

سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	نام و نام خانوادگی:	ساعت شروع: ۸ صبح	رشته: ریاضی فیزیک
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه: ۲	تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۴/۰۸	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۹		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	

ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد	نمره
------	-----------------------	------

## الف) بخش الزامی

دانش آموز عزیز به سوالات ۱ تا ۱۴ جهت کسب ۱۶ نمره پاسخ دهید.

۱/۷۵	گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید. الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. ب) اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است.	۱
۱/۲۵	اگر باقی مانده تقسیم عدد $a$ بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $2a + 3$ بر ۸ را به دست آورید.	۲
۱	اگر $n \in \mathbb{N}$ ، $n   9k + 7$ و $n   7k + 6$ ، ثابت کنید $n = 1$ یا $n = 5$ .	۳
۱/۵	باقی مانده تقسیم $7^{30}$ بر ۱۵ را به دست آورید.	۴
۱/۲۵	معادله هم نهشتی $5x \equiv 2 \pmod{11}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۵
۱	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) مجموع درجه های رأس های هر گراف ..... تعداد یال ها است. ب) در یک گراف $k$ -منتظم، ماکزیمم درجه رأس برابر با ..... است. پ) در بین تمام مجموعه های احاطه گر گراف $G$ ، مجموعه یا مجموعه های احاطه گری که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه گر ..... گراف $G$ می نامیم. ت) یک مجموعه احاطه گر را که با حذف هر یک از رأس هایش، دیگر احاطه گر نباشد، احاطه گر ..... می نامیم.	۶
۱/۲۵	گراف $G$ را در نظر گرفته و به سوالات زیر پاسخ دهید. الف) $N_G[a]$ را با اعضا مشخص کنید. ب) یک دور به طول ۴ در این گراف مشخص کنید. پ) یک مسیر به طول ۳ و یک مسیر به طول ۴ از $a$ به $c$ بنویسید.	۷
۰/۷۵	درگراف $G$ ، درجه رأس ۷ برابر با ۹ است و درجه رأس ۷ در گراف $\bar{G}$ برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف $G$ را مشخص کنید.	۸
۱	گرافی ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید، به طوری که: الف) مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد. ب) بیش از یک مجموعه احاطه گر با اندازه ۲ داشته باشد.	۹
۱/۲۵	عدد احاطه گری گراف زیر را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.	۱۰
۰/۷۵	با ارقام عدد ۱، ۱، ۲، ۲، ۲، ۳، ۴ چند عدد ۷ رقمی می توان نوشت.	۱۱
۱/۲۵	به چند طریق می توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد، اگر بخواهیم، از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم.	۱۲

«بقیه سوالات در صفحه دوم»

سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	نام و نام خانوادگی:	ساعت شروع: ۸ صبح	رشته: ریاضی فیزیک
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه: ۲	تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۴/۰۸	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۹		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	

ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد	نمره
------	-----------------------	------

۱۳	مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و با اعمال یک جایگشت بر روی ۱، ۲، ۳، ۴ یک مربع لاتین جدید به دست آورید.	۱	<table border="1"> <tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> </table>	۳	۴	۱	۲	۱	۲	۳	۴	۲	۱	۴	۳	۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲																
۱	۲	۳	۴																
۲	۱	۴	۳																
۴	۳	۲	۱																

۱۴	در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.	۱	<table border="1"> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> </table> (الف)	۳	۲	۱	۱	۳	۲	۲	۱	۳	<table border="1"> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> </table> (ب)	۲	۱	۳	۱	۲	۳	۳	۱	۲
۳	۲	۱																				
۱	۳	۲																				
۲	۱	۳																				
۲	۱	۳																				
۱	۲	۳																				
۳	۱	۲																				

## بخش انتخابی

دانش آموز عزیز جهت کسب ۴ نمره از سوالات ۱۵ تا ۲۲ فقط ۴ سوال را به دلخواه انتخاب کرده و پاسخ دهید.

