarrow (-2, -1) \quad \text{مینیمم مطلق}$$

$$f(2) = 3 \Rightarrow (2, 3) \quad \text{ماکزیمم مطلق}$$

$$D = \mathbb{R} - \{2\} \quad x = 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm \infty \quad \text{مخالف قائم} \quad -14$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2x - 1}{x - 2} = 2 \Rightarrow y = 2 \quad \text{مخالف افقی}$$

$$f'(x) = \frac{2(x-2) - (2x-1)}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$$

$$f''(x) = \frac{0 + 4(x-2)}{(x-2)^3} = \frac{4}{(x-2)^2} \quad x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$f'$		$-$		$-$
$f''$	$\cap$	$-$		$+U$
$f$	$2$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow \pm \infty$	$2$

نقطه گسلی

