

ساعات شروع:	بسمه تعالی	سوالات امتحانی درس هندسه ۳
تاریخ امتحان:	آموزش و پرورش شهرستان تبریز	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه
تعداد صفحه: ۴		نام و نام خانوادگی:
مدت امتحان:		شماره صندلی:

جواب سوالات امتحانی هندسه ۳

ردیف	سوالات
1	<p>گاليله: "در رياضيات آنچه مهم است، فكر كردن است! رياضيات الفبايى است كه خداوند جهان را بر مبنای آن خلق كرد."</p> <p>جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.</p> <p>الف) دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با حاصلضرب عناصر روی قطر اصلی آن.</p> <p>ب) اگر صفحه p با مولد d موازی باشد و از راس مخروط عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک سهمی است.</p> <p>پ) سهمی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.</p> <p>ت) دو بردار را مساوی یا همسنگ گوئیم هر گاه اندازه و جهت آن ها یکسان باشند.</p>
2	<p>درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ وارون یکدیگرند. [درست] [نادرست]</p> <p>ب) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله اند، نیمساز آن زاویه است. [درست] [نادرست]</p> <p>پ) در یک بیضی هر چه خروج از مرکز بیضی به یک نزدیک شود شکل بیضی به دایره نزدیکتر می شود درست [درست] [نادرست]</p> <p>ت) اگر a, b دو بردار غیر صفر باشند و $a \cdot b = 0$، در اینصورت دو بردار بر هم عمودند. [درست] [نادرست]</p> <p>ج) ضرب خارجی دو بردار خاصیت جابجایی دارد. [درست] [نادرست]</p> <p>چ) خطی که از کانون به خط هادی سهمی عمود شود را محور تقارن سهمی گویند. [درست] [نادرست]</p>
3	<p>اگر ماتریس های $B = [b_{ij}]_{3 \times 2}$ و $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت زیر تعریف شوند:</p> $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & i < j \\ 2i + 1 & i = j \\ j - i & i > j \end{cases}, \quad b_{ij} = \begin{cases} i + 1 & i < j \\ 2i - 1 & i = j \\ i - j & i > j \end{cases}$ <p>آن گاه حاصل $A \times B$ را به دست آورید. پاسخ:</p> $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \\ -2 & -1 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $A \times B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 10 & 16 \\ 11 & 0 \end{bmatrix}$

دستگاه معادلات $\begin{cases} -2x - 4y = -1 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

4

پاسخ:

$$|A| = -2 \times 3 - 1 \times (-4) = -2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad X = A^{-1}B$$

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

1

0.5 مکان هندسی مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایره $C(O, r)$ در صفحه این دایره مماس خارجی اند را مشخص کنید.

5

پاسخ:

مکان هندسی مورد نظر دایره‌ای به مرکز O و شعاع $2r$ می‌باشد.

وضعیت خط و دایره زیر نسبت به هم را مشخص کنید.

6

1 $3x + 4y = 0$, $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$

پاسخ:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = -7 + \quad \Rightarrow \quad (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$$

$$O = (2, 2) , \quad r = 1 , \quad \text{فاصله مرکز از خط} = \frac{|3 \times 2 + 4 \times 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{14}{5} \Rightarrow \frac{14}{5} > r$$

پس خط و دایره هیچ نقطه مشترکی ندارند.

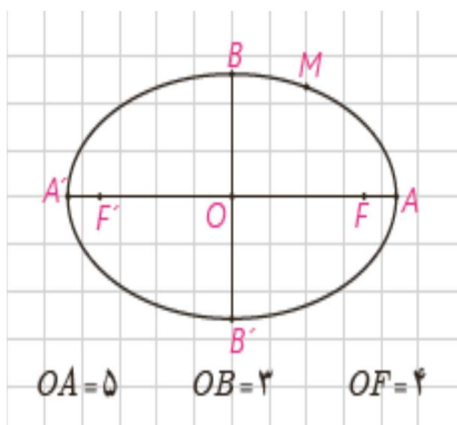
نقطه M روی بیضی به اقطار 6, 10 واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر 4 واحد است.

7

2

الف) نشان دهید $OM = OF = OF'$.

ب) نشان دهید مثلث $MF'F$ قائم الزاویه است.



پ) طولهای MF , MF' را به دست آورید.

پاسخ: الف:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4 = OF = OF' = OM$$

ب) در مثلثی که میانه نظیر یک ضلع آن نصف آن ضلع باشد زاویه است. در این مثلث OM نصف FF' می باشد. پس مثلث $MF'F$ قائم الزاویه است.

ب) $MF = x$, $MF' = y$

$$x + y = 2a = 10 \Rightarrow y = 10 - x$$

$$x^2 + y^2 = FF'^2 = 8^2 \Rightarrow x^2 + (10 - x)^2 = 64 \Rightarrow 2x^2 - 20x + 36 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 18 = 0$$

$$x_1, x_2 = 5 \pm \sqrt{7}$$

$$x = 5 + \sqrt{7} \Rightarrow y = 5 - \sqrt{7} \Rightarrow MF' = 5 + \sqrt{7}, MF = 5 - \sqrt{7}$$

$$x = 5 - \sqrt{7} \Rightarrow y = 5 + \sqrt{7}$$

1

معادله سهمی را بنویسید که $S = (3, 2)$ راس و $F = (3, 4)$ کانون آن باشد، معادله محور تقارن را بنویسید..

پاسخ: سهمی فوق یک سهمی عمودی رو به بالا می باشد.