۱۵	اگر $x$ و $y$ دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $2 \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ .	۱
۱۶	گراف $G$ ، ۶ رأسی ۳-منتظم است. (الف) اندازه گراف $G$ را بیابید. (ب) نمودار گراف $G$ را رسم کنید.	۱
۱۷	ثابت کنید تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.	۱
۱۸	۴ دانش آموز پایه دهم و ۳ دانش آموز پایه یازدهم، به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار گیرند، به طوری که: (الف) هیچ دو دانش آموز هم پایه کنار هم نباشند. (ب) همواره دانش آموزان پایه دهم کنار هم باشند.	۱
۱۹	به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم).	۱
۲۰	در بین اعداد طبیعی مانند $n$ ، به طوری که $1 \leq n \leq 100$ ، چند عدد وجود دارد که بر ۶ یا ۱۰ بخش پذیر است؟	۱
۲۱	در یک اردوی دانش‌آموزی حداقل چند دانش‌آموز حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که لااقل ۷ نفر از آن‌ها ماه تولد یکسانی دارند؟	۱
۲۲	قرار است سه کارگر $W_1, W_2, W_3$ در سه روز متوالی با سه ماشین نخریسی و با ۳ نوع الیاف کار کنند، به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته باشد. برای این منظور برنامه‌ریزی کنید.	۱
۲۴	جمع نمره	"موفق باشید"

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: 8 صبح	مدت امتحان: 120 دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان: 1399/04/08	
دانش آموزان روزانه سراسر کشور خرداد ماه سال 1399		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

**پاسخ سوالات الزامی**

1	الف) نادرست (0/25) $\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in Q^C$ (0/25), $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin Q^C$ (0/25) ب) درست (0/25) $(2k+1)^2 - 1 = \underbrace{4k^2 + 4k + 1 - 1}_{(0/25)} = \underbrace{4k(k+1)}_{(0/25)} = \underbrace{4 \times 2q}_{(0/25)} = 8q$	1/75
2	$a = 4q + 3$ (0/25) $\Rightarrow 2a + 3 = \underbrace{8q + 9}_{(0/25)} = \underbrace{8(q+1) + 1}_{(0/25)} = 8q' + 1$ (0/25) $\Rightarrow r = 1$ (0/25)	1/25
3	$n   9k + 7 \times (-7)$ (0/25) $\Rightarrow n   -63k - 49 + 63k + 54$ (0/25) $\Rightarrow n   5$ (0/25) $\xrightarrow{n \in N} n = 1$ یا $5$ (0/25) (مثال صفحه 12)	1
4	$7^2 = 49 \equiv 4$ (0/25) $\Rightarrow 7^4 \equiv 16 \equiv 1$ (0/5) $\Rightarrow 7^{28} \equiv 1$ (0/25) $\xrightarrow{\times 7^2 = 4 (0/25)} 7^{30} \equiv 4$ (0/25) (مشابه سوال 8 و 9 صفحه 29)	1/5
5	$2 \equiv 35$ (0/25) $\Rightarrow 5x \equiv 35$ (0/25) $\xrightarrow{(5,11)=1 (0/25)} x \equiv 7$ (0/25) $\Rightarrow x = 11k + 7$ (0/25) (مشابه سوال 14 صفحه 30)	1/25
6	الف) دو برابر (0/25) (نتیجه ابتدای صفحه 40) ب) $k$ (0/25) (تعریف گراف منتظم صفحه 35) پ) مینیمم (0/25) (تعریف صفحه 44) ت) مینیمال (0/25) (تعریف صفحه 46)	1
7	الف) $N_G[a] = \{a, b, e, d\}$ (0/5) (مشابه مثال صفحه 36) ب) دور به طول 4 $a, b, e, d, a$ (0/25) (تعریف دور صفحه 38) (در قسمت ب اگر دور را به صورت $a, d, e, b, a$ نوشت، نمره داده شود). پ) مسیر به طول 3، $a, e, b, c$ (0/25) و مسیر به طول 4، $a, d, e, b, c$ (0/25) (مشابه مثال صفحه 38)	1/25
8	$\deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = p - 1$ (0/25) $\Rightarrow 9 + 12 = p - 1$ (0/25) $\Rightarrow p = 22$ (0/25) (مسأله 1 صفحه 38)	0/75
9	الف) گراف روبه‌رو از مرتبه 6 و دارای تنها یک مجموعه احاطه‌گریکتا $\{a, b\}$ است. (0/25) (تمرین 9 صفحه 53) ب) گراف مقابل دارای سه مجموعه احاطه‌گری به اندازه 2 است که عبارتند از: $\{a, d\}, \{f, c\}, \{e, b\}$ . (0/25) (ذکر یک مجموعه کافی است.)	1
10	برای گراف مورد سوال داریم $\left\lceil \frac{1}{3+1} \right\rceil = 3 \leq \gamma(G) \Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor \leq \gamma(G)$ (0/5). از طرفی مجموعه $\{g, h, d\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف است (0/25). لذا $\gamma(G) \leq 3$ (0/25). بنابراین $\gamma(G) = 3$ (0/25). (قسمت دوم کار در کلاس صفحه 50)	1/25
11	$\frac{7!}{2! \times 3!}$ (0/5) = 42 (0/25) (مشابه مثال پایین صفحه 58)	0/75
12	$x_1 + \dots + x_5 = 11$ , $x_2 \geq 2$ , $x_5 \geq 4$ (0/25) $x_1 + y_2 + 2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 = 11$ (0/25) $\Rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5$ (0/25) $\Rightarrow$ جواب $= \binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4}$ (0/5) (قسمت پ تمرین 8 صفحه 71)	1/25

ادامه پاسخ‌ها در صفحه دوم

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: 8 صبح	مدت امتحان: 120 دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان: 1399/04/08	
دانش آموزان روزانه سراسر کشور خرداد ماه سال 1399		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

13	با استفاده از جایگشت $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1$ (0/5) مربع لاتین به صورت مقابل داریم. (مشابه تمرین 12 صفحه 72) (برای جایگشت‌های دیگر نیز بارم مناسب در نظر بگیرید.)	1
----	---	---

3	2	1	4
1	4	3	2
4	1	2	3
2	3	4	1

(0/5)

14	متعامدند. زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع وجود ندارد. (0/25)	(الف)	متعامد نیستند. زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع وجود دارد. (0/25)	(ب)
----	--	-------	--	-----

13	21	32
32	13	21
21	32	13

32	21	13
11	33	22
23	12	31

(0/25)

(0/25)

(مثال صفحه 65)

پاسخ سوالات اختیاری

15	چون رابطه آخر درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مسأله درست است. (0/25)	1
----	--	---

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2 \quad (0/25) \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \quad (0/25) \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0 \quad (0/25)$$

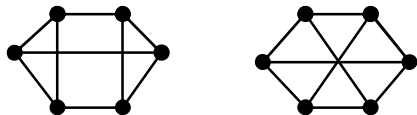
(قسمت الف تمرین 1 صفحه 8)

16	رسم یکی از گراف‌های زیر کافی است. (0/5)	1
----	---	---

(تعریف گراف k-منتظم صفحه 35)

$$3 \times 6 = 2q \Rightarrow q = 9 \quad (0/5) \quad \text{(الف)}$$

(ب) رسم یکی از گراف‌های زیر کافی است. (0/5)



17	فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رئوس فرد گراف و B مجموعه همه رئوس زوج گراف G باشد. در این صورت داریم: $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v)$ (0/25). از طرفی $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2q$ و $\sum_{v \in B} \deg(v) = 2k$ زوج اند. (0/25) لذا $\sum_{v \in A} \deg(v) = 2q - 2k$ باید زوج باشد. (0/25) می‌دانیم تعدادی زوج عدد فرد، حاصل زوج را تولید می‌کنند بنابراین تعداد اعضای A باید زوج باشد. (0/25) (صفحه 40)	1
----	---	---

18	(الف) $4! \times 3!$ (0/5) (ب) $4! \times 4!$ (0/5)	1
----	---	---

(مشابه مثال صفحه 57)

19	تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این کار معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعه 4 عضوی به مجموعه‌ای 8 عضوی (0/25)، یعنی: $(8)_4 = \frac{8!}{4!} = 1680$ (0/25)	1
----	--	---