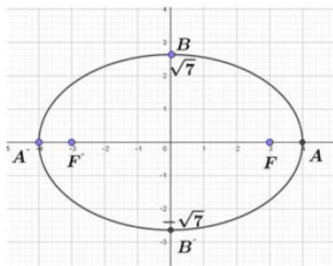
$$a + k = 4 \Rightarrow a = 4 - 2 = 2, \quad (x - 3)^2 = 8(y - 2), \quad y = -a + k = -2 + 2 = 0$$

با توجه به مقادیر داده شده بیضی مورد نظر را رسم کنید.

9

$$c = 3, \quad a = 4, \quad \frac{c}{a} = \frac{3}{4}$$

پاسخ:



1

$$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow b = \sqrt{7}$$

10 سهمی $y^2 = 4x - 4$ مفروض است، به مرکز کانون سهمی و به شعاع 3 واحد دایره ای رسم می کنیم. مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید. پاسخ:

1.5

$$y^2 = 4(x - 1) \quad S \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$fa = 4 \rightarrow a = 1 \rightarrow F = O \begin{cases} \alpha + a = 1 + 1 = 2 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

$$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = 9 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$$

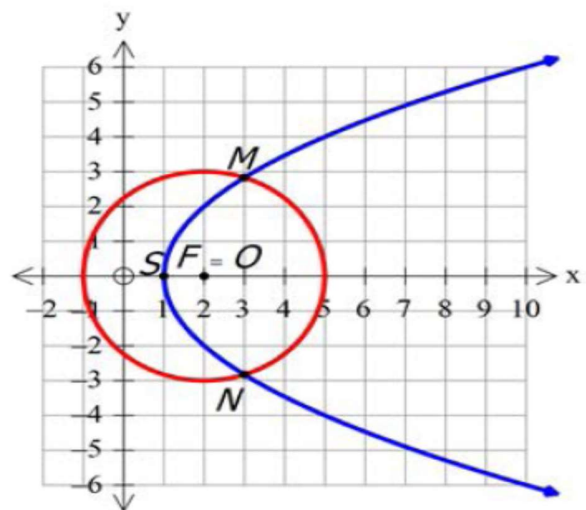
$$\begin{cases} y^2 = 4x - 4 \\ y^2 = -x^2 + 4x + 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4x - 4 = -x^2 + 4x + 5 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$x = 3 \rightarrow y^2 = 8 \rightarrow y = \pm 2\sqrt{2}$$

$$x = -3 \rightarrow y^2 = -16$$

$$M \begin{vmatrix} 3 \\ 2\sqrt{2} \end{vmatrix} \quad N \begin{vmatrix} 3 \\ -2\sqrt{2} \end{vmatrix}$$



1.5	<p>اگر $\vec{r} = -2$, $\vec{a} = (4, -1, 1)$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ (الف) طول بردار \vec{b} را به دست آورید. پاسخ:</p> $ \vec{b} = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$ <p>(ب) بردار \vec{a} را بر حسب بردارهای \vec{i}, \vec{j} بنویسید. پاسخ:</p> $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ <p>(پ) بردار $r\vec{a} + \vec{b}$ را بیابید. پاسخ:</p> $r\vec{a} + \vec{b} = -2(4, -1, 1) + (3, 2, -1) = (-5, 4, -3)$	11
2.5	<p>(الف) حجم متوازی السطوحی را به دست آورید که توسط بردارهای $\vec{b} = (0, 1, -1)$, $\vec{c} = (1, 0, 1)$, $\vec{a} = (1, 2, 0)$ تولید می شود. پاسخ:</p> $V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (1, 2, 0) \cdot ((0, 1, -1) \times (1, 0, 1)) = (1, 2, 0) \cdot (1, -1, -1) = -1 = 1$ <p>(ب) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a} = (-1, -3, 2)$, $\vec{b} = (2, 1, -4)$ پیدا کنید. پاسخ:</p> $\vec{a} \times \vec{b} = (-1, -3, 2) \times (2, 1, -4) = (10, 0, 5)$ <p>(پ) نشان دهید: $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a} ^2$ پاسخ:</p> $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \vec{a} ^2$	12
1.5	<p>اگر $\vec{a} = (3, 3, 1)$, $\vec{b} = (3, -2, 0)$ باشند، تصویر قائم \vec{a} را بر امتداد \vec{b} به دست آورید. پاسخ:</p> $\vec{a} \cdot \vec{b} = (3, 3, 1) \cdot (3, -2, 0) = 9 - 6 + 0 = 3$ $ \vec{b} = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{13}$ $\hat{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{b} ^2} \vec{b} = \frac{3}{13} (3, -2, 0) = \left(\frac{9}{13}, -\frac{6}{13}, 0\right)$	13
2	<p>بردارهای \vec{a} , \vec{b} مفروض اند به طوری که $\vec{a} \times \vec{b} = 72$, $\vec{a} = 3$, $\vec{b} = 26$ مقدار $a \cdot b$ را محاسبه کنید. پاسخ:</p> $ \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \vec{b} \sin \theta \Rightarrow 72 = 3 \times 26 \times \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{72}{78} = \frac{12}{13}$ $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169} \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{5}{13}$ $a \cdot b = \vec{a} \vec{b} \cos \theta = 3 \times 26 \times \left(\pm \frac{5}{13}\right) = \pm 30$	14
20	موفق باشید	
	نمره به عدد:	نمره ورقه
	نمره به حروف:	