(مثال پایین صفحه 78)

20	(مشابه کار در کلاس صفحه 76)	1
----	-----------------------------	---

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100, n = 6k\} \Rightarrow |A| = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16 \quad (0/25)$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100, n = 10k\} \Rightarrow |B| = \left\lfloor \frac{100}{10} \right\rfloor = 10 \quad (0/25)$$

$$A \cap B = \{n \mid 1 \leq n \leq 100, n = 30k\} \Rightarrow |A \cap B| = \left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor = 3 \quad (0/25) \Rightarrow |A \cup B| = 16 + 10 - 3 = 23 \quad (0/25)$$

ادامه پاسخ‌ها در صفحه سوم

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: 8 صبح	مدت امتحان: 120 دقیقه																																																											
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان: 1399/04/08																																																												
دانش آموزان روزانه سراسر کشور خرداد ماه سال 1399		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>																																																												
ردیف	راهنمای تصحیح																																																													
21	در این مسأله $k + 1 = 7 \Rightarrow k = 6$ و تعداد لانه ها 12 است (0/25). پس تعداد کبوترها یا معادل با آن تعداد دانش آموزان حداقل می‌بایست $kn + 1 = 6 \times 12 + 1 = 73$ باشد. (0/5)																																																													
22	<p>برای برنامه‌ریزی دو مربع لاتین متعامد در نظر بگیریم. مربع <math>A</math> مربوط به ماشین‌ها و مربع <math>B</math> مشخص کننده الیاف است. (سوال 14 صفحه 72)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;"><math>W_1</math></td> <td style="text-align: center;"><math>W_2</math></td> <td style="text-align: center;"><math>W_3</math></td> <td></td> <td style="text-align: center;"><math>W_1</math></td> <td style="text-align: center;"><math>W_2</math></td> <td style="text-align: center;"><math>W_3</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td>روز اول</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">1</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">3</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">2</td> <td rowspan="3" style="vertical-align: middle; padding: 0 10px;"><math>= A</math></td> <td>روز اول</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">2</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">1</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">3</td> <td rowspan="3" style="vertical-align: middle; padding: 0 10px;"><math>= B \Rightarrow</math></td> <td>روز اول</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">12</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">31</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">23</td> </tr> <tr> <td>روز دوم</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">3</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">2</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">1</td> <td>روز دوم</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">3</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">2</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">1</td> <td>روز دوم</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">33</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">22</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">11</td> </tr> <tr> <td>روز سوم</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">2</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">1</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">3</td> <td>روز سوم</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">1</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">3</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">2</td> <td>روز سوم</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">21</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">13</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">32</td> </tr> <tr> <td></td> <td colspan="3" style="text-align: center;">(0/25)</td> <td></td> <td colspan="3" style="text-align: center;">(0/5)</td> <td></td> <td colspan="3" style="text-align: center;">(0/25)</td> <td></td> </tr> </table> <p style="text-align: right;">عدد سمت چپ هر درآیه نشان دهنده ماشین و عدد سمت راست آن مشخص کننده نوع الیاف است.</p>			$W_1$	$W_2$	$W_3$		$W_1$	$W_2$	$W_3$		روز اول	1	3	2	$= A$	روز اول	2	1	3	$= B \Rightarrow$	روز اول	12	31	23	روز دوم	3	2	1	روز دوم	3	2	1	روز دوم	33	22	11	روز سوم	2	1	3	روز سوم	1	3	2	روز سوم	21	13	32		(0/25)				(0/5)				(0/25)			
$W_1$	$W_2$	$W_3$		$W_1$	$W_2$	$W_3$																																																								
روز اول	1	3	2	$= A$	روز اول	2	1	3	$= B \Rightarrow$	روز اول	12	31	23																																																	
روز دوم	3	2	1		روز دوم	3	2	1		روز دوم	33	22	11																																																	
روز سوم	2	1	3		روز سوم	1	3	2		روز سوم	21	13	32																																																	
	(0/25)				(0/5)				(0/25)																																																					
20	جمع نمره																																																													

«همکاران گرامی لطفاً برای راه حل‌های صحیح دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمایید.»